

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ТА БЕЗПЕКИ НАСЕЛЕННЯ

Кафедра фізико-математичних дисциплін

**Методичні рекомендації
та варіанти завдань до виконання
розрахунково-графічної роботи
«Дослідження функції однієї змінної»
з навчальної дисципліни «Вища математика»
для здобувачів вищої освіти
за освітньо-професійними програмами
«Пожежна безпека», «Цивільний захист» та «Охорона праці»**

Черкаси 2025

Рекомендовано до друку кафедрою
фізико-математичних дисциплін
(протокол від 23.09.2024 р. № 1)
та вченої радою факультету управління
та безпеки населення НУЦЗ України.
(протокол від 28.10.2024 р. № 6)

Укладач: М. М. Горонескуль

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор **Ю.І. Першина**,
завідувач кафедри вищої математики Національного технічного
університету «ХПІ»;
кандидат фізико-математичних наук, доцент **В.Г. Борисенко**,
доцент кафедри фізико-математичних дисциплін НУЦЗ України.

Методичні рекомендації та варіанти завдань до виконання
розрахунково-графічної роботи «Дослідження функції однієї змінної» з
навчальної дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти за
освітньо-професійними програмами «Пожежна безпека», «Цивільний
захист» та «Охорона праці» / Укладач : М. М. Горонескуль. – Черкаси:
НУЦЗУ, 2025. – 31 с.

Методичні рекомендації та варіанти завдань до виконання розрахунково-
графічної роботи «Дослідження функції однієї змінної» з навчальної дисципліни
«Вища математика» для здобувачів вищої освіти за освітньо-професійними
програмами «Пожежна безпека», «Цивільний захист» та «Охорона праці»
визначають порядок виконання й оформлення розрахунково-графічної роботи, а
також вимоги до її структури та змісту.

ЗМІСТ

Порядок виконання і оформлення робіт.....	5
Методичні рекомендації до проведення дослідження функції однієї змінної.....	6
Загальна схема дослідження функції.....	6
Теоретичні відомості щодо кожного пункту загальної схеми:	7
1. Область визначення функції.....	7
2. Парність та непарність функції.....	8
3. Періодичність функції.....	9
4. Точки перетину функції з осями координат.....	9
5. Проміжки знакосталості функції.	10
6. Вертикальні асимптоти.	11
7. Поведінка функції при $x \rightarrow \pm\infty$, рівняння похилої (горизонтальної) асимптоти.....	12
8. Визначення інтервалів монотонності і екстремумів функції за допомогою її першої похідної.....	14
9. Визначення інтервалів опуклості (вгнутості) і точок перегину функції за допомогою її другої похідної.....	18
10. Алгоритм дослідження функції $y = f(x)$ на монотонність, екстремуми 1-го і 2-го роду, інтервали опуклості (вгнутості)	20
Приклад виконання завдання відповідно до пунктів загальної схеми дослідження функції однієї змінної.....	21
Приклад виконання п. 1 загальної схеми дослідження функції.....	21
Приклад виконання п. 2 загальної схеми дослідження функції.....	21
Приклад виконання п. 3 загальної схеми дослідження функції.....	21
Приклад виконання п. 4 загальної схеми дослідження функції.....	22
Приклад виконання п. 5 загальної схеми дослідження функції.....	22
Приклад виконання п. 6 загальної схеми дослідження функції.....	23

Приклад виконання п. 7 загальної схеми дослідження функції.....	24
Приклад виконання п. 8 загальної схеми дослідження функції.....	24
Приклад виконання п. 9 загальної схеми дослідження функції.....	26
Приклад побудови графіка функції, що досліджувалась.....	27
Варіанти завдань.....	28
Література.....	30

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ І ОФОРМЛЕННЯ РОБОТИ

Розрахунково-графічну роботу (РГР) необхідно виконувати в окремому зошиті або на аркушах формату А-4. Для зауважень викладача необхідно залишити поля 4-6 см завширшки. РГР слід виконувати строго за варіантом, який видано викладачем. РГР, яка виконана не за своїм варіантом, не перевіряється і не зараховується.

Завдання необхідно розв'язувати відповідно до пунктів загальної схеми дослідження функції з дотриманням методичних рекомендацій до їх виконання. Умови завдань записувати повністю, після чого наводити докладний процес розв'язання. Якщо до даного завдання є обов'язковим рисунок або попередній ескіз, то його слід розташувати перед розв'язком і робити на ньому усі необхідні позначення. Наприкінці зробити повний рисунок графіка функції, що досліджувалась.

Здобувач зобов'язаний пройти співбесіду з викладачем кафедри.

Здобувачі, які не виконали запропоновані завдання і не пройшли співбесіду з викладачем до екзамену (заліку) не будуть допущені.

Оформлювати та підписувати роботу треба за зразком, наведеним нижче.

Роботи здобувачів, що не мають титульного аркуша з наявністю прізвища здобувача не перевіряються.

Приклад титульного аркуша

Розрахунково-графічна робота
«Дослідження функції однієї змінної»
з дисципліни «Вища математика»
здобувача вищої освіти групи ОП-25-3
Петренка Івана Івановича
Варіант № 0

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ПРОВЕДЕННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

Загальна схема дослідження функції:

- 1 Знайти область визначення функції.
- 2 Перевірити функцію на парність (непарність)
- 3 Перевірити функцію на періодичність
- 4 Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
- 5 Визначити проміжки знакосталості функції.
- 6 Дослідити поведінку функції у точках її розриву, визначити вертикальні асимптоти, зробити ескіз графіка поведінки функції в околі точки розриву.
- 7 Дослідити поведінку функції при $x \rightarrow \pm\infty$, знайти рівняння похилої (горизонтальної) асимптоти або обґрунтувати її відсутність.
- 8 Виконати дослідження функції за допомогою першої похідної, визначити інтервали монотонності функції та її локальні екстремуми.
- 9 Виконати дослідження функції за допомогою другої похідної, визначити інтервали вгнутості (опуклості) функції та її точки перегину.
- 10 Побудувати графік функції.

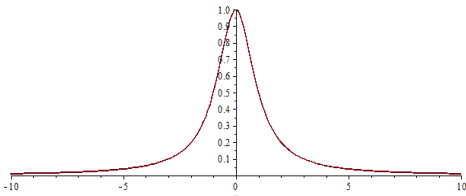
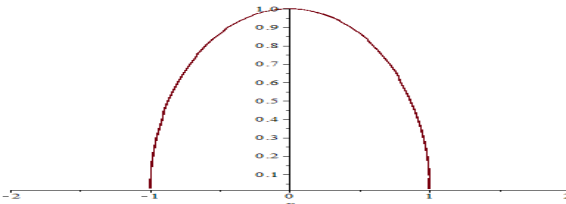
Побудову графіка функції рекомендується виконувати поступово, переходячи від пункту до пункту схеми, з нанесенням знайдених у кожному пункті характеристик

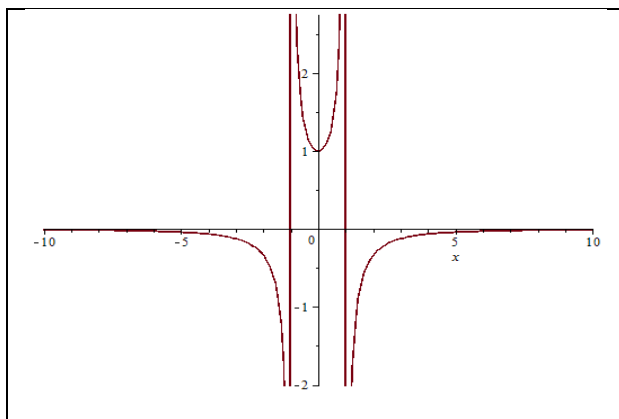
ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ЩОДО КОЖНОГО ПУНКТУ ЗАГАЛЬНОЇ СХЕМИ

1. Область визначення функції – це множина всіх значень змінної x , при яких функція має зміст. Нижче наведені умови щодо області визначення алгебраїчних виразів від деяких елементарних функцій дійсного аргументу:

Функція $y = f(x)$	Область визначення, множина $D(f)$
$f(x) = (h(x))^n, n \in \mathbb{N}$	$h(x) \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{h(x)}$	$h(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt{h(x)}$	$h(x) \geq 0$
$f(x) = a^{h(x)}, a > 0$	$h(x) \in \mathbb{R}$
$f(x) = \log_a h(x)$	$h(x) > 0$
$f(x) = \log_{h(x)} a$	$h(x) > 0, h(x) \neq 1$
$f(x) = \operatorname{tg} h(x)$	$h(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \operatorname{ctg} h(x)$	$h(x) \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \arcsin h(x)$	$-1 \leq h(x) \leq 1$
$f(x) = \arccos h(x)$	$-1 \leq h(x) \leq 1$

Приклади:

	1) $y = \frac{1}{1+x^2};$ $D(f) = (-\infty; +\infty)$
	2) $y = \sqrt{1-x^2};$ $1-x^2 \geq 0; \quad D(f) = [-1; 1]$

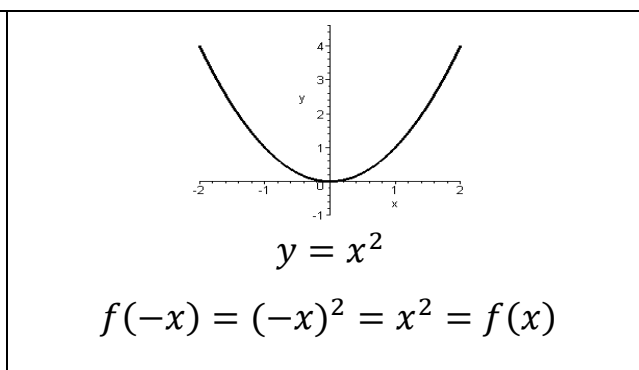
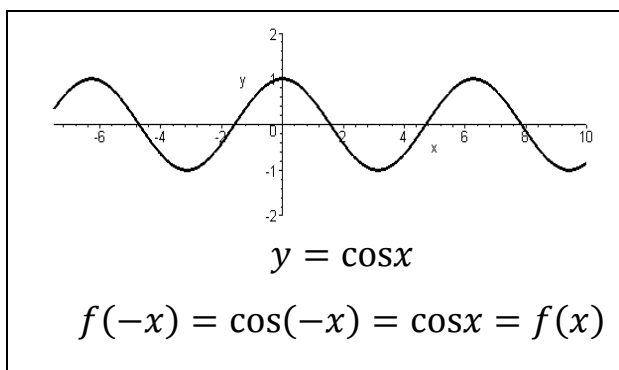


$$3) y = \frac{1}{1-x^2}; \quad 1-x^2 \neq 0$$

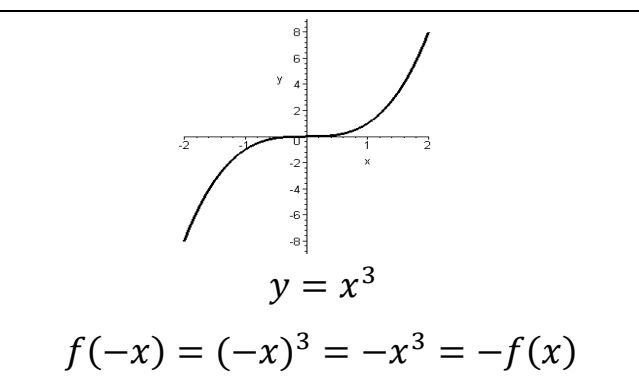
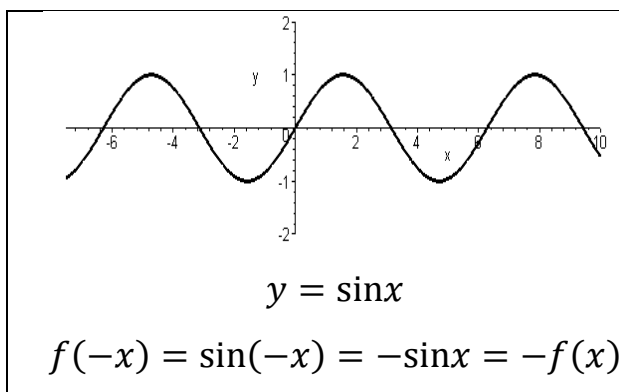
$$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$$

2. Парність та непарність функції.

2.1. Функція парна, якщо виконується умова: $f(-x) = f(x)$. Графік парної функції є симетричним відносно координатної осі Оу. Приклади:



2.2. Функція непарна, якщо виконується умова: $f(-x) = -f(x)$. Графік непарної функції є симетричним відносно початку координат. Приклади:

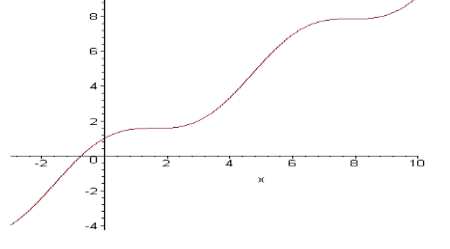
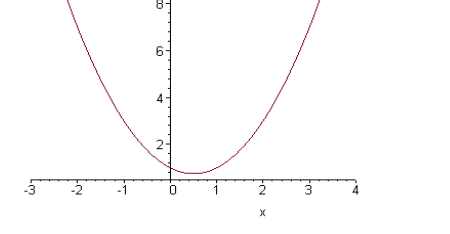


2.3. Функція є ні парною та ні непарною, якщо

$$f(-x) \neq f(x) \text{ та } f(-x) \neq -f(x).$$

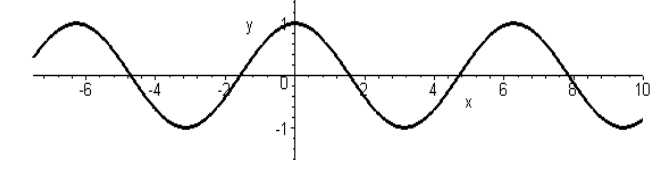
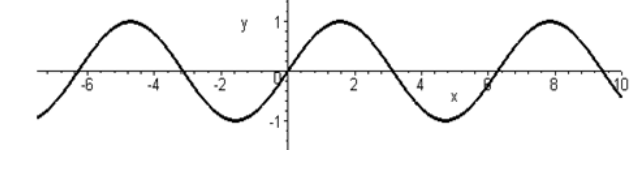
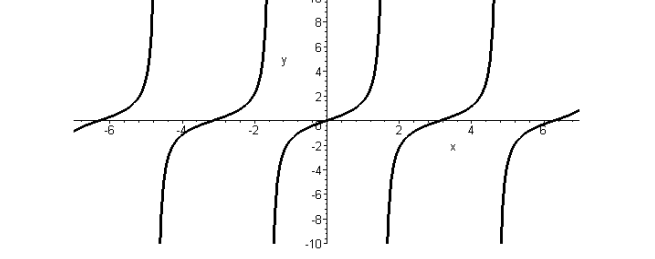
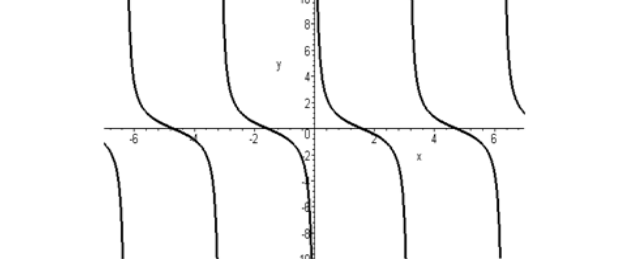
У цьому випадку графік функції має загальний вигляд.

Приклади:

	$y = x + \cos x$ $f(-x) = (-x) + \cos(-x) = -x + \cos x \neq f(x)$ $f(-x) = -x + \cos x = -(x - \cos x) \neq -f(x)$
	$y = x^2 - x + 1$ $f(-x) = (-x)^2 - (-x) + 1 = x^2 + x + 1 \neq f(x)$ $f(-x) = x^2 + x + 1 = -(-x^2 - x - 1) \neq -f(x)$

3. Функція є періодичною, якщо $f(x + T) = f(x)$.

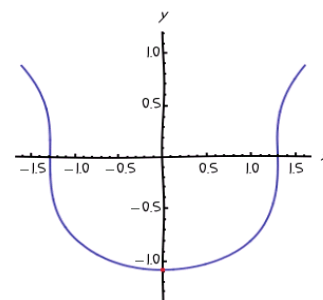
Приклади:

 $y = \cos x; \quad T = 2\pi$	 $y = \sin x; \quad T = 2\pi$
 $y = \operatorname{tg} x; \quad T = \pi$	 $y = \operatorname{ctg} x; \quad T = \pi$

4. Точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з осями координат.

4.1. Перетин з віссю Ox ($y = 0$): необхідно розв'язати рівняння $f(x) = 0$, та звідси визначити $x = a$. Одержимо т. $A(a; 0)$.

4.2. Перетин з віссю Oy ($x = 0$): необхідно розв'язати рівняння $y = f(0)$, та звідси визначити $y = b$. Одержимо т. $B(0; b)$



5. Проміжки знакосталості функції.

5.1. Визначити проміжки, де $f(x) > 0$, а отже, графік функції розташовується вище осі Ox .

5.2. Визначити проміжки, де $f(x) < 0$, а отже, графік функції розташовується нижче осі Ox .

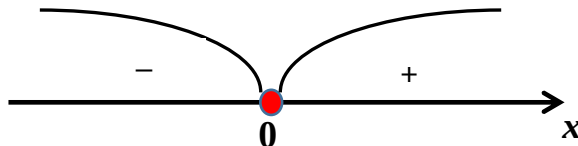
Приклад 1. Визначити проміжки знакосталості функції $y = x^3$.

Крок 1. Визначити нулі функції, розв'язавши рівняння $f(x) = 0$.

Маємо, $x^3 = 0$. Отже, $x = 0$.

Крок 2. Позначити на числовій прямій нулі функції і визначити інтервали на яких:

- 1) $f(x) > 0$, а отже, графік функції буде розташовуватись вище осі Ox ,
- 2) $f(x) < 0$, а отже, графік функції буде розташовуватись нижче осі Ox .

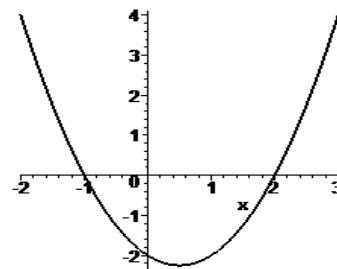


Функція $f(x) = x^3 > 0$, якщо $x > 0$ і графік функції буде розташовуватись вище осі Ox (дивись наведений графік функції).

А також $f(x) = x^3 < 0$, якщо $x < 0$ і графік функції буде розташовуватись нижче осі Ox (дивись наведений графік функції).

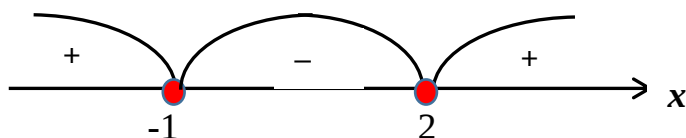
Приклад 2. Визначимо проміжки знакосталості функції $y = x^2 - x - 2$.

Крок 1. Визначити нулі функції, розв'язавши рівняння $f(x) = 0$, тобто необхідно розв'язати рівняння $x^2 - x - 2 = 0$. За теоремою Вієта $x_1 = -1$ та $x_2 = 2$.



Крок 2. Позначити на числовій прямій нулі функції і визначити інтервали на яких:

- 1) $f(x) > 0$, отже, графік функції буде розташовуватись вище осі Ox ,
- 2) $f(x) < 0$, отже, графік функції буде розташовуватись нижче осі Ox .



Висновок:

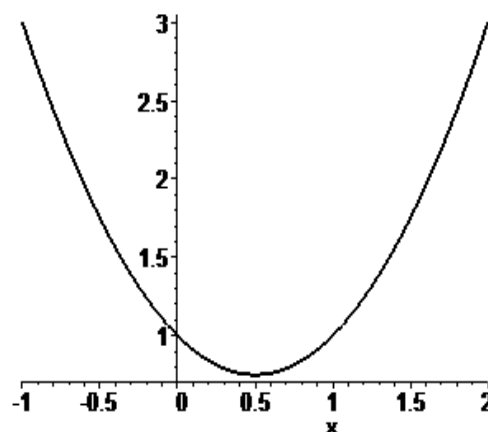
- 1) при $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ маємо, що $f(x) > 0$ – графік функції розташовується вище осі Ox (дивись наведений графік функції);
- 2) при $x \in (-1; 2)$ маємо, що $f(x) < 0$ – графік функції розташовується нижче осі Ox (дивись наведений графік функції).

Приклад 3. Визначимо проміжки знакосталості функції $y = x^2 - x + 1$.

Для заданої функції $y = x^2 - x + 1$ визначимо повний квадрат.

Маємо $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ для $x \in (-\infty; +\infty)$.

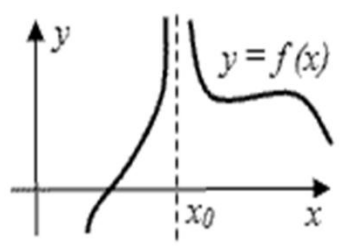
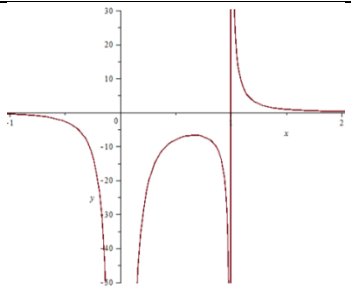
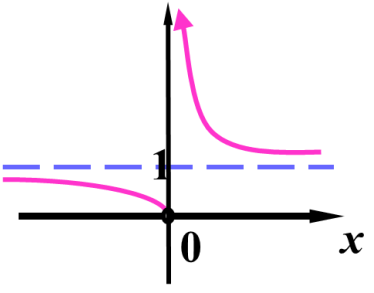
Отже, графік функції розташовується вище осі Ox (дивись наведений графік функції).



6. Вертикальні асимптоти.

Пряма $x = x_0$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$, якщо хоча б одна з границь $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ або $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ нескінченна. Звідси випливає, що вертикальні асимптоти у графіка функції $y = f(x)$ можуть бути тільки за наявності граничних точок області визначення функції або точок розриву.

Вертикальні асимптоти можуть бути двобічними та однобічними:

двобічні		однобічна
		

Зауваження. Неперервні (на всій числовій осі Ox) функції не мають вертикальних асимптот.

7. Визначення поведінки функції при $x \rightarrow \pm\infty$, рівняння похилої (горизонтальної) асимптоти.

7.1. Визначити границі $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

7.2. Пряма L називається асимптотою графіка функції $y = f(x)$, якщо відстань ρ від т. M графіка функції до прямої L прямує до нуля при віддаленні абсциси т. M у нескінченність ($x \rightarrow -\infty$ або $x \rightarrow +\infty$).

Рівняння похилої асимптоти має вигляд:

$$y = kx + b,$$

де

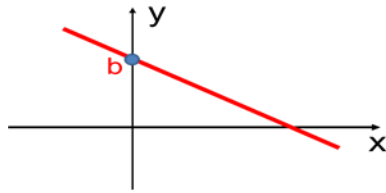
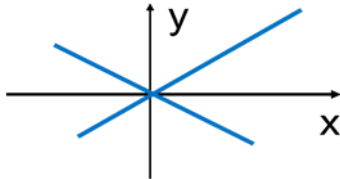
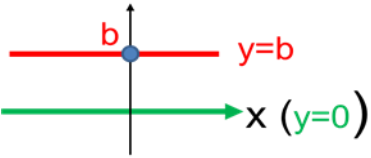
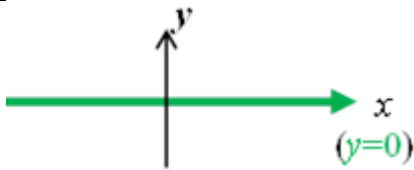
$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ та}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$

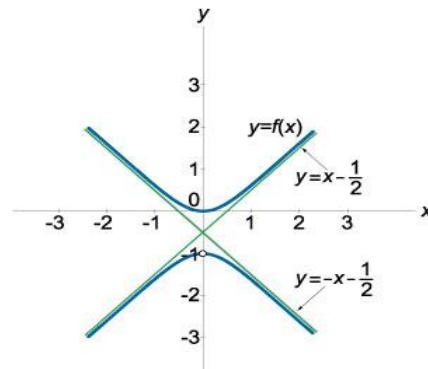
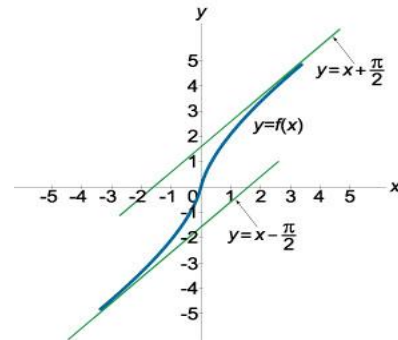
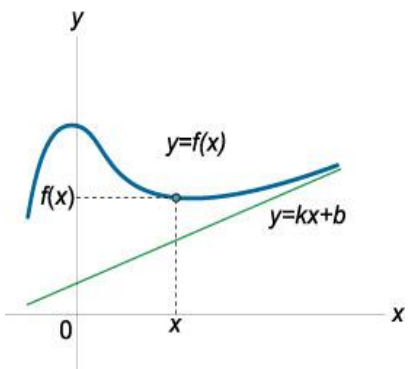
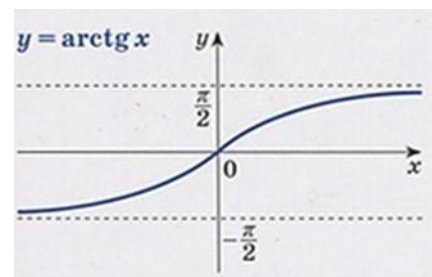
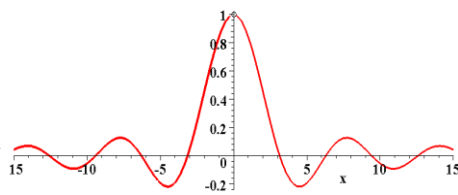
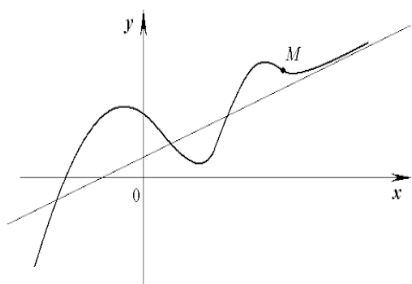
При цьому вказані границі можуть бути різними при $x \rightarrow +\infty$ (для правобічної похилої асимптоти) і при $x \rightarrow -\infty$ (для лівобічної похилої асимптоти).

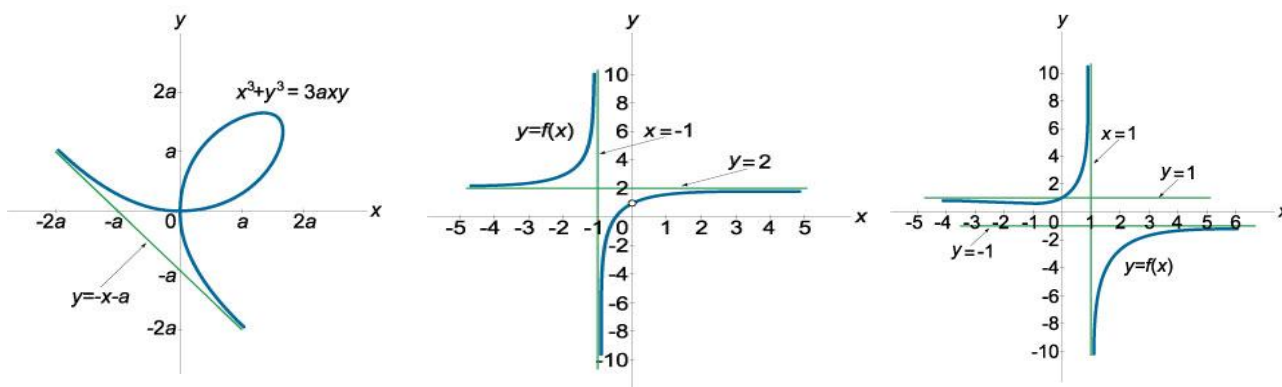
При $k = 0$ похила асимптота перетворюється у горизонтальну та має рівняння $y = b$. Отже, горизонтальна асимптота є частинним випадком похилої.

Вигляд похилої (горизонтальної) асимптоти

Рівняння асимптоти	Коефіцієнти рівняння асимптоти	Вигляд асимптоти
Похила асимптота $y = kx + b$	де $k \neq 0$ та $k \neq \infty$, а також $b \neq 0$ та $b \neq \infty$	
Похила асимптота $y = kx$	де $k \neq 0$ та $k \neq \infty$, а також $b = 0$	
Горизонтальна асимптота $y = b$	де $b \neq 0$ та $b \neq \infty$ а також $k = 0$	
Горизонтальною асимптотою є вісь Ox $y = 0$	$k = 0$ та $b = 0$	

Приклади графіків функцій, що мають асимптоти





8. Визначення інтервалів монотонності і екстремумів функції за допомогою її першої похідної.

Інтервали *зростання* та *спадання* функції називаються інтервалами *монотонності*. Неперервна на інтервалі $(a; b)$ функція $y = f(x)$ є:

1) монотонно зростаючою, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тобто для всіх x_1 та x_2 , що належать інтервалу $(a; b)$ із умови $x_1 < x_2$ випливає, що $f(x_1) < f(x_2)$;

2) монотонно спадною, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, тобто для всіх x_1 та x_2 , що належать інтервалу $(a; b)$ із умови $x_1 < x_2$ випливає, що $f(x_1) > f(x_2)$.

монотонно зростаюча функція: якщо $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$;	монотонно спадна функція: якщо $x_1 < x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$.

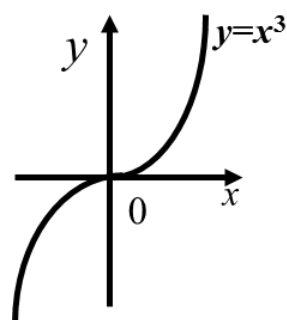
Умови зростання і спадання функцій.

1. Нехай функція $y = f(x)$ визначена, неперервна і має скінчену похідну $f'(x)$ на інтервалі $(a; b)$. Для того щоб функція $y = f(x)$ була зростаючою на

інтервалі $(a; b)$, необхідно і достатньо, щоб $f'(x) \geq 0$ для всіх внутрішніх точок інтервалу. На *інтервалах зростання* дотична до графіка функції $y = f(x)$ утворює з додатною піввіссю Ox *гострий кут*.

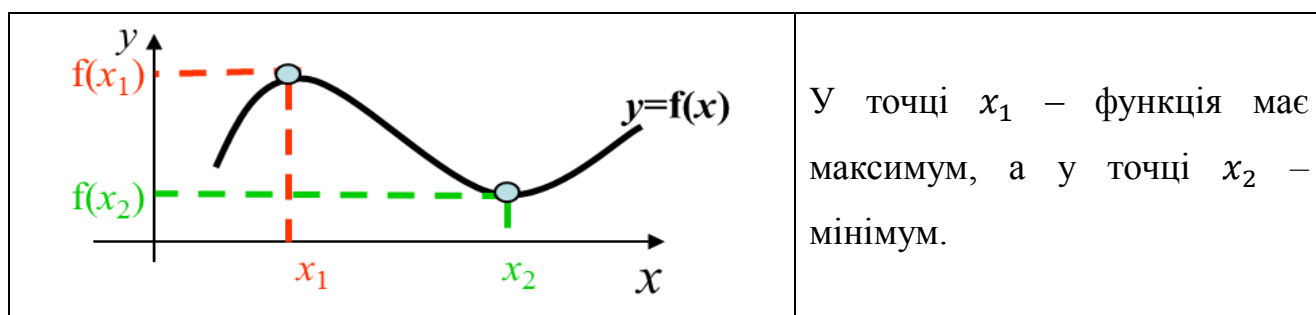
2. Нехай функція $y = f(x)$ визначена, неперервна і має скінчену похідну $f'(x)$ на інтервалі $(a; b)$. Для того щоб функція $y = f(x)$ була спадна на інтервалі $(a; b)$, необхідно і достатньо, щоб $f'(x) \leq 0$ для всіх внутрішніх точок інтервалу. На *інтервалах спадання* дотична до графіка функції $y = f(x)$ утворює з додатною піввіссю Ox *тупий кут*.

Функція $f'(x)$ може дорівнювати нулю тільки в скінченій кількості ізольованих точок інтервалу. Наприклад, $y = x^3$ є зростаючою на всій числовій осі, оскільки $y' = 3x^2 \geq 0$, але $y' = 3x^2$ дорівнює нулю тільки при $x_0 = 0$.



Локальний екстремум функції. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 . Функція $y = f(x)$ має в точці x_0 *локальний максимум* (*локальний мінімум*), якщо існує такий окіл точки x_0 , в якому при $x \neq x_0$ виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ (відповідно $f(x) > f(x_0)$).

Локальний максимум і локальний мінімум об'єднуються загальною назвою *локальний екстремум* (або просто *екстремум*).



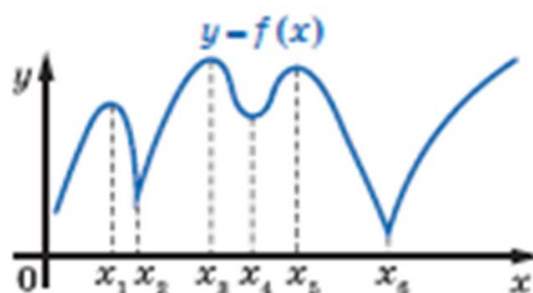
Необхідна умова екстремуму. Якщо функція $f(x)$ диференційована в точці x_0 і має в цій точці *екстремум*, то $f'(x_0) = 0$.

Точки, в яких похідна функція $f(x)$ дорівнює нулю, називаються *стаціонарними* точками цієї функції.

Наслідок. Неперервна функція може мати екстремум у тих точках, де похідна функції дорівнює нулю, нескінченна або не існує зовсім. Такі точки називають *критичними точками*.

Необхідна умова існування екстремуму в загальному випадку може бути сформульована наступним чином: якщо функція $f(x)$ має екстремум в точці x_0 , то або вона диференційована в цій точці і її похідна $f'(x_0) = 0$, або функція не диференційована в точці x_0 .

Якщо екстремум функції досягається в точці, де похідна нескінченна або не існує, то його часто називають *гострим екстремумом* (точки x_2, x_6) на відміну від *гладкого екстремуму* (точки x_1, x_3, x_4, x_5), який досягається в стаціонарній точці функції.



Перша достатня умова існування екстремуму. Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в деякому околі *критичної* точки x_0 (за винятком, можливо, самої точки x_0). Тоді:

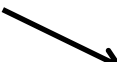
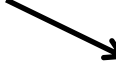
а) якщо при переході зліва направо через точку x_0 (в бік зростання x) похідна $f'(x)$ змінює знак з «плюса» на «мінус», то в точці x_0 функція $y = f(x)$ має *локальний максимум* (*max*);

б) якщо при переході зліва направо через точку x_0 (в бік зростання x) похідна $f'(x)$ змінює знак з «мінуса» на «плюс», то в точці x_0 функція $y = f(x)$ має *локальний мінімум* (*min*);

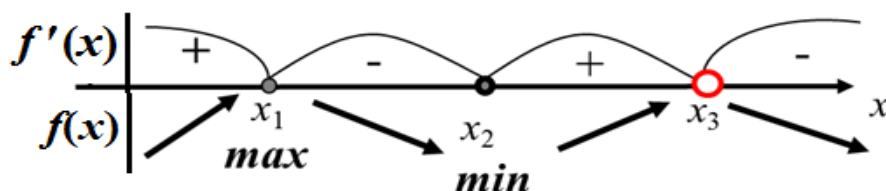
в) якщо при переході зліва направо через точку x_0 (в бік зростання x) похідна $f'(x)$ не змінює знак, то в точці x_0 функція $y = f(x)$ не має екстремуму.

При цьому необхідно мати на увазі, що умови **а)-в)** повинні виконуватися у всіх значеннях x , достатньо близьких до x_0 , тобто у всіх точках деякого достатньо малого околу критичної точки x_0 .

Приклад подання результатів дослідження функції на монотонність і екстремуми у вигляді таблиці

x	$(-\infty; x_1)$	x_1	$(x_1; x_2)$	x_2	$(x_2; x_3)$	x_3	$(x_3; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	$\nexists$	+	$\nexists$	-
$f(x)$		$y(x_1)$		$y(x_2)$		$\nexists$	
		max		min		точка розриву	

або у вигляді схеми:



Друга достатня умова існування екстремуму. Нехай функція $y = f(x)$ n разів диференційована в точці x_0 , до того ж всі її похідні до $(n - 1)$ порядку включно в цій точці дорівнюють нулю, тобто $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тоді, якщо n парне, то в точці x_0 функція має екстремум, до того ж: при $f^{(n)}(x_0) < 0$ маємо $f(x_0) = f_{max}$, а при $f^{(n)}(x_0) > 0$ маємо $f(x_0) = f_{min}$.

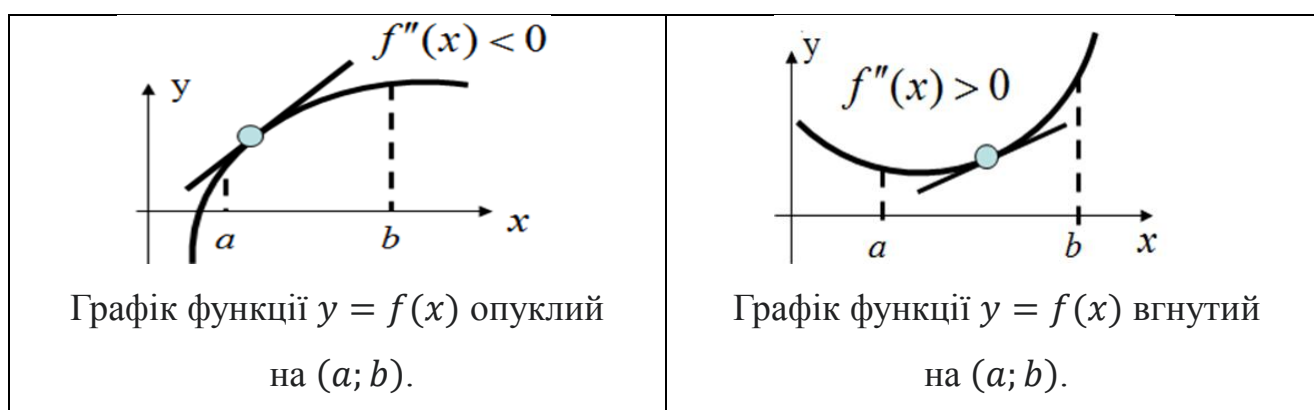
Наслідок. Якщо x_0 є стаціонарною точкою функції $f(x)$, тобто $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0)$ існує, кінцева і не дорівнює нулю, то при $f''(x_0) < 0$

функція $y = f(x)$ має в точці x_0 локальний максимум, а при $f''(x_0) > 0$ функція $y = f(x)$ має в точці x_0 локальний мінімум.

9. Визначення інтервалів опуклості (вгнутості) і точок перегину функції за допомогою її другої похідної.

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ диференційована на інтервалі $(a; b)$. Графік функції $y = f(x)$ називається *опуклим* на інтервалі $(a; b)$, якщо він розташований нижче дотичної, проведеної в будь-якій точці цього інтервалу. Графік функції $y = f(x)$ називається *вгнутим* на інтервалі $(a; b)$, якщо він розташований вище дотичної, проведеної в будь-якій точці цього інтервалу.

Точка $(x_0, f(x_0))$ графіка функції $y = f(x)$, яка відділяє його опуклу частину від вгнутої, називається *точкою перегину*.



Достатня умова опуклості (вгнутості) графіка функції. Нехай функція $f(x)$ двічі диференційована на інтервалі $(a; b)$. Тоді,:

- 1) $f''(x_0) < 0$ на $(a; b)$, то графік функції $y = f(x)$ є опуклим на $(a; b)$;
- 2) $f''(x_0) > 0$ на $(a; b)$, то графік функції $y = f(x)$ є вгнутим на $(a; b)$.

Необхідна умова існування точки перегину x_0 функції $f(x)$, яка має неперервну другу похідну. Якщо графік функції $y = f(x)$ має перегин в точці x_0 і, якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 неперервну другу похідну, то $f''(x_0) = 0$.

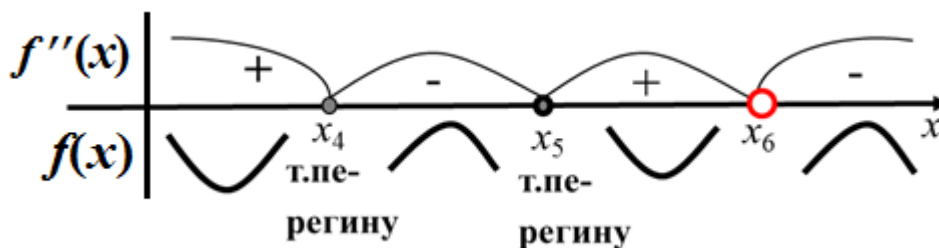
Наслідок. Неперервна функція може мати перегин у тих точках, де друга похідна функції $y = f(x)$ дорівнює нулю, нескінченна або не існує зовсім. Такі точки називають *критичними точками 2-го роду*.

Достатня умова існування точки перегину функції. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0 , двічі диференційована, принаймні у проколотому околі $\overset{\circ}{U}(x_0)$ цієї точки, і друга похідна $f''(x)$ цієї функції змінює знак при переході аргументу x через значення x_0 , то x_0 є точкою перегину функції $f(x)$.

Приклад подання результатів дослідження функції
на опуклість (вгнутість) і точки перегину у вигляді таблиці:

x	$(-\infty; x_4)$	x_4	$(x_4; x_5)$	x_5	$(x_5; x_6)$	x_6	$(x_6; +\infty)$
$f''(x)$	+	0	–	$\nexists$	+	$\nexists$	–
$f(x)$		$y(x_4)$		$y(x_5)$		$\nexists$	
		т.пере- гину		т.пере- гину		т.роз- риву	

або у вигляді схеми:



10. Алгоритм дослідження функції $y = f(x)$ на монотонність, екстремуми 1-го і 2-го роду, інтервали опуклості (вгнутості):

1. Знайти похідну функції $f'(x)$ та визначити критичні точки 1-го роду.

Для цього:

а) обчислити дійсні корені рівняння $f'(x) = 0$;

б) визначити значення x , при яких похідна $f'(x)$ не існує (має розрив);

2. Дослідити знак похідної $f'(x)$ зліва і справа від критичної точки та зробити висновок щодо наявності (відсутності) екстремуму, визначити інтервали монотонності функції.

3. Знайти другу похідну функції $f''(x)$ та визначити критичні точки. Для цього:

а) обчислити дійсні корені рівняння $f''(x) = 0$;

б) знайти значення x , при яких друга похідна $f''(x)$ не існує (має розрив).

4. Дослідити знак другої похідної зліва і справа від критичної точки та зробити висновок щодо наявності (відсутності) точки перегину, визначити інтервали опуклості (вгнутості) функції.

5. Обчислити значення функції $f(x)$ у кожній точці екстремуму та перегину.

**ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ
ВІДПОВІДНО ДО ПУНКТІВ ЗАГАЛЬНОЇ СХЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ
ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ**

Завдання: дослідити та побудувати графік функції:

$$y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$$

Розв'язання.

1. Знайти область визначення функції.

Оскільки знаменник $x - 2 \neq 0$, то $x \neq 2$, тому область визначення функції:

$$D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty).$$

Отже, у точці $x = 2$ функція має розрив.

Дослідження поведінки функції в точці її розриву виконаємо нижче в пункті 6.

2. Перевірити функцію на парність (непарність).

Оскільки

$$f(-x) = \frac{(-x+1)^2}{-x-2} \neq f(x)$$

та

$$f(-x) = \frac{(-x+1)^2}{-x-2} = -\frac{(1-x)^2}{x+2} \neq -f(x),$$

то задана функція ні парна та ні непарна. Графік функції має загальний вигляд.

3. Перевірити функцію на періодичність.

Задана функція неперіодична, оскільки не існує такого числа $T > 0$, що

$$f(x \pm T) = f(x) \text{ для } \forall x \in D(f).$$

4. Визначити точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з осями координат.

4.1) Для визначення точок перетину графіка функції з віссю Ox (нулі функції), де $y = 0$ необхідно розв'язати рівняння $f(x) = 0$. Отже, для заданої функції необхідно розв'язати рівняння:

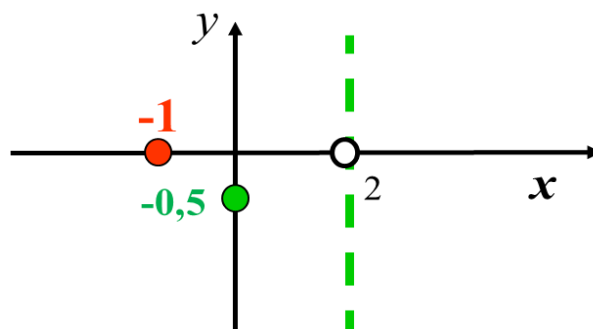
$$\frac{(x+1)^2}{x-2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Оскільки чисельник $(x+1)^2 = 0$ коли $x = -1$, то точка **$A(-1; 0)$** є точкою перетину графіка функції з віссю Ox .

4.2) Для визначення точок перетину графіка функції з віссю Oy , де $x = 0$ необхідно визначити $y = f(0)$. Для цього у вихідний вираз заданої функції у праву її частині замість змінної x необхідно підставити значення 0, що належить $D(f)$.

Отже, при $x=0$ маємо

$$y = \frac{(x+1)^2}{x-2} \Big|_{x=0} = \frac{(0+1)^2}{0-2} = -\frac{1}{2}.$$



Одержали т. **$B(0; -0,5)$** – точку перетину графіка функції з віссю Oy .

5. Визначити проміжки знакосталості функції.

Крок 1. В пункті 4.1. вже були визначені нулі функції, де $f(x) = 0$.

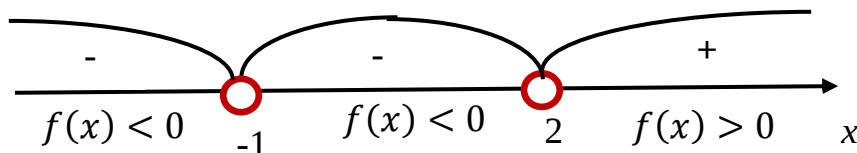
А саме:

$$\frac{(x+1)^2}{x-2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Крок 2. Позначити на числовій прямій нулі функції, точки, в яких функція має розрив, і визначити інтервали на яких:

1) $f(x) > 0$, то графік функції буде розташовуватись вище осі Ox ,

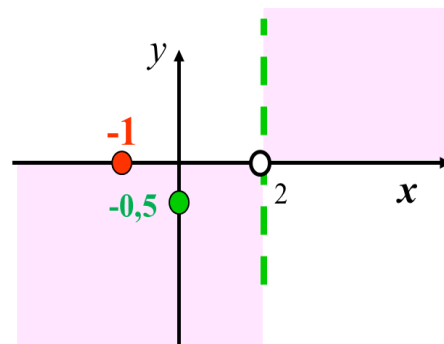
2) $f(x) < 0$, то графік функції буде розташовуватись нижче осі Ox .



5.1) Оскільки чисельник $(x + 1)^2 > 0$ для $\forall x \in D(f)$ (тобто за будь якого значення аргументу функції з області її визначення), то

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-2} > 0, \text{ якщо } x > 2.$$

Отже, при $x \in (2; +\infty)$ графік заданої функції буде розташований вище координатної осі Ox .



5.2) Оскільки чисельник $(x + 1)^2 > 0$ для $\forall x \in D(f)$ (за будь якого значення аргументу функції з області її визначення), то $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-2} < 0$, якщо $x < 2$.

Отже, при $x \in (-\infty; 2)$ графік заданої функції буде розташований нижче координатної осі Ox .

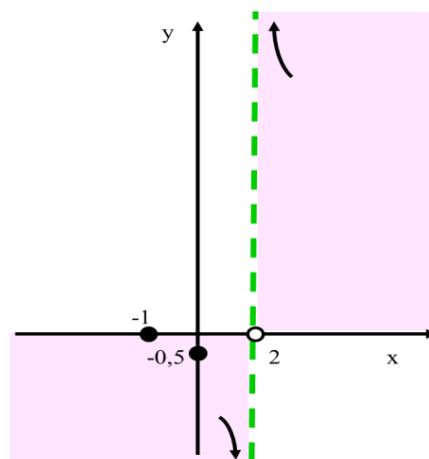
6. Дослідити поведінку функції у точках її розриву, визначити вертикальні асимптоти.

Визначимо поведінку функції в околі точки розриву $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{(x+1)^2}{x-2} = -\infty$$

та

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(x+1)^2}{x-2} = +\infty$$



Отже, пряма $x = 2$ – вертикальна асимптота.

7. Визначити поведінку функції при $x \rightarrow \pm\infty$ та похилу (горизонтальну) асимптоту.

7.1. Визначити поведінку функції при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x-2} = \pm\infty$$

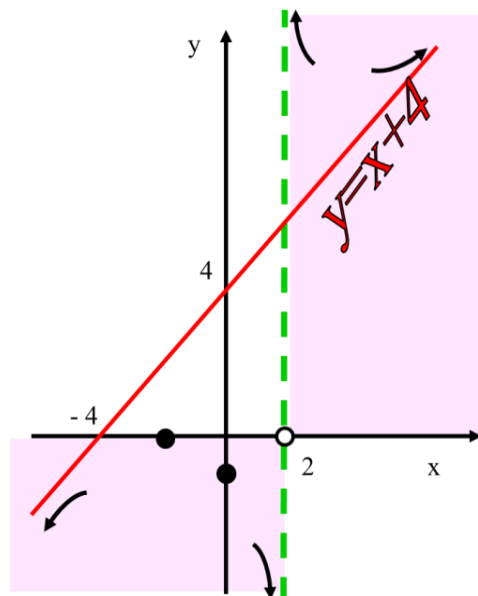
Отже, якщо $x \rightarrow +\infty$, то і $f(x) \rightarrow +\infty$,

а якщо $x \rightarrow -\infty$, то і $f(x) \rightarrow -\infty$.

7.2. Похилу асимптоту будемо шукати у вигляді $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)^2}{(x-2)x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{(x+1)^2}{x-2} - x \right] =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x+1}{x-2} = 4$$



Отже, $y = x + 4$ – похила асимптота.

8. Виконати дослідження функції за допомогою першої похідної, визначити інтервали монотонності функції та її локальні екстремуми.

8.1. Визначимо першу похідну заданої функції $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$:

$$f'(x) = \left(\frac{(x+1)^2}{x-2} \right)' = \frac{((x+1)^2)'(x-2) - (x+1)^2(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}.$$

Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$. Отже, функція $f(x)$ неперервна в кожній точці своєї області визначення.

8.2. Визначимо критичні точки відповідно до необхідної умови існування екстремуму функції. Для цього слід розв'язати рівняння $f'(x) = 0$. Отже,

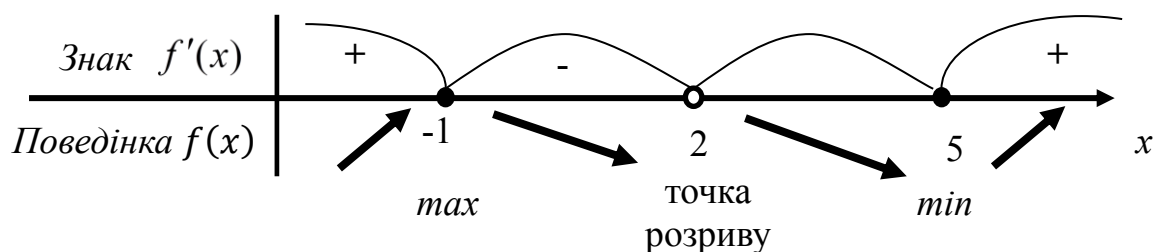
$$\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2} = 0.$$

Звідки

$$\begin{cases} (x+1)(x-5)=0 \\ (x-2)^2 \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 = -1, x_2 = 5 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Отримали $x = -1$, $x = 2$ та $x = 5$ – критичні точки.

8.3. Позначимо критичні точки на області визначення і знайдемо знак похідної та характер поведінки функції (зростання і спадання функції) на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення та скористаємося достатньою умовою існування екстремуму для визначення наявності точок екстремуму і їх характер (максимум, мінімум).



Або ці дані можна записати у вигляді таблиці:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 2)$	2	$(2; 5)$	5	$(5; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	не існує	–	0	+
$f(x)$		0		не існує		12	
		<i>max</i>		т. розриву		<i>min</i>	

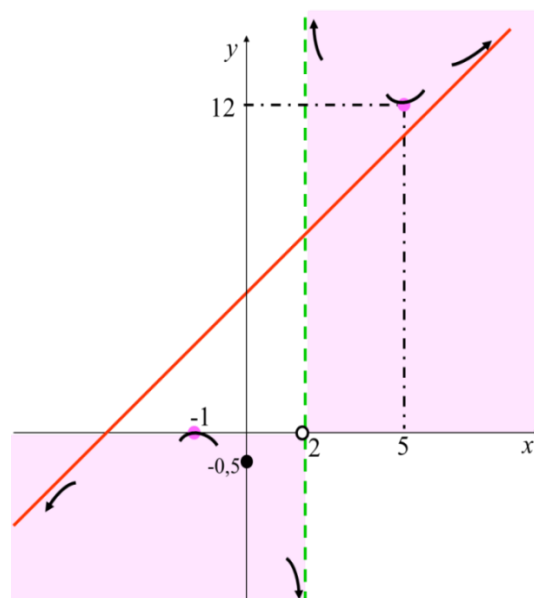
Оскільки в точках $x = -1$ та $x = 5$ існує похідна $f'(x)$, то функція $f(x)$ неперервна в цих точках, і тому їх можна включити до проміжків зростання та спадання функції.

Отже, функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -1]$ та $[5; +\infty)$ і спадає на кожному з проміжків $[-1; 2)$ та $(2; 5]$.

Оскільки в критичній точці $x = -1$ похідна функції змінює знак з «+» на «-», то в точці $x = -1$ функція має максимум, $y_{max} = f(-1) = 0$.

Оскільки в критичній точці $x = 5$ похідна функції змінює знак з «-» на «+», то в точці $x = 5$ функція має мінімум, $y_{min} = f(5) = 12$. Отже, в т.В $(-1, 0)$ – функція має максимум, а в т.С $(5, 12)$ – мінімум.

Позначимо точки екстремумів на ескізі графіка функції.



9. Виконати дослідження функції за допомогою другої похідної, визначити інтервали вгнутості (опуклості) функції та її точки перегину.

9.1. Визначимо другу похідну заданої функції:

$$f''(x) = \left(\frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2} \right)' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2 - 4x - 5)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{18}{(x-2)^3}$$

9.2. Визначимо критичні точки 2-го роду відповідно до необхідної умови існування точки перегину функції. Для цього слід розв'язати рівняння $f''(x) = 0$.

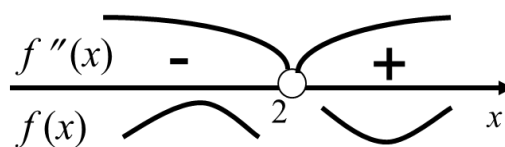
Оскільки $f''(x) = \frac{18}{(x-2)^3} \neq 0$ для $\forall x \in D(f)$, то задана функція не має точок перегину.

9.3. Визначимо інтервали вгнутості (опуклості) графіка на області визначення заданої функції.

При $x = 2$ друга похідна не існує, тому маємо інтервали: $(-\infty; 2)$ та $(2; +\infty)$ на яких необхідно визначити знак похідної другого порядку.

Оскільки на інтервалі $(-\infty, 2)$ друга похідна функції $f''(x) < 0$, то графік заданої функції є опуклим на цьому проміжку.

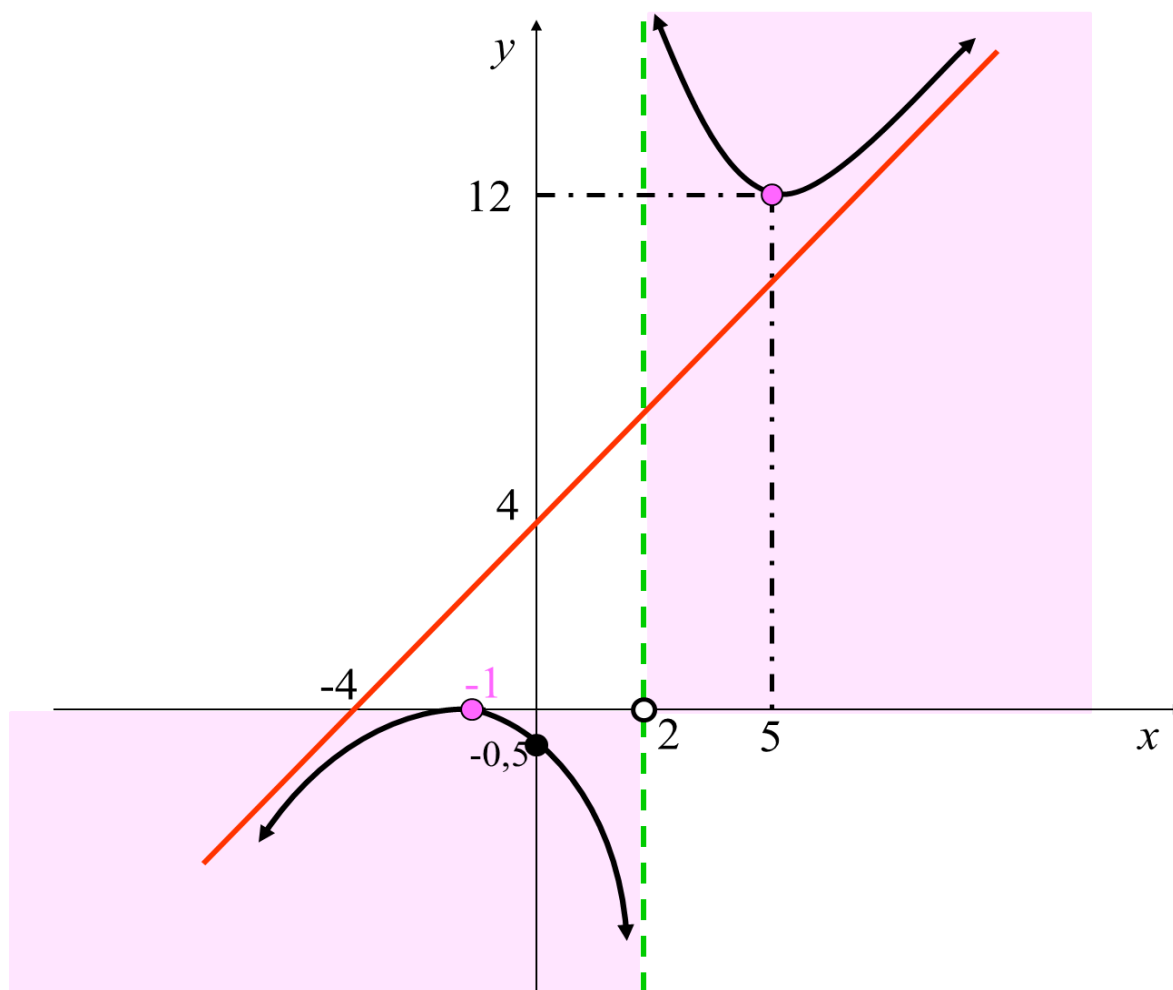
Оскільки на інтервалі $(2; +\infty)$ друга похідна функції $f''(x) > 0$, то графік заданої функції є вгнутим на цьому проміжку.



Або можемо записати у вигляді таблиці:

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f''(x)$	-	не існує	+
$f(x)$		не існує	
		точка розриву	

10. Побудувати графік заданої функції:



ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ [5, С. 456-458]:

Завдання: Із застосуванням загальної схеми дослідити функцію $y = f(x)$ та побудувати її графік	
Варіант 1) $y = x^2 + \frac{2}{x}$;	Варіант 2) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$;
Варіант 3) $y = \frac{6x^2 - x^4}{9}$;	Варіант 4) $y = \frac{x^4 - 3}{x}$;
Варіант 5) $y = \frac{16}{x^2(x - 4)}$;	Варіант 6) $y = \frac{x}{5 + x^2}$;
Варіант 7) $y = \frac{8}{x^2 - 4}$;	Варіант 8) $y = \frac{1}{x^2 + 3}$;
Варіант 9) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$;	Варіант 10) $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$;
Варіант 11) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$;	Варіант 12) $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$;
Варіант 13) $y = \frac{x^3}{3(x - 1)^2}$;	Варіант 14) $y = \frac{1}{x} + 4x^2$;
Варіант 15) $y = x + \frac{4}{x + 2}$;	Варіант 16) $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$;
Варіант 17) $y = \frac{4}{x} + \frac{1}{x^4}$;	Варіант 18) $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$;
Варіант 19) $y = 2 + \frac{12}{x^2 - 4}$;	Варіант 20) $y = x + \frac{4}{x + 2}$;
Варіант 21) $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$;	Варіант 22) $y = \frac{5x}{4 - x^2}$;
Варіант 23) $y = x + \frac{x}{3x - 1}$	Варіант 24) $y = \frac{x + 2}{x^3}$;

Варіант 25) $y = \frac{1 - x^3}{x^2};$	Варіант 26) $y = \frac{4 + x}{x^2};$
Варіант 27) $y = \frac{2 + x}{(x + 1)^2};$	Варіант 28) $y = \frac{x}{(x - 1)^2};$
Варіант 29) $y = \frac{x^2}{x - 1};$	Варіант 30) $y = \frac{4 - 2x}{1 - x^2}$

Література

1. Басманов О.Є., Кириченко І.К., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Вища математика. – Харків: АПБУ, 2003. – 136 с.
2. Білоусова Л.І. Горонескуль М.М. Курс вищої математики у середовищі Maple : Навчальний посібник. – Харків: УЦЗУ, КП «Міська друкарня», 2009. – 412с.
3. Горонескуль М.М. Основи вищої математики. Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів. – Харків: НУЦЗУ, 2015- 125 с.
4. Мунтян В.К., Говаленков С.В. Вища математика. Методичні вказівки для самостійних занять. – Харків: НУЦЗУ, 2015. – 213 с.
5. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. – Частина 1. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 552 с.

Навчальне видання

**Методичні рекомендації
та варіанти завдань до виконання
розрахунково-графічної роботи
«Дослідження функції однієї змінної»
з навчальної дисципліни «Вища математика»
для здобувачів вищої освіти
за освітньо-професійними програмами
«Пожежна безпека», «Цивільний захист» та «Охорона праці»**

Підписано до друку ____ 2024. Формат 60x84 1/16.

Умовн.-друк. арк. 2,0.

Вид. № ____/____.

Сектор редакційно-видавничої діяльності
Національного університету цивільного захисту України
18034 м. Черкаси, вул. Онопрієнка, 8,
www.nuczu.edu.ua