

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ТА БЕЗПЕКИ НАСЕЛЕННЯ

Кафедра фізико-математичних дисциплін

**Методичні рекомендації
та варіанти завдань до виконання
розрахунково-графічної роботи
«Застосування визначених і подвійних інтегралів
до розв’язання прикладних задач»
з навчальної дисципліни «Вища математика»
для здобувачів вищої освіти
за освітньо-професійними програмами
«Пожежна безпека», «Цивільний захист» та «Охорона праці»**

Черкаси 2025

Рекомендовано до друку кафедрою
фізико-математичних дисциплін
(протокол від 23.09.2024 р. № 1)
та вченої радою факультету управління
та безпеки населення НУЦЗ України.
(протокол від 28.10.2024 р. № 6)

Укладач: М. М. Горонескуль

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор **Ю.І. Першина**,
завідувач кафедри вищої математики Національного технічного
університету «ХП»;
кандидат фізико-математичних наук, доцент **В.Г. Борисенко**,
доцент кафедри фізико-математичних дисциплін НУЦЗ України.

Методичні рекомендації та варіанти завдань до виконання
розрахунково-графічної роботи «Застосування визначених і подвійних
інтегралів до розв’язання прикладних задач» з навчальної дисципліни
«Вища математика» для здобувачів вищої освіти за освітньо-професійними
програмами «Пожежна безпека», «Цивільний захист» та «Охорона праці» /
Укладач : М. М. Горонескуль. – Черкаси: НУЦЗУ, 2025. – 19 с.

Методичні рекомендації та варіанти завдань до виконання розрахунково-
графічної роботи «Застосування визначених і подвійних інтегралів до
розв’язання прикладних задач» з навчальної дисципліни «Вища математика» для
здобувачів вищої освіти за освітньо-професійними програмами «Пожежна
безпека», «Цивільний захист» та «Охорона праці» визначають порядок
виконання й оформлення розрахунково-графічної роботи, а також вимоги до її
структури та змісту.

ЗМІСТ

Порядок виконання і оформлення робіт.....	4
Методичні рекомендації та приклад виконання завдання 1.....	5
Методичні рекомендації та приклад виконання завдання 2.....	7
Методичні рекомендації та приклад виконання завдання 3.....	10
Додаток 1. Таблиця інтегралів з прикладами її використання.....	11
Додаток 2. Основні властивості невизначеного та визначеного інтегралів..	13
Додаток 3. Обчислення подвійного інтеграла та його основні властивості..	14
Варіанти завдань.....	16
Література.....	18

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ І ОФОРМЛЕННЯ РОБОТИ

Розрахунково-графічну роботу (РГР) необхідно виконувати в окремому зошиті або на аркушах формату А-4. Для зауважень викладача необхідно залишити поля 4-6 см завширшки. РГР слід виконувати строго за варіантом, який видано викладачем. РГР, що виконана не за своїм варіантом, не перевіряється і не зараховується.

Завдання необхідно розв'язувати відповідно до пунктів постановки задачі з дотриманням методичних рекомендацій до їх виконання. Умови завдань записувати повністю, після чого наводити докладний процес розв'язання. Якщо до даного завдання є обов'язковим рисунок (графік), то його необхідно виконати з нанесенням усіх позначень, що вимагаються у завданні.

Здобувач зобов'язаний пройти співбесіду з викладачем кафедри.

Здобувачі, які не виконали запропоновані завдання і не пройшли співбесіду з викладачем до екзамену (заліку) не будуть допущені.

Оформлювати та підписувати роботу треба за зразком, наведеним нижче.

Роботи здобувачів, що не мають титульного аркуша з наявністю прізвища здобувача не перевіряються.

Приклад титульного аркуша

Розрахунково-графічна робота:

«Застосування визначених і подвійних інтегралів

до розв'язання прикладних задач»

з дисципліни «Вища математика»

здобувача вищої освіти групи ОП-25-3

Петренка Івана Івановича

Варіант № 0

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ

Постановка задачі: Плоска однорідна матеріальна пластина з поверхневою густиною $\mu(x, y) = 1$ має форму фігури, що обмежена заданими лініями

$$y = x^2 + 2 \text{ та } y = 4 - x^2.$$

Необхідно:

Завдання 1. Обчислити площу заданої пластини та зробити рисунок.

Завдання 2. Визначити та позначити на рисунку координати центра мас заданої однорідної пластини.

Завдання 3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням заданої пластини навколо координатної осі Ox та зробити рисунок.

Розв'язання завдання 1. Площу заданої пластини обчислимо за формулою:

$$S_D = \iint_D dx dy,$$

де область інтегрування D – замкнена область, яку займає пластина, що обмежена параболою $y = x^2 + 2$ та параболою $y = 4 - x^2$.

Для того, щоби визначити межі інтегрування, необхідно виконати декілька кроків.

Крок 1.1. Знайти абсциси точок перетину графіків заданих функцій, розв'язавши наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 4 - x^2 \end{cases},$$

Звідси одержимо рівність $f(x) = g(x)$, яку слід розв'язати.

Запишемо

$$x^2 + 2 = 4 - x^2,$$

тоді

$$2x^2 = 2 \text{ або } x^2 = 1.$$

Звідси одержимо абсциси точок перетину графіків заданих функцій, а саме:

$$x_1 = -1 \text{ та } x_2 = 1.$$

Крок 1.2. Обчислити ординати y_1 та y_2 точок перетину графіків заданих функцій.

Для того, щоб обчислити ординату y_1 першої точки, наприклад, $т.А(x_1; y_1)$, перетину графіків заданих функцій, необхідно значення відповідної абсциси $x_1 = -1$ підставити або у рівняння параболи $y = x^2 + 2$, або у рівняння параболи $y = 4 - x^2$ (без різниці у яке саме). Отже,

$$y_1 = y(-1) = (x^2 + 2)\Big|_{x=-1} = (-1)^2 + 2 = 3.$$

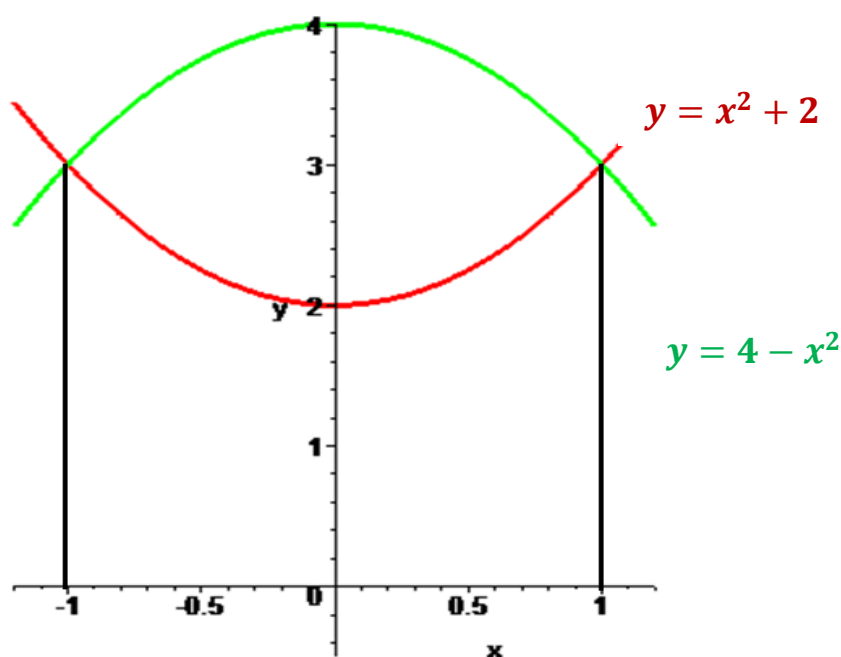
За аналогією для $x_2 = 1$ одержимо

$$y_2 = y(1) = (x^2 + 2)\Big|_{x=1} = (1)^2 + 2 = 3.$$

Отже, маємо дві точки перетину заданих парабол, а саме:

$$т.А(-1; 3) \text{ та } т.В(1; 3).$$

Крок 1.3. Побудувати фігуру, що обмежена заданими лініями:



Крок 1.4. Обчислити площу пластини за формулою:

$$S_D = \iint_D dx dy.$$

1) Область D є правильною в напрямку осі OY , її проекцією на вісь OX є відрізок $x \in [-1; 1]$ – абсциси точок A і B перетину заданих парабол.

2) Область D обмежена знизу (червона крива) параболою $y = x^2 + 2$, а зверху (зелена крива) – параболою $y = 4 - x^2$.

Отже,

$$\begin{aligned} S_D &= \iint_D dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2+2}^{4-x^2} dy = \int_{-1}^1 \left(y \Big|_{x^2+2}^{4-x^2} \right) dx = \int_{-1}^1 \left[(4 - x^2) - (x^2 + 2) \right] dx = \\ &= \int_{-1}^1 (4 - x^2 - x^2 - 2) dx = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = 2 \int_0^1 (2 - 2x^2) dx = \\ &= 4 \int_0^1 (1 - x^2) dx = 4 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} (од^2). \end{aligned}$$

Відповідь 1: площа заданої пластини $S = 2\frac{2}{3} (од^2)$.

Розв’язання завдання 2. Необхідно визначити та позначити на рисунку координати центра мас заданої пластини, що має форму фігури, обмеженої лініями:

$$y = x^2 + 2 \text{ та } y = 4 - x^2.$$

Координати центра мас – т.С($x_C; y_C$) пластини визначаються наступними формулами:

$$x_C = \frac{M_y}{m} \text{ та } y_C = \frac{M_x}{m},$$

де

– маса матеріальної пластини визначається :

$$m = \iint_D \mu(x, y) dx dy,$$

– статичні моменти пластини відносно координатних осей визначаються наступним чином:

$$M_x = \iint_D y \cdot \mu(x, y) dx dy,$$

$$M_y = \iint_D x \cdot \mu(x, y) dx dy.$$

Зауваження. В однорідному гравітаційному полі центр ваги збігається з центром мас.

Крок 2.1. Визначимо масу однорідної матеріальної пластини з поверхневою густиною $\mu(x, y) = 1$, що має форму фігури, обмеженою заданими лініями:

$$y = x^2 + 2 \text{ та } y = 4 - x^2.$$

Маса матеріальної пластини визначається формулою:

$$m = \iint_D \mu(x, y) dx dy.$$

Оскільки пластина однорідна з поверхневою густиною $\mu(x, y) = 1$, то значення маси пластини чисельно дорівнює її площі. Отже,

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \mu(x, y) dx dy = \iint_D dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2+2}^{4-x^2} dy = \int_{-1}^1 \left(y \Big|_{x^2+2}^{4-x^2} \right) dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left[(4 - x^2) - (x^2 + 2) \right] dx = \int_{-1}^1 (4 - x^2 - x^2 - 2) dx = \\ &= \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = 2 \int_0^1 (2 - 2x^2) dx = 4 \int_0^1 (1 - x^2) dx = 4 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \quad (од). \end{aligned}$$

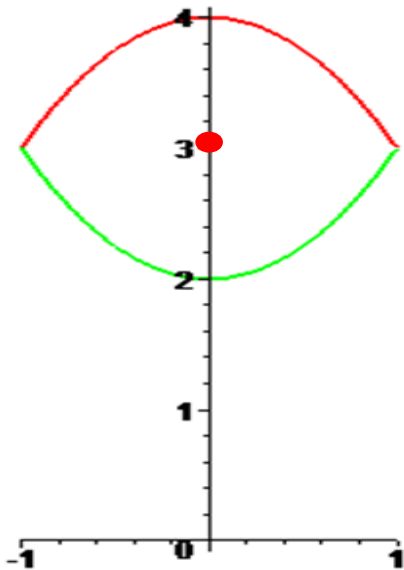
Крок 2.2. Обчислимо статичні моменти пластини відносно координатних осей.

Статичний момент пластини відносно координатної осі Ox :

$$\begin{aligned}
 M_x &= \iint_D y \cdot \mu(x, y) dx dy = \iint_D y dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2+2}^{4-x^2} y dy = \\
 &= \int_{-1}^1 \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{x^2+2}^{4-x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[(4-x^2)^2 - (x^2+2)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[(4-x^2)^2 - (x^2+2)^2 \right] dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (12 - 12x^2) dx = 6 \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 6 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 6 \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right] = 8.
 \end{aligned}$$

Статичний момент пластини відносно координатної осі Oy:

$$\begin{aligned}
 M_y &= \iint_D x \cdot \mu(x, y) dx dy = \iint_D x dx dy = \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2+2}^{4-x^2} dy = \\
 &= \int_{-1}^1 \left(y \Big|_{x^2+2}^{4-x^2} \right) x dx = \int_{-1}^1 \left[(4-x^2) - (x^2+2) \right] x dx = \int_{-1}^1 (2-2x^2) x dx = \\
 &= \int_{-1}^1 (2-2x^2) x dx = 2 \int_{-1}^1 (x - x^3) dx = 2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-1}^1 = 2 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \right] = 0.
 \end{aligned}$$

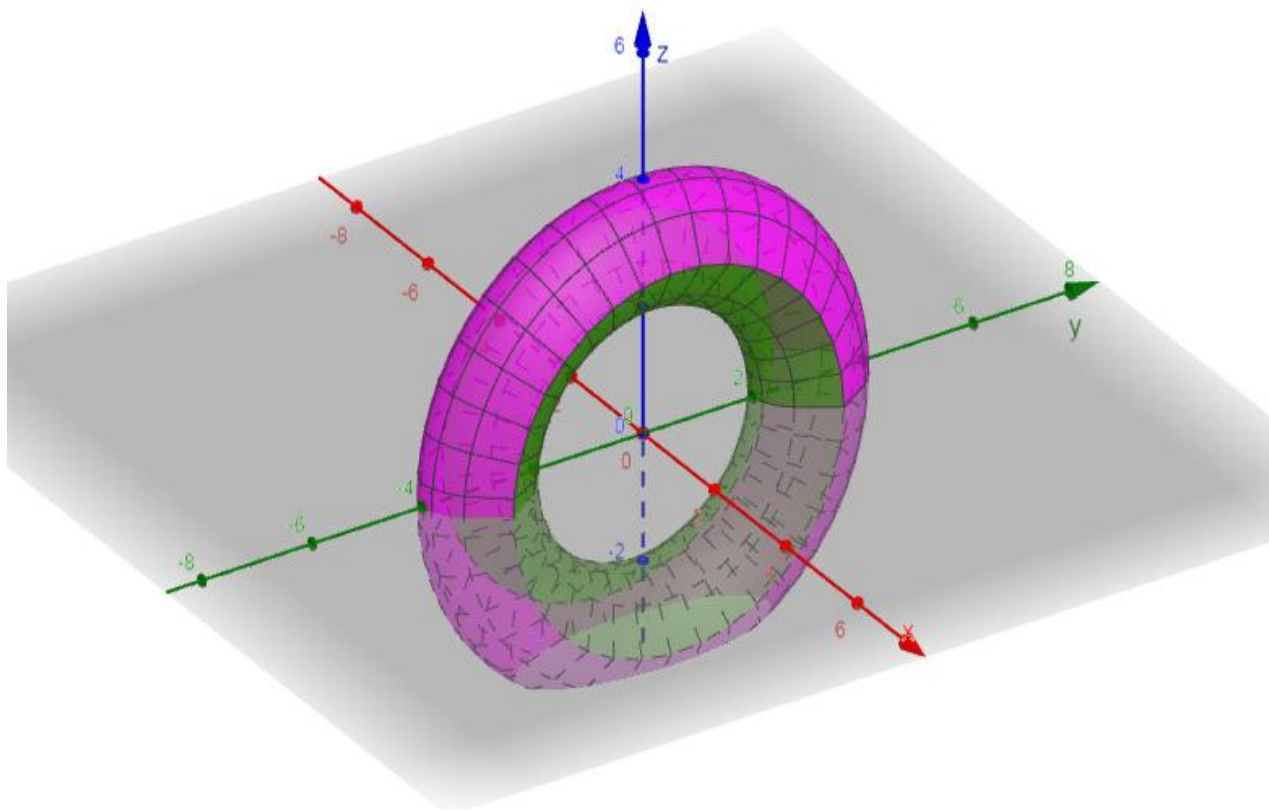
Крок 2.3. Обчислити координати центра мас т.С(x_c; y_c) пластини: $x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{0}{8/3} = 0$ та $y_c = \frac{8}{8/3} = 3$. Відповідь 2: т. С(0; 3) – координати центра мас однорідної пластини.	
---	--

Розв'язання завдання 3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням заданої фігури навколо координатної осі Ox та зробити рисунок.

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx = \pi \int_{-1}^1 ((x^2 + 2)^2 - (4 - x)^2) dx = \pi \int_{-1}^1 (12 - 12x^2) dx =$$

$$= 12\pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 12\pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 12\pi \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right] = 16\pi \text{ (од}^3\text{)}.$$

Тіло, що утворене обертанням заданої пластини навколо координатної осі Ox , має вигляд:



Додаток 1. Таблиця інтегралів з прикладами її використання

1	$\int dx = x + C$
2	$\int k dx = kx + C; \quad k \in R$
3	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1); \quad \int x dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$
4	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
5	$\int \frac{dx}{x^m} = \int x^{-m} dx = \frac{x^{-m+1}}{-m+1} + C; \quad (m \neq 1, m > 0)$ $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x^m}} = \int x^{-\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{1-\frac{m}{n}}}{1-\frac{m}{n}} = \frac{x^{\frac{n-m}{n}}}{\frac{n-m}{n}} = \frac{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-m}}}{n-m} + C$ $\int \frac{dx}{\sqrt[9]{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{9}} dx = \frac{x^{1-\frac{2}{9}}}{1-\frac{2}{9}} = \frac{x^{\frac{7}{9}}}{\frac{7}{9}} = \frac{9 \cdot \sqrt[9]{x^7}}{7} + C$
7	$\int \sqrt[n]{x} dx = \int x^{\frac{1}{n}} dx = \frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + C = \frac{x^{\frac{1+n}{n}}}{\frac{1+n}{n}} + C = \frac{nx^{\frac{1+n}{n}}}{1+n} + C = \frac{n \cdot \sqrt[n]{x^{n+1}}}{1+n} + C$ $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$
8	$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} = \frac{x^{\frac{m+n}{n}}}{\frac{m+n}{n}} = \frac{n \cdot x^{\frac{m+n}{n}}}{m+n} + C = \frac{n \cdot \sqrt[n]{x^{m+n}}}{m+n} + C$ $\int \sqrt{x^7} dx = \int x^{\frac{7}{2}} dx = \frac{x^{\frac{7}{2}+1}}{\frac{7}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}} + C = \frac{2 \cdot x^{\frac{9}{2}}}{9} + C = \frac{2 \cdot \sqrt{x^9}}{9} + C$
9	$\int e^x dx = e^x + c$

10	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$		
11	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	12	$\int \cos x dx = \sin x + C$
13	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$	14	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
15	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctgx} + C$	16	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
17	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$	18	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$
19	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$		
20	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C; \quad \int \frac{dx}{3^2+x^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$		
21	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C; \quad \int \frac{dx}{x^2-3^2} = \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left \frac{x-3}{x+3} \right + C$		
22	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C; \quad \int \frac{dx}{3^2-x^2} = \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left \frac{3+x}{3-x} \right + C$		
23	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$		
24	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$ $\int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{3} + C$		
25	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 3^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm 3^2} \right + C$		
26	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C;$ $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm 3^2}} = \sqrt{x^2 \pm 3^2} + C;$		

Додаток 2. Основні властивості невизначеного та визначеного інтеграла

Основні властивості невизначеного інтеграла [5, С. 10]:

1. $\int dF(x)dx = F(x) + C, C = \text{const.}$

2. $\int Af(x)dx = A \int f(x)dx$, де $A \in \mathbf{R}$.

3. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

4. Якщо $F(x)$ - первісна для функції $f(x)$, то

$$\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C, C = \text{const.}$$

Основні властивості визначеного інтеграла [5, С. 56-57]:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

3. Якщо $f(x) \geq 0$ на відрізку $[a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

4. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на $[a; b]$ та C_1, C_2 - сталі множники, то

$$\int_a^b [C_1 f(x) + C_2 g(x)]dx = C_1 \int_a^b f(x)dx + C_2 \int_a^b g(x)dx.$$

5. Якщо $f(x)$ інтегрована на $[a; c]$ та на $[a; c]$, то вона інтегрована і на

$[a; b]$, причому $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Зауважимо, що точка c може бути довільно розташована відносно точок a та b

Обчислення визначених інтегралів

Якщо $F(x)$ є будь-якою первісною для неперервної функції $f(x)$, $x \in [a; b]$, то має місце (узагальнена) формула Ньютона-Лейбніца:

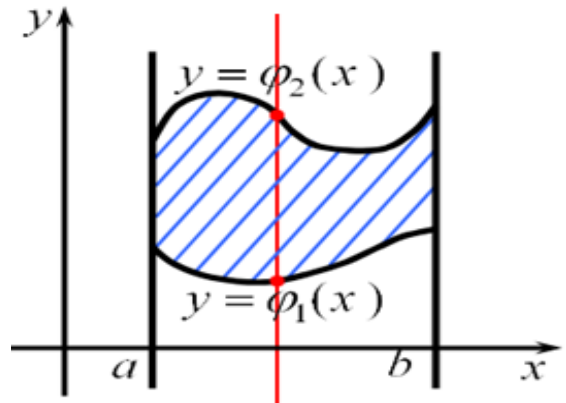
$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Додаток 3. Обчислення подвійного інтеграла та його основні властивості

Обчислення подвійного інтеграла $\iint_D f(x,y)dx dy$ зводиться до обчислення одного або кількох повторних інтегралів, кожний з яких є результатом послідовного обчислення двох визначених інтегралів.

$$\text{Область } D: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \end{cases},$$

де функції $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ неперервні на відрізку $[a; b]$ і задовольняють нерівності $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, $x \in [a; b]$ є правильною в напрямку осі Oy , то подвійний інтеграл можна подати через повторний наступною формулою:



$$\iint_D f(x,y)dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Зауважимо, якщо крива $\varphi_1(x)$ (або крива $\varphi_2(x)$) в проміжку $a \leq x \leq b$ задається різними аналітичними виразами, наприклад:

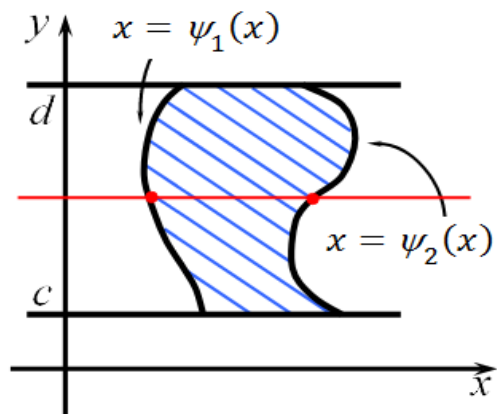
$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi_1^{(1)}(x) & \text{при } a \leq x \leq c, \\ \varphi_1^{(2)}(x) & \text{при } c \leq x \leq b, \end{cases}$$

то інтеграл зліва записується у вигляді суми двох інтегралів

$$\iint_D f(x,y)dx dy = \int_a^c dx \int_{\varphi_1^{(1)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy + \int_c^b dx \int_{\varphi_1^{(2)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

$$\text{Область } D: \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \end{cases},$$

де функції $\psi_1(y)$ та $\psi_2(y)$ неперервні на відрізку $[c; d]$ і задовольняють нерівності $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$, $y \in [c; d]$ є правильною в напрямку осі Ox , то подвійний інтеграл можна подати через повторний наступною формулою:



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

При інтегруванні подвійного інтеграла істотним є правильне розміщення меж інтегрування. Значення подвійного інтеграла не залежить від порядку інтегрування. Але для економії обчислювальної роботи необхідно, якщо це можливо, вибрати такий порядок інтегрування, при якому не потрібно розбивати область інтегрування на частини.

Основні властивості подвійного інтеграла

$$1) \iint_D C \cdot f(x, y) dx dy = C \iint_D f(x, y) dx dy$$

$$2) \iint_D (f(x, y) \pm g(x, y)) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy \pm \iint_D g(x, y) dx dy$$

$$3) f(x, y) \geq 0 \quad \iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$$

$$4) f(x, y) \geq g(x, y) \quad \iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy$$

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

Постановка задачі: Плоска однорідна пластина з поверхневою густиною $\mu(x, y) = 1$ має форму фігури, що обмежена заданими лініями (дивись номер варіанта). Необхідно:

- 1) обчислити площу заданої пластини та зробити рисунок.
- 2) визначити координати центра мас заданої однорідної пластини та позначити на рисунку;
- 3) знайти об'єм тіла, утвореного обертанням заданої пластини навколо координатної осі Ox та зробити рисунок.

Варіанти плоскої фігури, обмеженої лініями, які задані наступними рівняннями:

Варіант №	Рівняння ліній, що обмежують плоску фігуру
Варіант 1.	$y = x^2; y = \sqrt{x}$
Варіант 2.	$y = x^3; y = 2x^2$
Варіант 3.	$y = x^2; y = 6 - x$
Варіант 4.	$y = x^3; y = \frac{x^3}{3}; x = 1$
Варіант 5.	$y = x^2; y = 9$
Варіант 6.	$y = x^2; y = \frac{x^2}{2}; x = 1$
Варіант 7.	$y = x^2; y = 3x^2; x = 1$
Варіант 8.	$y = x^2 + 1; y = 2$
Варіант 9.	$y = \frac{x^2}{2}; y = \frac{x^3}{3}; x = 1$
Варіант 10.	$y = \sqrt{x}; y = x$

Варіант 11.	$y = \sqrt{x}; y = x^3$
Варіант 12.	$y = x^2; y = \frac{x^2}{2}; x = 1$
Варіант 13.	$y = x; y = \frac{x^3}{4}; x = 1$
Варіант 14.	$y = \frac{x^2}{2}; y = \frac{x^2}{3}; x = 1$
Варіант 15.	$y = x^2; y = 2x + 3$
Варіант 16.	$y = x^2; y = 3x^2; x = 1$
Варіант 17.	$y = x^2; y = 1$
Варіант 18.	$y = x^2; y = 2 - x$
Варіант 19.	$y = x^2; y = 2 + x$
Варіант 20.	$y = x^2; y = 4$
Варіант 21.	$y = x^2 + 1; y = 2x + 4$
Варіант 22.	$y = 0; y = x^2 - x$
Варіант 23.	$y = x^2; y = 3 - 2x$
Варіант 24.	$y = x^2 + 1; y = 3 - x$
Варіант 25.	$y = x^2 + 1; y = 2x; x = 0$
Варіант 26.	$y = x^2 + x; -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$
Варіант 27.	$y = x^2; y = x + 6$
Варіант 28.	$y = x^2 + 1; y = 3 + x$
Варіант 29.	$y = \frac{4}{x}; y = 0; 1 \leq x \leq 5$
Варіант 30.	$y = x^2 - 4x; 1 \leq x \leq 3$

Література

1. Басманов О.Є., Кириченко І.К., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Вища математика. – Харків: АПБУ, 2003. – 136 с.
2. Білоусова Л.І. Горонескуль М.М. Курс вищої математики у середовищі Maple : Навчальний посібник. – Харків: УЦЗУ, КП «Міська друкарня», 2009. – 412с.
3. Горонескуль М.М. Основи вищої математики. Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів. – Харків.: НУЦЗУ, 2015- 125 с.
4. Мунтян В.К., Говаленков С.В. Вища математика. Методичні вказівки для самостійних занять. – Харків: НУЦЗУ, 2015. – 213 с.
5. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Середа О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. – Частина 2. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 440 с.

Навчальне видання

**Методичні рекомендації
та варіанти завдань до виконання
розрахунково-графічної роботи
«Застосування визначених і подвійних інтегралів
до розв’язання прикладних задач»
з навчальної дисципліни «Вища математика»
для здобувачів вищої освіти
за освітньо-професійними програмами
«Пожежна безпека», «Цивільний захист» та «Охорона праці»**

Підписано до друку ____ 2024. Формат 60х84 1/16.

Умовн.-друк. арк. 2,0.

Вид. № ____/____.

Сектор редакційно-видавничої діяльності
Національного університету цивільного захисту України
18034 м. Черкаси, вул. Онопрієнка, 8,
www.nuczu.edu.ua