

**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ**

**ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ТА БЕЗПЕКИ НАСЕЛЕННЯ**

**Кафедра фізико-математичних дисциплін**

**Методичні рекомендації  
та варіанти завдань до виконання  
розрахунково-графічної роботи  
«Елементи лінійної і векторної алгебри  
та аналітичної геометрії»  
з навчальної дисципліни «Вища математика»  
для здобувачів вищої освіти  
за освітньо-професійними програмами  
«Пожежна безпека», «Цивільний захист» та «Охорона праці»**

**Черкаси 2025**

Рекомендовано до друку кафедрою  
фізико-математичних дисциплін  
(протокол від 23.09.2024 р. № 1)  
та вченої радою факультету управління  
та безпеки населення НУЦЗ України.  
(протокол від 28.10.2024 р. № 6)

Укладач: М. М. Горонескуль

**Рецензенти:** доктор фізико-математичних наук, професор **Ю.І. Першина**,  
завідувач кафедри вищої математики Національного технічного  
університету «ХП»;  
кандидат фізико-математичних наук, доцент **В.Г. Борисенко**,  
доцент кафедри фізико-математичних дисциплін НУЦЗ України.

**Методичні рекомендації** та варіанти завдань до виконання  
розрахунково-графічної роботи «Елементи лінійної і векторної алгебри та  
аналітичної геометрії» з навчальної дисципліни «Вища математика» для  
здобувачів вищої освіти за освітньо-професійними програмами «Пожежна  
безпека», «Цивільний захист» та «Охорона праці» / Укладач : М. М.  
Горонескуль. – Черкаси: НУЦЗУ, 2025. – 45 с.

**Методичні рекомендації** та варіанти завдань до виконання  
розрахунково-графічної роботи «Елементи лінійної і векторної алгебри та  
аналітичної геометрії» з навчальної дисципліни «Вища математика» для  
здобувачів вищої освіти за освітньо-професійними програмами «Пожежна  
безпека», «Цивільний захист» та «Охорона праці» визначають порядок  
виконання й оформлення розрахунково-графічної роботи, а також вимоги до її  
структури та змісту.

## ЗМІСТ

|                                                                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Порядок виконання і оформлення робіт.....                                                                                                 | 5  |
| Методичні рекомендації до розв'язання завдань за темами: .....                                                                            | 6  |
| 1. Елементи лінійної алгебри.....                                                                                                         | 6  |
| Приклад виконання Завдання 1:розв'язання СЛАР.....                                                                                        | 6  |
| Спосіб 1. Розв'язання СЛАР за формулами Крамера.....                                                                                      | 6  |
| Спосіб 2. Розв'язання СЛАР матричним методом.....                                                                                         | 9  |
| Спосіб 3. Розв'язання СЛАР методом Гаусса.....                                                                                            | 12 |
| 2. Елементи векторної алгебри.....                                                                                                        | 14 |
| Приклад виконання завдання 2:.....                                                                                                        | 14 |
| 2.1) приклад обчислення кут між векторами.....                                                                                            | 14 |
| 2.2) приклад обчислення проекції вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь вектора $\overrightarrow{AC}$ .....                                | 15 |
| 2.3) приклад обчислення площі паралелограма та трикутника,<br>побудованих на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ ..... | 15 |
| 2.4) приклад обчислення об'єму тетраедра та його висоти.....                                                                              | 16 |
| 3. Розкладання вектора за базисом.....                                                                                                    | 18 |
| Приклад виконання завдання 3. Розкласти вектор за заданим базисом..                                                                       | 18 |
| 4. Рівняння прямої на площині.....                                                                                                        | 20 |
| Приклад виконання завдання 4. Для заданих вершин трикутника<br>ABC знайти:.....                                                           | 20 |
| 4.1) рівняння сторони $AB$ .....                                                                                                          | 20 |
| 4.2) рівняння висоти $CH$ .....                                                                                                           | 21 |
| 4.3) рівняння медіани $AM$ .....                                                                                                          | 22 |
| 4.4) точку $N$ перетину медіани $AM$ і висоти $CH$ .....                                                                                  | 22 |
| 4.5) рівняння прямої, що проходить через т. $C$ паралельно<br>стороні $AB$ .....                                                          | 23 |
| 4.6) відстань від точки $C$ до прямої $AB$ .....                                                                                          | 24 |
| 5. Криві 2-го порядку.....                                                                                                                | 25 |
| Таблиця 5.1. Канонічні рівняння (невироджених та вироджених)<br>кривих другого порядку.....                                               | 26 |

|                                                                                                                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Таблиця 5.2 – канонічні рівняння та основні характеристики<br>невироджених кривих другого порядку.....                                                           | 27 |
| Таблиця 5.3. – рівняння кривих з центром у т. С. $(x_0; y_0)$ .....                                                                                              | 29 |
| Приклад виконання завдання 5. Привести рівняння кривої 2-го<br>порядку до канонічного вигляду, визначити основні числові<br>характеристики. Зробити рисунок..... | 30 |
| Варіанти завдань.....                                                                                                                                            | 34 |
| Варіанти завдання 1. Розв’язати СЛАР.....                                                                                                                        | 34 |
| Варіанти завдання 2. Розв’язати задачі векторної алгебри.....                                                                                                    | 36 |
| Варіанти завдання 3. Розкласти вектор за заданим базисом.....                                                                                                    | 38 |
| Варіанти завдання 4. Розв’язати задачі аналітичної геометрії.....                                                                                                | 40 |
| Варіанти завдання 5. Привести рівняння кривої 2-го порядку до<br>канонічного вигляду, визначити основні числові<br>характеристики. Зробити рисунок.....          | 41 |
| Література.....                                                                                                                                                  | 44 |

## ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ І ОФОРМЛЕННЯ РОБІТ

Розрахунково-графічну роботу (РГР) необхідно виконувати в окремому зошиті або на аркушах формату А-4. Для зауважень викладача необхідно залишити поля 4-6 см завширшки. РГР слід виконувати строго за варіантом, який видано викладачем. РГР, що виконана не за своїм варіантом, не перевіряється і не зараховується.

Завдання необхідно розв'язувати у порядку зростання номерів свого варіанта. Умови завдань записувати повністю, після чого приводить докладний процес розв'язання із дотриманням методичних рекомендацій. Якщо до даного завдання є обов'язковим рисунок, то його слід розташувати перед розв'язком і робити на ньому усі необхідні позначення. Наприкінці кожного завдання записується відповідь.

Здобувач зобов'язаний пройти співбесіду з викладачем кафедри щодо виконання роботи.

Здобувачі, які не виконали запропоновані завдання і не пройшли співбесіду з викладачем до екзамену (заліку) не будуть допущені.

Оформлювати та підписувати роботу треба за зразком, наведеним нижче.

Розрахунково-графічна робота

«Елементи лінійної і векторної алгебри та аналітичної геометрії»

з дисципліни «Вища математика»

здобувача вищої освіти групи ОП-25-3

Петренка Івана Івановича

Варіант №0

# МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ

## 1. Елементи лінійної алгебри.

**Завдання 1.** Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

1) за формулами Крамера;

2) матричним методом;

3) методом Гаусса.

*Розв'язання:* Для заданої системи запишемо:

а) матрицю  $A$ , що складається із коефіцієнтів при невідомих

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

б) матрицю-стовпець  $X$ , що складається із невідомих

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

в) матрицю-стовпець  $B$ , що складається із вільних членів

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Спосіб 1.** Розв'язання СЛАР за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

1) Якщо  $\Delta \neq 0$ , то СЛАР має єдиний розв'язок.

2) Якщо  $\Delta = 0$  та всі допоміжні визначники  $\Delta_i = 0$ , то СЛАР або не має розв'язку, або має безліч розв'язків.

3) Якщо  $\Delta = 0$  і хоча б один із допоміжних визначників  $\Delta_i$  не дорівнює нулю, то СЛАР *несумісна*, а отже, не має розв'язку.

*Крок 1.* Обчислити  $\Delta = \Delta A$  основний визначник – визначник матриці  $A$ :

$$\Delta = \Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Визначник 3-го порядку матриці  $A$  обчислимо за допомогою теореми Лапласа, а саме за правилом розкладання визначника за елементами першого рядка:

$$\begin{aligned} \Delta = \Delta A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = \\ &= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}), \end{aligned}$$

де алгебраїчні доповнення  $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ .

Отже,

$$\begin{aligned} \Delta = \Delta A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 3A_{11} + 2A_{12} + (-1)A_{13} = 3M_{11} - 2M_{12} + (-1)M_{13} = \\ &= 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot (-1 - 6) - 2 \cdot (2 + 2) - 1 \cdot (6 - 1) = -21 - 8 - 5 = -34. \end{aligned}$$

*Крок 2.* Обчислити допоміжні визначники  $\Delta_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ), які одержуються з основного визначника  $\Delta$  шляхом заміни  $i$ -го стовпця в основному визначнику  $\Delta$  стовпцем вільних членів матриці  $B$ . Отже,

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 11 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= -3(-1-6) - 2(11-0) - 1(33-0) = 21 - 22 - 33 = -34;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 2 & 11 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 3(11-0) + 3(2+2) - 1(0-(-11)) = 33 + 12 - 11 = 34;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 11 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 11 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 3(0-33) - 2(0-(-11)) - 3(6-1) = -99 - 22 - 15 = -136.\end{aligned}$$

Таким чином, виходячи з формул Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-34}{-34} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{34}{-34} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-136}{-34} = 4.$$

*Крок 3.* Перевірка – підставити одержані значення невідомих у вихідну систему:

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 4 = -3; \\ 2 \cdot 1 - (-1) + 2 \cdot 4 = 11; \\ -1 + 3 \cdot (-1) + 4 = 0. \end{cases}$$

Отже, одержали правильну тотожність

**Відповідь:**  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 4$ .

**Спосіб 2.** Розв'язання заданої системи рівнянь матричним методом.

$$X = A^{-1}B, \text{ де}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \tilde{A} = \frac{1}{\Delta A} (A_{ij})^T = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$$

Реалізація методу полягає в знаходженні оберненої матриці і множення її на матрицю-стовпець  $B$  вільних членів. Даний метод використовується для невироджених квадратних матриць ( $\Delta A \neq 0$ ).

*Крок 1.* Обчислити визначник матриці  $A$ , оскільки розв'язання матричним методом можливе за умови, що  $\Delta A \neq 0$ , тобто матриця  $A$  невироджена:

$$\begin{aligned} \Delta A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot (-1 - 6) - 2 \cdot (2 + 2) - 1 \cdot (6 - 1) = -21 - 8 - 5 = -34 \neq 0, \end{aligned}$$

Отже, існує обернена матриця і єдиний розв'язок системи.

*Крок 2.* Обчислити алгебраїчні доповнення  $A_{ij}$  до всіх елементів матриці  $A$  за формулою:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \pm M_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, & \text{якщо } i+j \text{ парне число;} \\ -M_{ij}, & \text{якщо } i+j \text{ непарне число.} \end{cases}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1 - 6) = -7,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (2 + 2) = -4,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (6 - 1) = 5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (2 + 3) = -5,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 - 1) = 2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (9 + 2) = -11,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 - 1) = 3,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (6 + 2) = -8,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3 - 4) = -7.$$

*Крок 3.* Одержати приєднану матрицю  $\tilde{A}$ , що є транспонованою до матриці  $(A_{ij})$  алгебраїчних доповнень до всіх елементів матриці  $A$ :

$$\tilde{A} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -5 & 5 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Отже, } \tilde{A} = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -8 \\ 5 & -11 & -7 \end{pmatrix} \text{ -- приєднана матриця до матриці } A.$$

*Крок 4.* Записати обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \tilde{A} = -\frac{1}{34} \begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -8 \\ 5 & -11 & -7 \end{pmatrix}$$

Крок 5. Перевірити правильність обчислення оберненої матриці:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= -\frac{1}{34} \begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -8 \\ 5 & -11 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{34} \begin{pmatrix} -21-10-3 & -14+5+9 & 7-10+3 \\ -12+4+8 & -8-2-24 & 4+4-8 \\ 15-22+7 & 10+11-21 & -5-22-7 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{34} \begin{pmatrix} -34 & 0 & 0 \\ 0 & -34 & 0 \\ 0 & 0 & -34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

Отже, обернену матрицю  $A^{-1} = -\frac{1}{34} \begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -8 \\ 5 & -11 & -7 \end{pmatrix}$  обчислили

правильно.

Крок 6. Обчислити матрицю невідомих  $X$

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= -\frac{1}{34} \begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -8 \\ 5 & -11 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{34} \begin{pmatrix} 21-55+0 \\ 12+22+1 \\ -15-121+0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{34} \begin{pmatrix} -34 \\ 34 \\ -136 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Отже,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 4$ .

Крок 7. Перевірка – підставити одержані значення невідомих у вихідну

систему:  $\begin{cases} 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 4 = -3; \\ 2 \cdot 1 - (-1) + 2 \cdot 4 = 11; \\ -1 + 3 \cdot (-1) + 4 = 0. \end{cases}$  . Отже, одержали правильну тотожність.

**Відповідь:**  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 4$ .

### Спосіб 3. Розв'язання заданої системи рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи і приведемо її до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень розширеної матриці, які виконують над рядками:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & 11 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left[ \begin{array}{l} \text{поміняємо 1-й} \\ \text{та 3-й рядок} \\ \text{місцями} \end{array} \right] \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 11 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left[ \begin{array}{l} \text{одержимо під елементом } a_{11} = -1 \text{ нулі. Для цього усі елементи} \\ \text{першого рядка помножимо на 2 та додамо до відповідних} \\ \text{елементів 2-го рядка, тим самим одержимо новий 2-гий рядок.} \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 11 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left[ \begin{array}{l} \text{За аналогією змінимо 3-й рядок. Для цього усі елементи} \\ \text{першого рядка помножимо на 3 та додамо до відповідних} \\ \text{елементів 3-го рядка, тим самим одержимо новий 3-й рядок.} \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 11 \\ 0 & 11 & 2 & -3 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left[ \begin{array}{l} \text{Тепер під елементом } a_{22} = 5 \text{ одержимо 1. Для цього помножимо} \\ \text{усі елементи другого рядка на } (-2) \text{ та додамо до відповідних} \\ \text{елементів третього рядка. Одержимо новий 3-й рядок} \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & -6 & -25 \end{array} \right) \sim \left[ \begin{array}{l} \text{поміняємо 2-й} \\ \text{та 3-й рядок} \\ \text{місцями} \end{array} \right] \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -25 \\ 0 & 5 & 4 & 11 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left[ \begin{array}{l} \text{одержимо під } a_{22} = 1 \text{ нуль. Для цього усі елементи} \\ \text{2-го рядка помножимо на } (-5) \text{ та додамо до відповідних} \\ \text{елементів 3-го рядка. Тим самим одержимо новий 3-й рядок} \end{array} \right] \sim \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -25 \\ 0 & 0 & 34 & 136 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \text{Розділемо усі} \\ \text{елементи} \\ \text{3-го рядка на 34} \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Оскільки  $RgA = Rg\bar{A} = 3$ , де  $n = 3$  – кількість невідомих, то система сумісна і має єдиний розв'язок. (Ранг **Rg** матриці - найвищий з порядків всіляких ненульових мінорів цієї матриці. Ранг нульової матриці будь-якого розміру нуль. Якщо всі мінори другого порядку дорівнюють нулю, то ранг дорівнює одиниці).

Ставимо у відповідність розширеній матриці  $\bar{A}$ , зведеної до трикутного вигляду, систему (еквівалентну вихідній), розв'язання якої здійснюємо знизу вверх:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0; \\ x_2 - 6x_3 = -25; \\ x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 + x_3; \\ x_2 = 6x_3 - 25; \\ x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 + 4; \\ x_2 = 24 - 25; \\ x_3 = 4, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 + 4; \\ x_2 = -1; \\ x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 + 4; \\ x_2 = -1; \\ x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = -1; \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

**Відповідь:**  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 4$ .

## 2. Елементи векторної алгебри

**Завдання 2.** Задані точки  $A(3;2;1)$ ,  $B(-2;1;-2)$ ,  $C(-1;2;3)$  та  $D(1,-2,3)$

Обчислити:

2.1) кут між векторами  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$ ;

2.2) проекцію вектора  $\overrightarrow{AB}$  на вісь вектора  $\overrightarrow{AC}$ ;

2.3) площу паралелограма та трикутника, побудованих на векторах  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$ ;

2.4) обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  та його висоту, опущену з вершини  $D$  на грань  $ABC$ .

**Розв'язання 2.1).** Визначимо координати вектора  $\overrightarrow{AB}$ . Для цього із координат точки  $B$  – кінця вектора віднімемо координати точки  $A$  – початку вектора:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (-2 - 3; 1 - 2; -2 - 1) = (-5; -1; -3).$$

Аналогічно обчислимо координати вектора  $\overrightarrow{AC}$ :

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A) = (-1 - 3; 2 - 2; 3 - 1) = (-4; 0; 2).$$

Кут  $\varphi$  між векторами  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$  обчислимо за формулою

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|},$$

де  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  – скалярний добуток векторів  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$ , а  $|\overrightarrow{AB}|$  і  $|\overrightarrow{AC}|$  – їх модулі.

Модуль вектора дорівнює квадратному кореню із суми квадратів його координат:

Якщо вектор  $\overrightarrow{AB} = (x_1; y_1; z_1) = (-5; -1; -3)$ , заданий своїми координатами, то модуль вектора  $\overrightarrow{AB}$ :

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 1 + 9} = \sqrt{35}.$$

Якщо вектор  $\overrightarrow{AC} = (x_2; y_2; z_2) = (-4; 0; 2)$ , заданий своїми координатами, то модуль вектора  $\overrightarrow{AC}$ :

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 0 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Скалярний добуток векторів  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ , що задані своїми координатами, дорівнює сумі добутків відповідних координат. Якщо

$$\overrightarrow{AB} = (x_1; y_1; z_1) = (-5; -1; -3) \text{ та } \overrightarrow{AC} = (x_2; y_2; z_2) = (-4; 0; 2), \text{ то}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = -5 \cdot (-4) + (-1) \cdot 0 + (-3) \cdot 2 = 14.$$

$$\text{Отже, } \cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{14}{\sqrt{35} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{7}{5\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{5} \approx 0,53, \text{ тому}$$

$$\varphi \approx \arccos 0,53 \approx 58^\circ.$$

**Відповідь:**  $\varphi \approx 58^\circ$

**Розв'язання 2.2).**

Обчислити проекцію вектора  $\overrightarrow{AB}$  на вісь вектора  $\overrightarrow{AC}$ :

$$\text{Pr}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{14}{2\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} \approx 3,13$$

**Розв'язання 2.3).** Обчислити площу паралелограма та трикутника, побудованих на векторах  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$ .

Площа  $S_{\square}$  паралелограма та площа  $S_{\Delta}$  трикутника, побудованих на векторах  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$  (рис. 1) обчислюються відповідно за формулами:

$$S_{\square} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \text{ та } S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

Оскільки

$$\overrightarrow{AB} = (x_1; y_1; z_1) = (-5; -1; -3)$$

та

$$\overrightarrow{AC} = (x_2; y_2; z_2) = (-4; 0; 2),$$

то векторний добуток  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$  векторів  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$  обчислимо наступним чином:

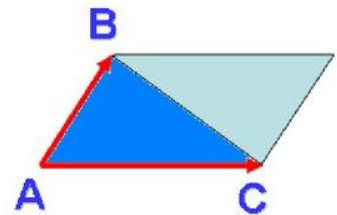


Рис. 1

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -1 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= (-2 - 0)\vec{i} - (-10 - 12)\vec{j} + (0 - 4)\vec{k} = -2\vec{i} + 22\vec{j} - 4\vec{k}.\end{aligned}$$

Отже, векторний добуток:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -2\vec{i} + 22\vec{j} - 4\vec{k}$$

або в координатній формі:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2; 22; -4).$$

Площа паралелограма, побудованого на векторах  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$  дорівнює модулю векторного добутку векторів  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$ :

$$S_{\square} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 22^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 484 + 16} = \sqrt{504} = 6\sqrt{14} \text{ (од}^2\text{)}.$$

Площа трикутника, побудованого на векторах  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$ :

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 22^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{504} = 3\sqrt{14} \text{ (од}^2\text{)}.$$

**Відповідь:** Площа паралелограма  $S_{\square} = 6\sqrt{14}$  (од<sup>2</sup>) та площа трикутника  $S_{\Delta} = 3\sqrt{14}$  (од<sup>2</sup>).

#### Розв'язання 2.4).

Обчислити об'єм тетраедра (трикутної піраміди) з вершинами в точках  $A, B, C, D$  і висоту піраміди  $h$ , яка опущена з т.  $D$  на грань  $ABC$ .

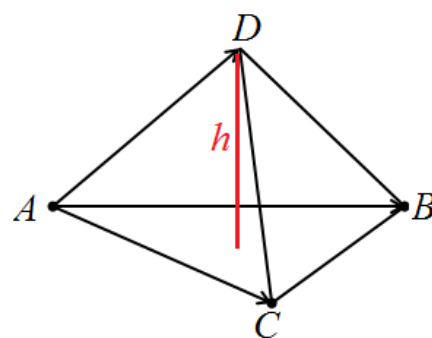


Рис. 2

Об'єм  $V$  тетраедра (трикутної піраміди), з вершинами в точках  $A, B, C, D$  обчислимо за формулою

$$V = \frac{1}{6} |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|,$$

де

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_1; y_1; z_1) = (-5; -1; -3),$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (x_2; y_2; z_2) = (-4; 0; 2),$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{AD} = (x_3; y_3; z_3) = (-2, -4, 2),$$

тоді

$$\begin{aligned} \vec{a} \vec{b} \vec{c} &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -1 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = \\ &= -5(0 + 8) + (-8 + 4) - 3(16 - 0) = -40 - 4 - 48 = -92. \end{aligned}$$

Отже, об'єм тетраедра

$$V = \frac{1}{6} |\vec{a} \vec{b} \vec{c}| = \frac{1}{6} \cdot |-92| = \frac{1}{6} \cdot 92 = \frac{46}{3} = 15\frac{1}{3} \text{ од}^3.$$

З іншого боку об'єм піраміди  $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h$ ,

звідси

$$h = \frac{3V}{S_{\triangle ABC}} = \frac{46}{3\sqrt{14}} = \frac{46\sqrt{14}}{3 \cdot 14} = \frac{23\sqrt{14}}{21} \text{ од.}$$

**Відповідь:** об'єм тетраедра  $V = 15\frac{1}{3} \text{ од}^3$ , висота  $h = \frac{23\sqrt{14}}{21} \text{ од.}$

### 3. Розкладання вектора за базисом

**Завдання 3.** Переконатися, що система векторів  $\vec{p} = (1; 2; -1)$ ,  $\vec{q} = (3; 6; 1)$ ,  $\vec{r} = (3; 9; 3)$  утворює базис у множині всіх векторів простору, і знайти розкладання вектора  $\vec{x} = (2; 5; 0)$  у цьому базисі.

**Розв'язання:**

*Крок 1.* Переконаємось, що вектори  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$ ,  $\vec{r}$  є лінійно незалежними, тобто утворюють базис. Для цього складемо і обчислимо визначник, що утворюється з координат векторів  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$ ,  $\vec{r}$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \left[ 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right] =$$
$$= 3[(6 - 3) - 2(3 - 1) - (9 - 6)] = -6 \neq 0$$

Оскільки вищезазначений визначник не дорівнює нулю, то вектори  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$ ,  $\vec{r}$  є лінійно незалежними і утворюють базис у множині всіх векторів простору.

*Крок 2.* Нехай числа  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  - координати вектора  $\vec{x}$  у базисі  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$ ,  $\vec{r}$ , тобто

$$\vec{x} = \alpha \vec{p} + \beta \vec{q} + \gamma \vec{r}.$$

Підставимо координати векторів  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$ ,  $\vec{r}$  у цю рівність та одержимо:

$$(2; 5; 0) = \alpha(1; 2; -1) + \beta(3; 6; 1) + \gamma(3; 9; 3).$$

Звідки запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta + 3\gamma = 2; \\ 2\alpha + 6\beta + 9\gamma = 5; \\ -\alpha + \beta + 3\gamma = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь за методом Гаусса:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left[ \begin{array}{l} \text{одержимо новий 2-й рядок:} \\ \text{помножимо усі елементи 1-го} \\ \text{рядка на } (-2) \text{ та додамо їх до} \\ \text{відповідних елементів 2-го рядка} \end{array} \right] \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left[ \begin{array}{l} \text{одержимо новий 3-й рядок:} \\ \text{додамо відповідні елементи} \\ \text{першого та третього рядків} \end{array} \right] \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \end{array} \right) \sim \left[ \begin{array}{l} \text{розділимо усі} \\ \text{елементи третього} \\ \text{рядка на 2} \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \sim \left[ \begin{array}{l} \text{поміняємо місцями} \\ \text{другий і третій рядки} \end{array} \right] \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right).$$

Відновимо систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + 3\beta + 3\gamma = 2; \\ 2\beta + 3\gamma = 1; \\ 3\gamma = 1. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 3\beta + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2; \\ 2\beta + 3 \cdot \frac{1}{3} = 1; \\ \gamma = \frac{1}{3}. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 3 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2; \\ \beta = 0; \\ \gamma = \frac{1}{3}. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1; \\ \beta = 0; \\ \gamma = \frac{1}{3}. \end{array} \right.$$

Із системи отримали:  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = \frac{1}{3}$ .

Зробивши перевірку, впевнюємося у правильності розв'язання системи.

Отже, шукане розкладання вектора  $\vec{x}$  за базисом  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  має вигляд:

$$\vec{x} = 1 \cdot \vec{p} + 0 \cdot \vec{q} + \frac{1}{3} \cdot \vec{r}.$$

**Відповідь:**  $\vec{x} = \vec{p} + \frac{1}{3} \vec{r}.$

#### 4. Рівняння прямої на площині

**Завдання 4.** Для заданих вершин трикутника ABC (рис. 3), де  $A(1;7)$ ,  $B(-3;-1)$ ,  $C(11;-3)$  знайти:

4.1) рівняння сторони  $AB$ ;

4.2) рівняння висоти  $CH$ ;

4.3) рівняння медіани  $AM$ ;

4.4) точку  $N$  перетину медіани  $AM$  і висоти  $CH$ ;

4.5) рівняння прямої, що проходить через т.  $C$  паралельно стороні  $AB$ ;

4.6) відстань від точки  $C$  до прямої  $AB$ .

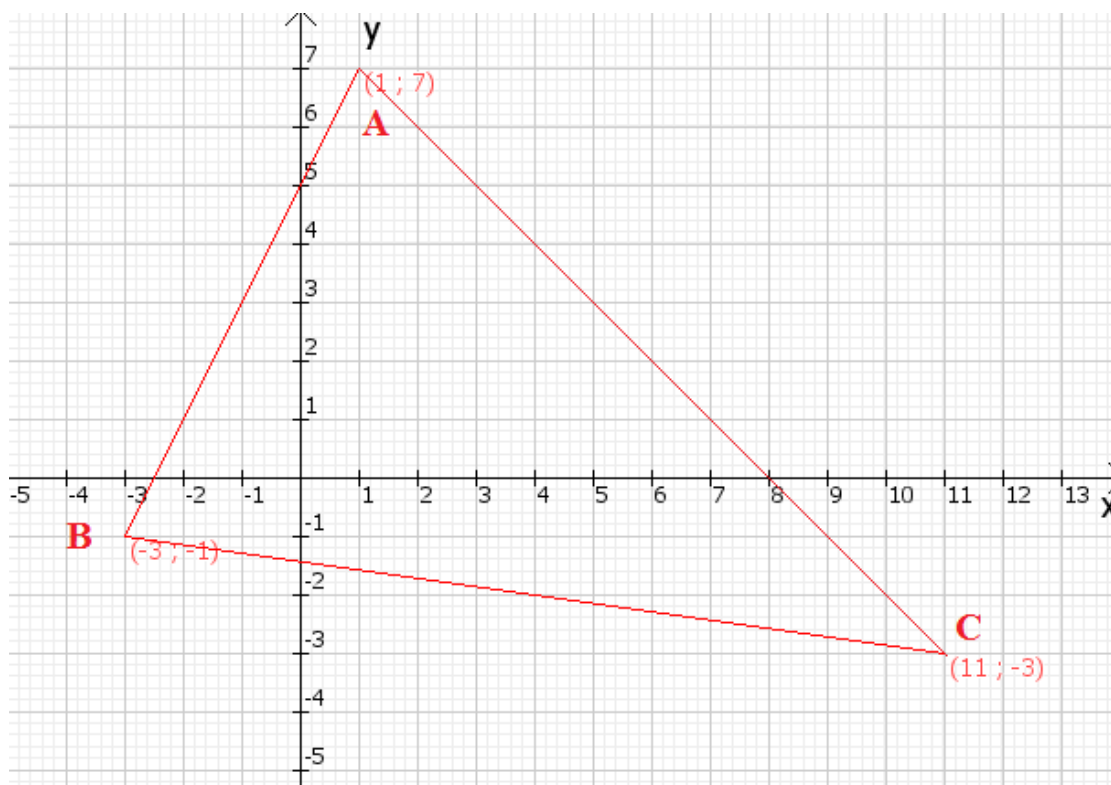


Рис 3.

**Розв'язання :**

4.1) Визначимо рівняння сторони  $AB$ , що проходить через дві задані точки  $A(1;7)$  та  $B(-3;-1)$ . Для цього скористаємось формулою:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}.$$

Отже,

$$\frac{x-1}{-3-1} = \frac{y-7}{-1-7}$$

або

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-7}{-8},$$

звідки  $2x - y + 5 = 0$  – загальне рівняння прямої **AB**, для якої вектором нормалі є вектор  $\vec{n}(2; -1)$ .

4.2) Визначимо рівняння висоти **CH**, що проходить через точку  $C(11; -3)$  перпендикулярно до прямої **AB**, а тому вектор нормалі  $\vec{n}(2; -1)$  прямої **AB** буде слугувати як напрямний вектор  $\vec{s}(2; -1)$  шуканої висоти **CH**. Для визначення рівняння висоти **CH** скористаємось формулою:

$$\frac{x - x_c}{m} = \frac{y - y_c}{p}, \text{ де } \vec{s}(m; p).$$

$$\text{Отже, } \frac{x - 11}{2} = \frac{y + 3}{-1},$$

Звідки  $x + 2y - 5 = 0$  – загальне рівняння висоти **CH** (рис. 4)

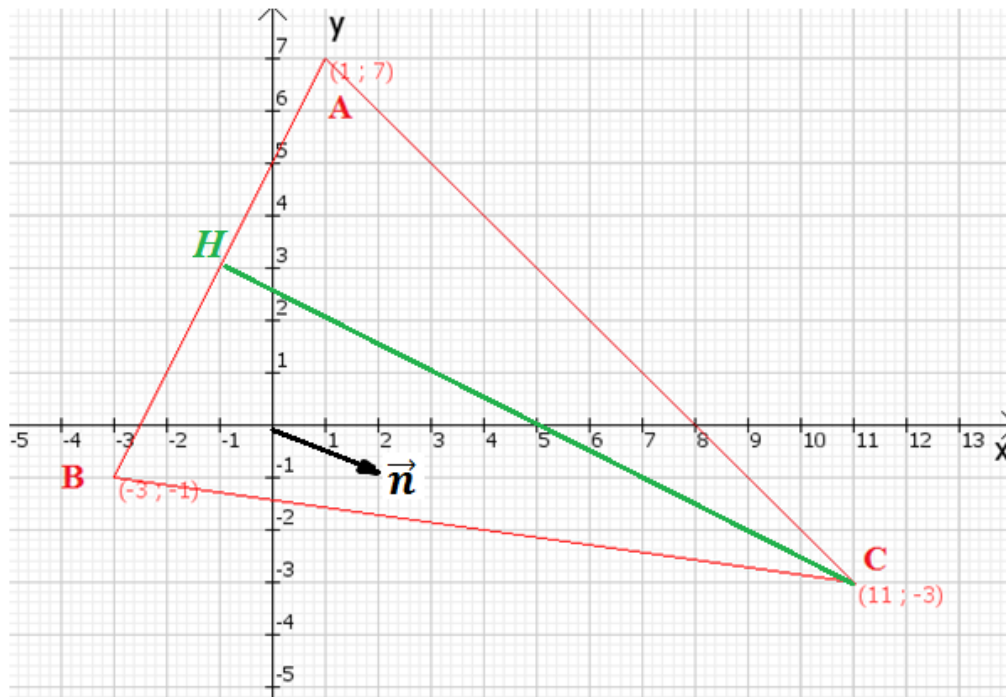


Рис. 4.

4.3) Визначимо рівняння медіани **AM**. Точка М є серединою відрізка ВС.

Координати т.М визначимо за формулами:

$$x = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-3 + 11}{2} = 4 \text{ та } y = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-1 - 3}{2} = -2.$$

Отже, отримали т.М (4; -2).

Визначимо рівняння медіани **AM** (рис.5) за двома точками:

$$\frac{x - x_A}{x_M - x_A} = \frac{y - y_A}{y_M - y_A}.$$

Маємо

$$\frac{x - 1}{4 - 1} = \frac{y - 7}{-2 - 7} \text{ або } \frac{x - 1}{3} = \frac{y - 7}{-9},$$

звідси:  $-3x - y + 10 = 0$ .

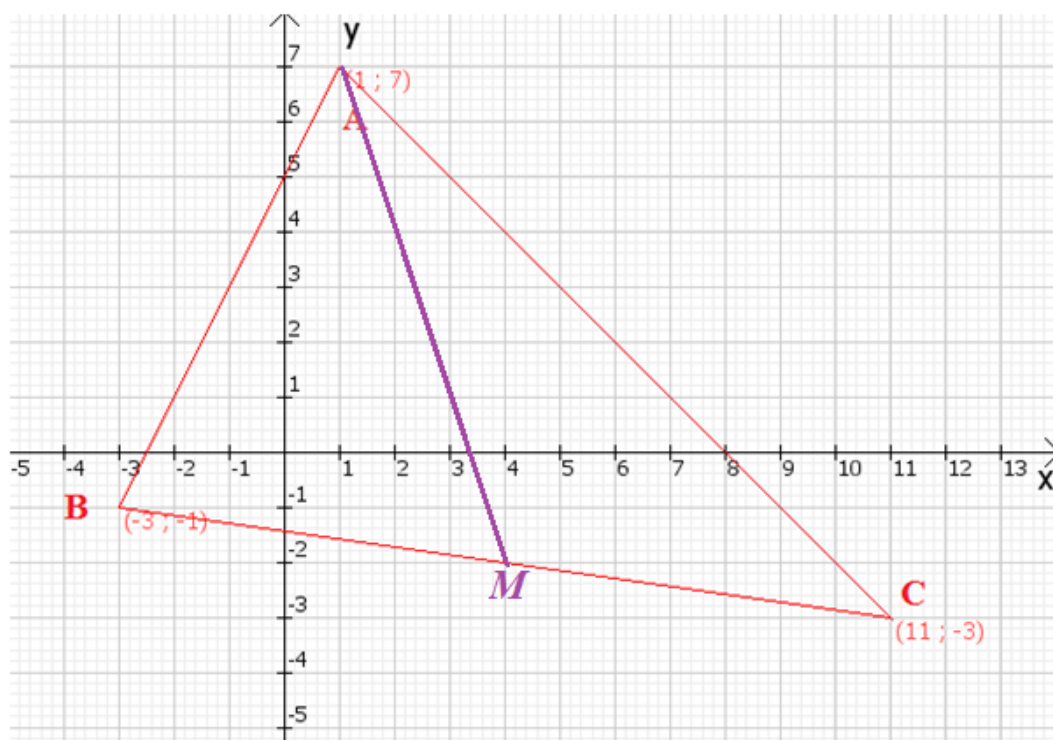


Рис. 5.

4.4) Щоби визначити точку **N** (рис.6) перетину медіани **AM** і висоти **CH** необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} -3x - y + 10 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}.$$

Помножимо перше рівняння системи на 2, одержимо:

$$\begin{cases} -6x - 2y + 20 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}.$$

Додамо ці рівняння. Отже,  $-5x + 15 = 0$ , звідки  $x=3$ .

Підставимо знайдене значення  $x=3$  у перше рівняння вихідної системи, а саме:  $-3x - y + 10 = 0$  та одержимо, що  $y=1$ .

Отже, визначили т.N (3;1) (рис.6).

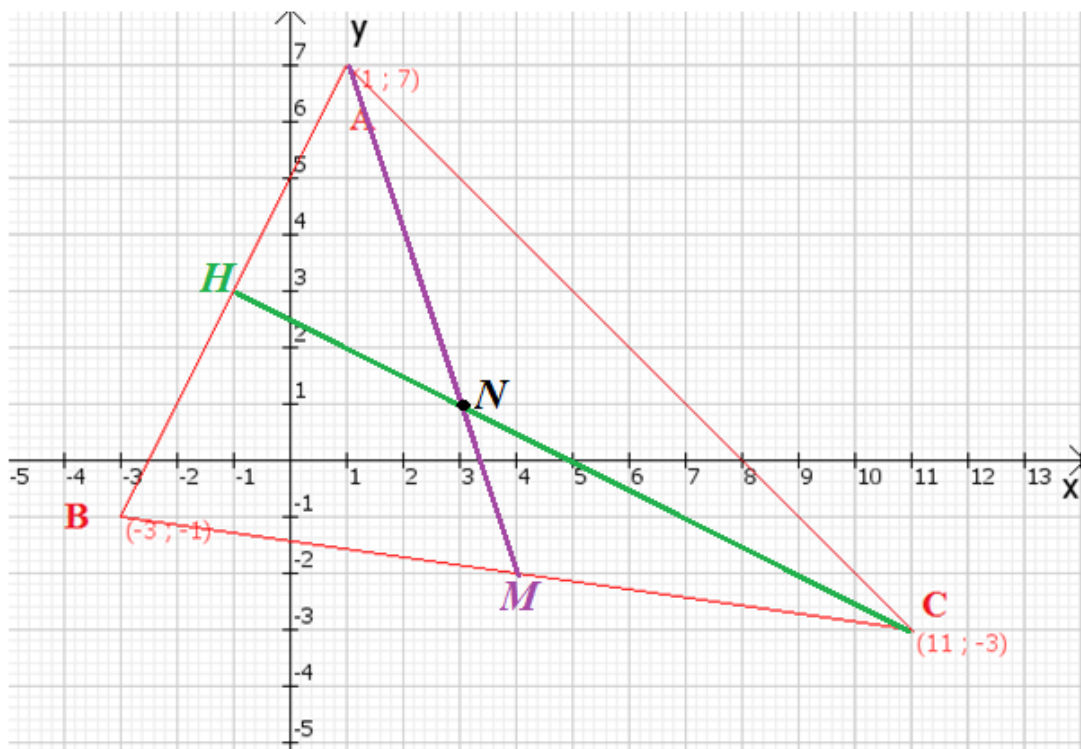


Рис. 6.

4.5) Визначимо рівняння прямої  $l$ , що проходить через вершину  $C$  паралельно стороні  $AB$ . Це означає, що нормальний вектор  $\vec{n}(2; -1)$  прямої  $AB$  можна використати як нормальний вектор і для шуканої прямої  $l$ . Оскільки сторона  $AB$  має рівняння  $2x - y + 5 = 0$ , то її вектор нормалі  $\vec{n}(2; -1)$  буде і вектором нормалі для шуканої прямої  $l$  (рис.7), рівняння якої визначимо за формулою:

$$A(x - x_c) + B(y - y_c) = 0,$$

де  $\vec{n}(A; B) = \vec{n}(2; -1)$

$$2(x - 11) + (-1)(y + 3) = 0.$$

Звідси одержимо рівняння прямої  $l: 2x - y - 25 = 0$ .

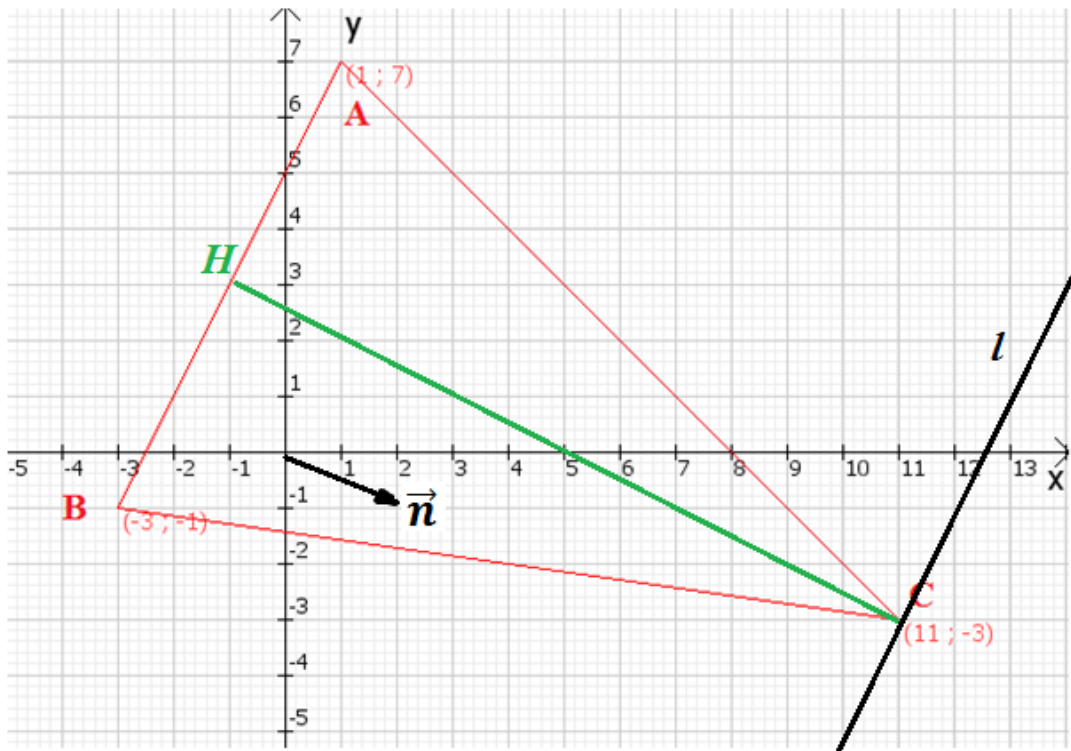


Рис. 7.

4.6) відстань від точки  $C(x_c; y_c)$  до прямої  $AB$  обчислимо за формулою:

$$d = \frac{|A \cdot x_c + B \cdot y_c + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

де  $A, B, C$  коефіцієнти загального рівняння прямої  $AB$ ,

$x_c$  та  $y_c$  – координати заданої точки  $C(11; -3)$ .

Оскільки пряма  $AB$  має рівняння  $2x - y + 5 = 0$ , то  $A = 2, B = -1, C = 5$ . Отже,

$$d = \frac{|2 \cdot 11 + (-1) \cdot (-3) + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|22 + 3 + 5|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{30}{\sqrt{5}} = \frac{30\sqrt{5}}{5} = 6\sqrt{5} \approx 13,42.$$

## 5. Криві 2-го порядку

Кривою другого порядку є лінія, яка визначається загальним рівнянням другого степеня відносно поточних координат  $x$  та  $y$ :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (5.1)$$

де  $|A| + |B| + |C| \neq 0$ .

Визначник  $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$  – дискримінант рівняння.

Визначник  $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$  – дискримінант старших членів рівняння.

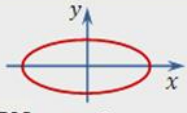
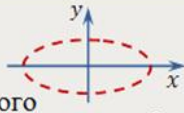
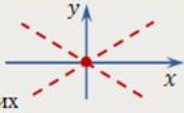
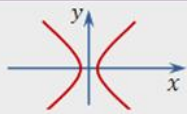
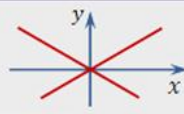
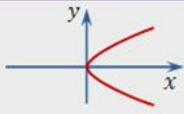
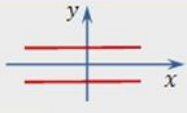
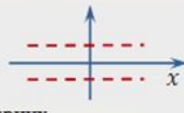
У залежності від значень цих визначників рівняння визначає наступний геометричний образ:

|              | $\Delta \neq 0$<br>(невироджені криві) | $\Delta = 0$<br>(вироджені криві)                                                                |
|--------------|----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\delta > 0$ | Еліпс (дійсний або уявний)             | Пара уявних спряжених прямих, що перетинаються. Точка.                                           |
| $\delta < 0$ | Гіпербола                              | Пара дійсних прямих, що перетинаються.                                                           |
| $\delta = 0$ | Парабола                               | Пара паралельних прямих (дійсних або уявних).<br>Пряма (пара паралельних прямих, які збігаються) |

За допомогою перевизначення (введення нових) змінних та переносу (повороту) осей координат здійснюється перехід від загального рівняння 5.1 до одного з канонічних рівнянь (невироджених або вироджених) кривих другого порядку.

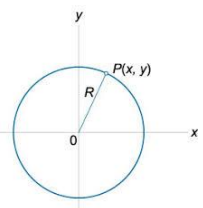
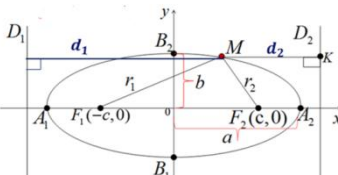
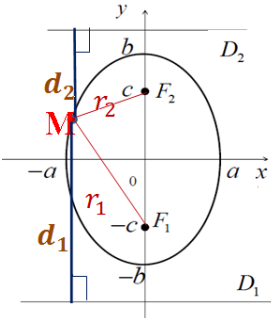
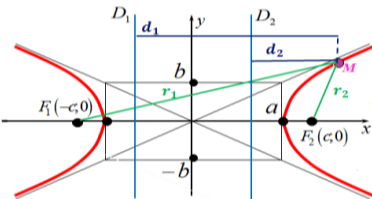
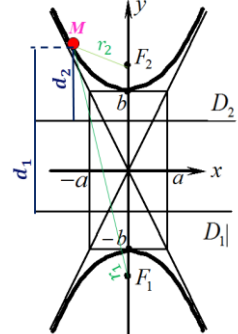
Для будь-якої алгебраїчної лінії другого порядку існує прямокутна система координат **Oxy**, у якій рівняння цієї лінії набуває одного з наведених у таблиці 5.1. канонічних видів.

Таблиця 5.1 – Канонічні рівняння (невироджених та вироджених) кривих другого порядку.

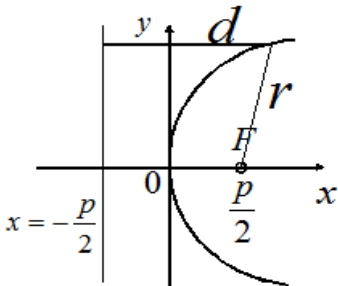
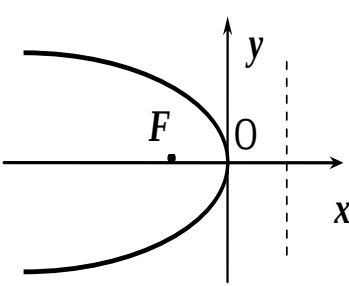
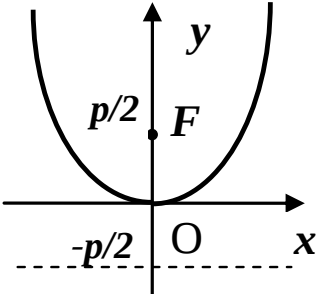
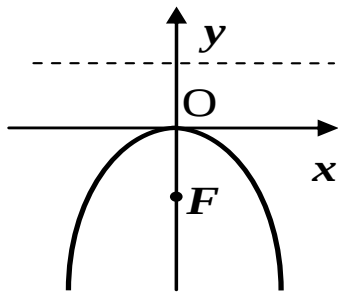
|                        |                                                                                          |                                                                                     |
|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.                     | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$<br>Рівняння еліпса<br>$a \geq b$                 |    |
| 2.                     | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$<br>Рівняння уявного еліпса<br>$a \geq b$        |   |
| 3.                     | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$<br>Рівняння пари уявних прямих, що перетинаються |  |
| 4.                     | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$<br>Рівняння гіперболи                            |    |
| 5.                     | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$<br>Рівняння пари прямих, що перетинаються        |   |
| 6.                     | $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$<br>Рівняння параболи                                           |  |
| 7.                     | $y^2 - b^2 = 0$<br>Рівняння пари паралельних прямих                                      |    |
| 8.                     | $y^2 + b^2 = 0$<br>Рівняння пари уявних паралельних прямих                               |   |
| 9.                     | $y^2 = 0$<br>Рівняння пари прямих, що співпадають                                        |  |
| $a > 0, b > 0, p > 0,$ |                                                                                          |                                                                                     |

В даному курсі розглядають тільки неvirоджені криві другого порядку. Їх канонічні рівняння та основні характеристики представлені в таблиці 5.2.

Таблиця 5.2 – канонічні рівняння та основні характеристики не вироджених кривих другого порядку

|                                      | Коло                                                                               | Еліпс                                                                               |                                                                                      | Гіпербола                                                                             |                                                                                      |
|--------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Рівняння                             | $x^2 + y^2 = R^2$                                                                  | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$                                             |                                                                                      | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$                                               | $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$                                              |
| Півосі                               |                                                                                    | $a$ – велика<br>$b$ – мала                                                          | $a$ – мала<br>$b$ – велика                                                           | <b>Ox</b> - дійсна вісь,<br><b>Oy</b> - уявна вісь                                    | <b>Oy</b> - дійсна вісь,<br><b>Ox</b> - уявна вісь                                   |
| Відстань від центра кривої до фокуса | $c = 0$                                                                            | $c = \sqrt{a^2 - b^2}$                                                              | $c = \sqrt{b^2 - a^2}$                                                               | $c = \sqrt{a^2 + b^2}$                                                                |                                                                                      |
| Фокуси                               | $F(0; 0)$                                                                          | $F_1(-c; 0); F_2(c; 0);$                                                            | $F_1(0; -c); F_2(0; c);$                                                             | $F_1(-c; 0); F_2(c; 0);$                                                              | $F_1(0; -c); F_2(0; c);$                                                             |
| Ексцентриситет                       | $\varepsilon = 0$                                                                  | $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$                                                     | $\varepsilon = \frac{c}{b} < 1$                                                      | $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$                                                       | $\varepsilon = \frac{c}{b} > 1$                                                      |
| Рівняння директрис                   |                                                                                    | $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ або $x = \pm \frac{a^2}{c}$                         | $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$ або $y = \pm \frac{b^2}{c}$                          | $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ або $x = \pm \frac{a^2}{c}$                           | $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$ або $y = \pm \frac{b^2}{c}$                          |
| Рівняння асимптот                    |                                                                                    |                                                                                     |                                                                                      | $y = \pm \frac{b}{a} x$                                                               |                                                                                      |
| Рисунок                              |  |  |  |  |  |

Продовження таблиці 5.2

|                                       | Парабола ( $p > 0$ )                                                               |                                                                                     |                                                                                      |                                                                                      |
|---------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Рівняння                              | $y^2 = 2px$                                                                        | $y^2 = -2px$                                                                        | $x^2 = 2py$                                                                          | $x^2 = -2py$                                                                         |
| Відстань від вершини кривої до фокуса | $\frac{p}{2}$                                                                      | $\frac{p}{2}$                                                                       | $\frac{p}{2}$                                                                        | $\frac{p}{2}$                                                                        |
| Фокуси                                | $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$                                                     | $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$                                                     | $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$                                                       | $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$                                                      |
| Ексцентриситет                        | $\mathcal{E} = 1$                                                                  | $\mathcal{E} = 1$                                                                   | $\mathcal{E} = 1$                                                                    | $\mathcal{E} = 1$                                                                    |
| Рівняння директриси                   | $x = -\frac{p}{2}$                                                                 | $x = \frac{p}{2}$                                                                   | $y = -\frac{p}{2}$                                                                   | $y = \frac{p}{2}$                                                                    |
| Рисунок                               |  |  |  |  |

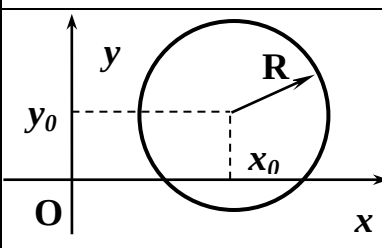
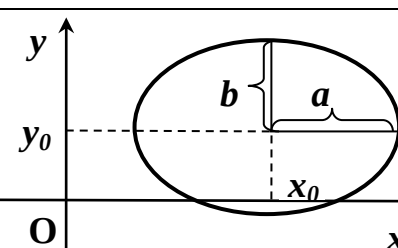
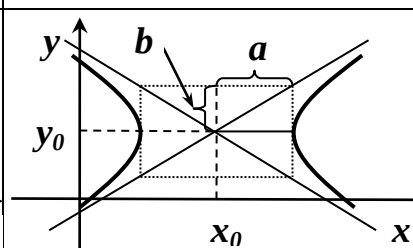
Якщо у загальному рівнянні 5.1 коефіцієнт  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  (відсутній доданок з добутком змінних), то таке рівняння називається неповним і має вигляд:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (5.2)$$

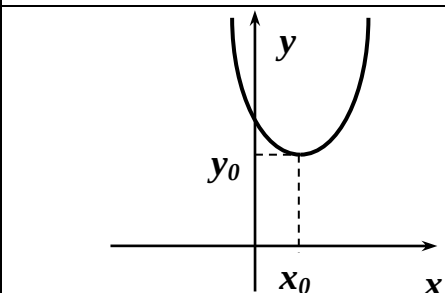
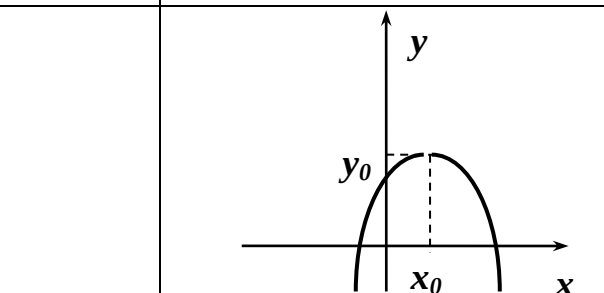
Виділивши у рівнянні 5.2 повні квадрати змінних отримаємо одне із рівнянь кривої з центром у т. С.  $(x_0; y_0)$  із таблиці 5.3.

Неповне рівняння 5.2 другого порядку за допомогою перепозначення змінних та паралельного переносу системи координат можна перетворити до канонічних рівнянь, що наведені в таблиці 5.2.

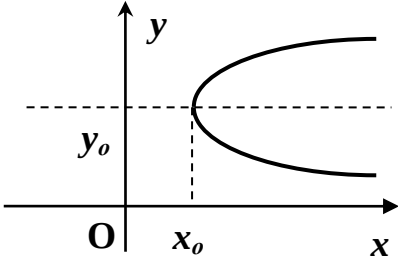
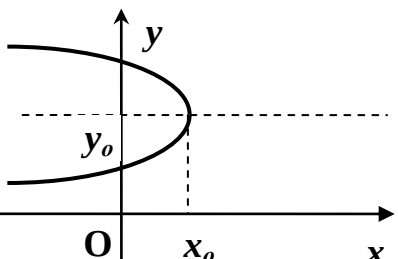
Таблиця 5.3. – рівняння кривих з центром у т. С.  $(x_0; y_0)$

| Коло                                                                                | Еліпс                                                                               | Гіпербола                                                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$                                                   | $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$                             | $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$                              |
|  |  |  |

Продовження таблиці 5.3.

| Парабола ( $p > 0$ )                                                                |                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$                                                         | $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$                                                         |
|  |  |

Продовження таблиці 5.3.

| Парабола ( $p > 0$ )                                                              |                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$                                                       | $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$                                                       |
|  |  |

**Завдання 5.** Привести рівняння кривої другого порядку

$$2x^2 + 3y^2 - 16x - 64 = 0$$

до канонічного вигляду, визначити основні числові характеристики: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис. Зробити рисунок.

*Розв'язання.*

Оскільки загальне рівняння кривої другого порядку має вигляд

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

то у нашому випадку маємо наступні значення коефіцієнтів:

$$A = 2; B = 0; C = 3; D = -16; E = 0; F = -64.$$

*Крок 1.* Визначити тип кривої. Для цього обчислимо дискримінант рівняння:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -16 \\ 0 & 3 & 0 \\ -16 & 0 & -64 \end{vmatrix} = -1152 \neq 0.$$

Оскільки  $\Delta \neq 0$ , то задана крива є не виродженою.

Обчислимо дискримінант старших членів рівняння:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

Отже, оскільки  $\delta > 0$ , то рівняння визначає фігуру еліптичного типу.

*Крок 2.* Виділити повні квадрати змінних.

У заданому рівнянні кривої другого порядку:

$$2x^2 + 3y^2 - 16x - 64 = 0.$$

необхідно виділити повні квадрати змінних скориставшись формулою

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2, \quad (5.3)$$

або

$$ax^2 \pm bx = a \left( x \pm \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a}, \quad (5.4)$$

Для зручності задане рівняння перепишемо у наступному вигляді:

$$(2x^2 - 16x) + 3y^2 = 64 \quad (5.5)$$

Для  $(2x^2 - 16x)$  застосуємо формулу (5.4), де  $a = 2$ ;  $b = 16$ :

$$2x^2 - 16x = 2 \left( x - \frac{16}{2 \cdot 2} \right)^2 - \frac{16^2}{4 \cdot 2} = 2(x - 4)^2 - 32.$$

Одержаний вираз підставимо у рівняння 5.5:

$$\begin{aligned} 2(x - 4)^2 - 32 + 3y^2 &= 64 \\ 2(x - 4)^2 + 3y^2 &= 96 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Розділимо усі члени рівняння (5.6) на 96:

$$\frac{2(x - 4)^2}{96} + \frac{3y^2}{96} = 1$$

Отримали рівняння

$$\frac{(x - 4)^2}{48} + \frac{y^2}{32} = 1 \quad (5.7)$$

Це рівняння еліпса (дивись таблицю 5.3) з центром у т.С(4;0).

Для будь якої алгебраїчної лінії другого порядку існує прямокутна система координат, у якій рівняння цієї лінії можна подати у *канонічному* вигляді (таблиця 5.2) та визначити її характеристики.

*Крок 3.* Перевизначити змінні та записати відповідне канонічне рівняння кривої.

Якщо зробити паралельний перенос осей координат, прийнявши за новий початок координат точку  $\tilde{O}(4; 0)$  та ввести нові змінні:

$$\tilde{x} = x - 4 \text{ та } \tilde{y} = y,$$

то відносно нових осей координат рівняння 5.7 набуде вигляду:

$$\frac{\tilde{x}^2}{48} + \frac{\tilde{y}^2}{32} = 1$$

або

$$\frac{\tilde{x}^2}{(4\sqrt{3})^2} + \frac{\tilde{y}^2}{(4\sqrt{2})^2} = 1 \quad (5.8).$$

Рівняння 5.8 є канонічним рівнянням еліпса (дивись таблицю 5.2).

*Крок 4.* Визначити основні характеристики еліпса (дивись таблицю 5.2).

1) Визначимо півосі еліпса:

$$a = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}; \quad b = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

2) Визначимо відстань від центра кривої до фокуса

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{48 - 32} = \sqrt{16} = 4$$

3.1) Визначимо координати фокусів в системі координат  $\tilde{xO}\tilde{y}$ :

$$\tilde{F}_1(-c; 0) = \tilde{F}_1(-4; 0); \quad \tilde{F}_2(c; 0) = \tilde{F}_2(4; 0).$$

3.2) Визначимо координати фокусів у вихідній системі координат  $xOy$ .

Оскільки

$$\tilde{x} = (x - 4),$$

то

$$\pm 4 = (x - 4),$$

тому

$$x_1 = 0 \text{ та } x_2 = 8.$$

Отже,

$$F_1(0;0); \quad F_2(8;0).$$

4.1) Визначимо рівняння директрис еліпса в системі координат  $\tilde{x}\tilde{O}\tilde{y}$ :

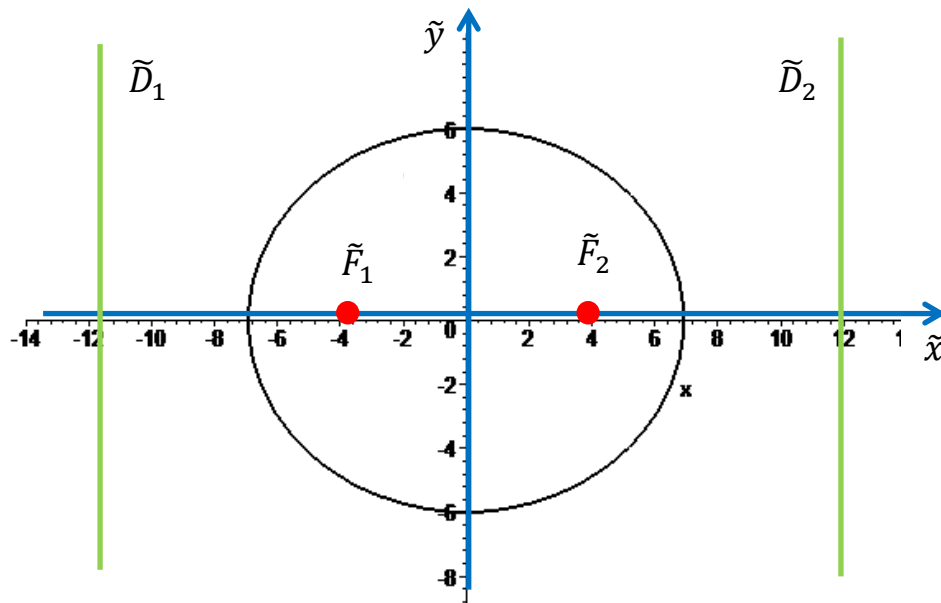
$$\tilde{D}_{1,2} : \tilde{x} = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{48}{4} = \pm 12.$$

4.2) Визначимо рівняння директрис у вихідній координатній системі  $xOy$ :

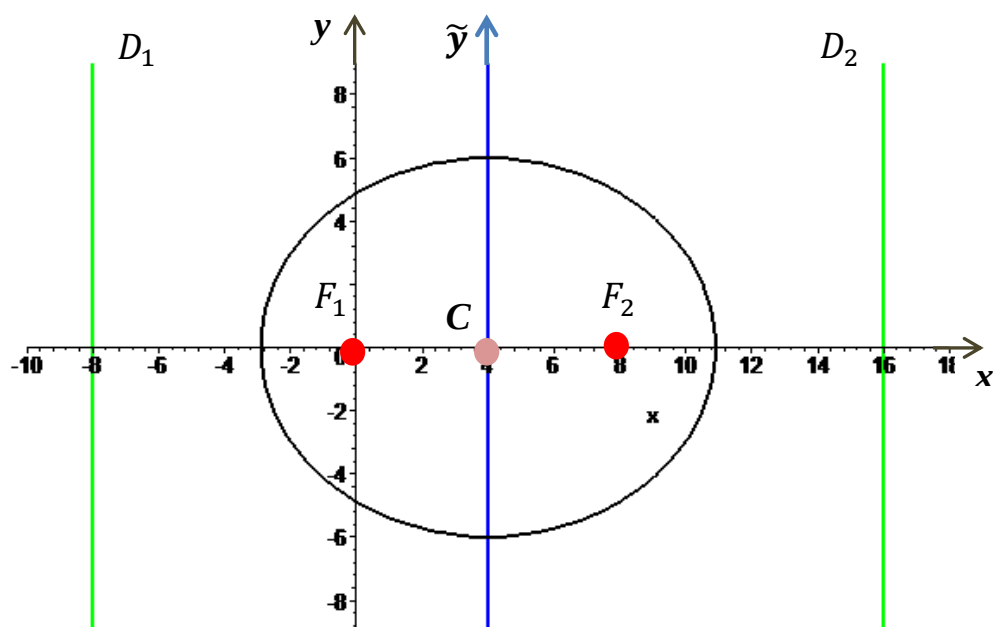
Оскільки  $\tilde{x} = (x - 4)$ , то звідси  $\pm 12 = (x - 4)$ .

Отже,  $x_1 = -8$  та  $x_2 = 16$ .

Крок 5. Побудувати криву у системи координат  $\tilde{x}\tilde{O}\tilde{y}$  :



Крок 6. Виконати перехід від координатної системи  $\tilde{x}O\tilde{y}$  до  $xOy$ , вважаючи  $x = \tilde{x} + 4$ . та  $y = \tilde{y}$ .



## ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

**Завдання 1.** Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера, методом оберненої матриці, методом Гаусса.

**Варіанти:**

$$1. \begin{cases} 6x + 3y - 5z = 0 \\ 9x + 4y - 7z = 3 \\ 14x + 6y - 11z = 6 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 9 \\ 4y + 11z = 1 \\ 7x - 5y = -1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x - 4y - z = 10 \\ 6x - 8y - 3z = 19 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 4x + 2y + 3z = 3 \\ 5x + y + z = 4 \\ x + 3y - 2z = -7 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 5x - 9y - 14z = 6 \\ x + 7y + 5z = 11 \\ 5x - 21y - 27z = -5 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 4x + y - 3z = -1 \\ 8x + 3y - 6z = -1 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 15 \\ x + y + 5z = 16 \\ 3x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 5x + 2y - z = 2 \\ 13x + 5y + 2z = 18 \\ x - 3y = -16 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x - 5y - 6z = 5 \\ -3x + 2y + 5z = 1 \\ 2x + 4y - 3z = -16 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 7y - 2z = -8 \\ 5x - 6y + 4z = 20 \\ 6x + 4y + 3z = 7 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x - 4y + 7z = 45 \\ 4x - 2y + 3z = 23 \\ 7x - 3y + 8z = 53 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 14x - 5y + 9z = 38 \\ 5x + y + 7z = 10 \\ 27x - 5y + 21z = 62 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 5x + 2y - z = 2 \\ 13x + 5y + 2z = 18 \\ x - 3y = -16 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} -2x + 3y + z = 14 \\ 2x + 5y - 3z = 8 \\ 3x - 4y + 2z = -16 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 3x + 3y - 5z = -2 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + 7z = 24 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x + 4y - 3z = -8 \\ x - y - z = 1 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 4x - 2y - 3z = 16 \\ 11x + 4z = 14 \\ 7y - 5z = 3 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 4x - 12y + 13z = 7 \\ 11x - 7y + 9z = -6 \\ 15x - 12y + 17z = -8 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x - 5z = 8 \\ x - 3y - 2z = -1 \\ 2x - y - 6z = 7 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x - 5y + 19z = 56 \\ x - 2y + 5z = 24 \\ 4x - 8y + 31z = 107 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 4x - 5y + 5z = 18 \\ 5x + y - z = 8 \\ 6x - 4y + 3z = 21 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 3x + 8y - z = -12 \\ 6x + 4y - z = -7 \\ 16x + 13y + z = -11 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x + 13y + z = 4 \\ 3x - 2y - 2z = -1 \\ 8x - y + 5z = 18 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 2x + 13y = 37 \\ 5x + 2y - 8z = 17 \\ 9x + 19y - 11z = 70 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 5x - 6y - 3z = 16 \\ 7x - 9y - 4z = 22 \\ 11x - 14y - 6z = 35 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ 5x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 2x + 4y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 5 \\ -2x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 6 \\ 4x + 2y + 5z = 5 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 2x - 2y + 3z = -1 \\ x - y + 2z = -1 \\ -2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} -3x - y + z = 4 \\ 2x - y + 2z = -5 \\ 2x - z = -3 \end{cases}$$

**Завдання 2.** Задані точки A, B, C. Обчислити:

- 1) кут між векторами  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$ ;
- 2) проекцію вектора  $\overrightarrow{AB}$  на вісь вектора  $\overrightarrow{AC}$ ;
- 3) площу паралелограма та площу трикутника, побудованих на векторах  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$ ;
- 4) об'єм тетраедра з вершинами в точках A, B, C, D та його висоту, опущену з т. D на грань ABC.

|            |                                                     |
|------------|-----------------------------------------------------|
| Варіант 1  | A(-1; 2; 4), B(3; 6; 8), C(1; 6; -3), D(0; 0; 5)    |
| Варіант 2  | A(6; 3; -5), B(9; 4; -7), C(4; 6; -1), D(7; 2; -3)  |
| Варіант 3  | A(-3; 4; -2), B(0; 4; 2), C(3; 3; -4), D(1; 5; 0)   |
| Варіант 4  | A(5; -6; 3), B(4; -1; 2), C(3; -2; 7), D(4; -3; 5)  |
| Варіант 5  | A(2; -2; -5), B(-1; 1; 2), C(-3; 4; 8), D(1; 2; 1)  |
| Варіант 6  | A(2; -1; -2), B(8; 2; 0), C(0; 3; 5), D(4; 1; 2)    |
| Варіант 7  | A(-3; 2; -2), B(6; 1; -2), C(8; 7; -1), D(4; 4; 0)  |
| Варіант 8  | A(-2; 5; 0), B(2; 2; -2), C(4; -5; -7), D(1; 1; 1)  |
| Варіант 9  | A(3; -3; 5), B(4; 1; 4), C(0; -3; 7), D(2; -1; 3)   |
| Варіант 10 | A(2; 6; -1), B(4; 0; 2), C(-8; 1; -3), D(-2; 3; 1)  |
| Варіант 11 | A(5; -4; 4), B(3; 1; 5), C(7; 9; -2), D(4; 2; 2)    |
| Варіант 12 | A(-3; 2; 1), B(2; 3; -5), C(0; 2; -7), D(-1; 1; -3) |
| Варіант 13 | A(2; 1; -2), B(3; -6; 0), C(4; 3; -1), D(2; -2; 1)  |
| Варіант 14 | A(0; 2; -3), B(3; -5; 1), C(6; 3; 7), D(2; 0; 2)    |
| Варіант 15 | A(3; -3; -1), B(4; 2; 0), C(-1; 2; 3), D(2; 0; 1)   |
| Варіант 16 | A(4; 5; 1), B(-1; 1; 2), C(4; -3; -5), D(2; 1; -1)  |
| Варіант 17 | A(3; 2; -2), B(0; -1; 8), C(-2; -2; 0), D(0; 0; 3)  |
| Варіант 18 | A(5; -4; 2), B(7; -2; 0), C(0; 3; 6), D(4; -1; 3)   |
| Варіант 19 | A(-2; 1; -1), B(0; 2; 2), C(-1; 4; -5), D(0; 3; 2)  |
| Варіант 20 | A(0; -6; -3), B(4; 1; 6), C(3; 5; 7), D(2; 0; 2)    |

|            |                                                       |
|------------|-------------------------------------------------------|
| Варіант 21 | A(4; -3; -2), B(3; -1; -5), C(1; 1; -1), D(2; -1; -3) |
| Варіант 22 | A(5; -6; 3), B(4; -1; 2), C(3; -2; 7), D(4; -3; 5)    |
| Варіант 23 | A(3; -5; 3), B(0; 9; 2), C(3; -5; 1), D(2; 5; 1)      |
| Варіант 24 | A(-4; 1; 1), B(2; 3; -2), C(8; -2; -3), D(3; 1; 0)    |
| Варіант 25 | A(5; 6; -2), B(3; 4; 1), C(3; -2; 7), D(4; 3; 2)      |
| Варіант 26 | A(2; -2; 0), B(-4; 1; 3), C(-3; 2; -3), D(0; 0; 1)    |
| Варіант 27 | A(-2; -1; 3), B(1; 4; -2), C(0; 3; 6), D(0; 2; 2)     |
| Варіант 28 | A(1; -1; 3), B(4; 5; -2), C(0; -2; 4), D(2; 3; 3)     |
| Варіант 29 | A(3; 3; -4), B(5; 6; 0), C(0; -1; 7), D(1; 0; 0)      |
| Варіант 30 | A(-4; 0; 1), B(1; -3; -2), C(5; -2; -1), D(2; 1; 0)   |

**Завдання 3.** Переконатися, що система векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  утворює базис у множині всіх векторів простору, і знайти розклад вектора  $\vec{x}$  в цьому базисі, якщо:

|            |                                                                                                              |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Варіант 1  | $\vec{x} = (-2; 4; 7), \quad \vec{p} = (0; 1; 2), \quad \vec{q} = (1; 0; 1), \quad \vec{r} = (-1; 2; 4).$    |
| Варіант 2. | $\vec{x} = (6; 12; -1); \quad \vec{p} = (1; 3; 0); \quad \vec{q} = (2; -1; 1); \quad \vec{r} = (0; -1; 2)$   |
| Варіант 3  | $\vec{x} = (1; -4; 4); \quad \vec{p} = (2; 1; -1); \quad \vec{q} = (0; 3; 2); \quad \vec{r} = (1; -1; 1)$    |
| Варіант 4  | $\vec{x} = (-9; 5; 5); \quad \vec{p} = (4; 1; 1); \quad \vec{q} = (2; 0; -3); \quad \vec{r} = (-1; 2; 1).$   |
| Варіант 5  | $\vec{x} = (-5; -5; 5); \quad \vec{p} = (-2; 0; 1); \quad \vec{q} = (1; 3; -1); \quad \vec{r} = (0; 4; 1).$  |
| Варіант 6  | $\vec{x} = (13; 2; 7); \quad \vec{p} = (5; 1; 0); \quad \vec{q} = (2; -1; 3); \quad \vec{r} = (1; 0; -1).$   |
| Варіант 7  | $\vec{x} = (-19; -1; 7); \quad \vec{p} = (0; 1; 1); \quad \vec{q} = (-2; 0; 1); \quad \vec{r} = (3; 1; 0).$  |
| Варіант 8  | $\vec{x} = (3; -3; 4); \quad \vec{p} = (1; 0; 2); \quad \vec{q} = (0; 1; 1); \quad \vec{r} = (2; -1; 4).$    |
| Варіант 9  | $\vec{x} = (3; 3; -1); \quad \vec{p} = (3; 1; 0); \quad \vec{q} = (-1; 2; 1); \quad \vec{r} = (-1; 0; 2).$   |
| Варіант 10 | $\vec{x} = (-1; 7; -4); \quad \vec{p} = (-1; 2; 1); \quad \vec{q} = (2; 0; 3); \quad \vec{r} = (1; 1; -1).$  |
| Варіант 11 | $\vec{x} = (6; 5; -14); \quad \vec{p} = (1; 1; 4); \quad \vec{q} = (0; -3; 2); \quad \vec{r} = (2; 1; -1).$  |
| Варіант 12 | $\vec{x} = (6; -1; 7); \quad \vec{p} = (1; -2; 0); \quad \vec{q} = (-1; 1; 3); \quad \vec{r} = (1; 0; 4).$   |
| Варіант 13 | $\vec{x} = (5; 15; 0); \quad \vec{p} = (1; 0; 5); \quad \vec{q} = (-1; 3; 2); \quad \vec{r} = (0; -1; 1).$   |
| Варіант 14 | $\vec{x} = (2; -1; 11); \quad \vec{p} = (1; 1; 0); \quad \vec{q} = (0; 1; -2); \quad \vec{r} = (1; 0; 3).$   |
| Варіант 15 | $\vec{x} = (11; 5; -3); \quad \vec{p} = (1; 0; 2); \quad \vec{q} = (-1; 0; 1); \quad \vec{r} = (2; 5; -3).$  |
| Варіант 16 | $\vec{x} = (8; 0; 5); \quad \vec{p} = (2; 0; 1); \quad \vec{q} = (1; 1; 0); \quad \vec{r} = (4; 1; 2).$      |
| Варіант 17 | $\vec{x} = (3; 1; 8); \quad \vec{p} = (0; 1; 3); \quad \vec{q} = (1; 2; -1); \quad \vec{r} = (2; 0; -1).$    |
| Варіант 18 | $\vec{x} = (8; 1; 12); \quad \vec{p} = (1; 2; -1); \quad \vec{q} = (3; 0; 2); \quad \vec{r} = (-1; 1; 1).$   |
| Варіант 19 | $\vec{x} = (-9; -8; -3); \quad \vec{p} = (1; 4; 1); \quad \vec{q} = (-3; 2; 0); \quad \vec{r} = (1; -1; 2).$ |

|            |                                                                                                                |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Варіант 20 | $\vec{x} = (-5; 9; -13); \quad \vec{p} = (0; 1; -2); \quad \vec{q} = (3; -1; 1); \quad \vec{r} = (4; 1; 0).$   |
| Варіант 21 | $\vec{x} = (-15; 5; 6); \quad \vec{p} = (0; 5; 1); \quad \vec{q} = (3; 2; -1); \quad \vec{r} = (-1; 1; 0).$    |
| Варіант 22 | $\vec{x} = (8; 9; 4); \quad \vec{p} = (1; 0; 1); \quad \vec{q} = (0; -2; 1); \quad \vec{r} = (1; 3; 0).$       |
| Варіант 23 | $\vec{x} = (23; -14; -30); \quad \vec{p} = (2; 1; 0); \quad \vec{q} = (1; -1; 0); \quad \vec{r} = (-3; 2; 5).$ |
| Варіант 24 | $\vec{x} = (3; 1; 3); \quad \vec{p} = (2; 1; 0); \quad \vec{q} = (1; 0; 1); \quad \vec{r} = (4; 2; 1).$        |
| Варіант 25 | $\vec{x} = (-1; 7; 0); \quad \vec{p} = (0; 3; 1); \quad \vec{q} = (1; -1; 2); \quad \vec{r} = (2; -1; 0).$     |
| Варіант 26 | $\vec{x} = (11; -1; 4); \quad \vec{p} = (1; -1; 2); \quad \vec{q} = (3; 2; 0); \quad \vec{r} = (-1; 1; 1).$    |
| Варіант 27 | $\vec{x} = (-13; 2; 18); \quad \vec{p} = (1; 1; 4); \quad \vec{q} = (-3; 0; 2); \quad \vec{r} = (1; 2; -1).$   |
| Варіант 28 | $\vec{x} = (0; -8; 9); \quad \vec{p} = (0; -2; 1); \quad \vec{q} = (3; 1; -1); \quad \vec{r} = (4; 0; 1).$     |
| Варіант 29 | $\vec{x} = (8; -7; -13); \quad \vec{p} = (0; 1; 5); \quad \vec{q} = (3; -1; 2); \quad \vec{r} = (-1; 0; 1).$   |
| Варіант 30 | $\vec{x} = (2; 7; 5); \quad \vec{p} = (1; 0; 1); \quad \vec{q} = (1; -2; 0); \quad \vec{r} = (0; 3; 1).$       |

**Завдання 4.** Для даних вершин трикутника  $ABC$  знайти:

- 1) рівняння сторони  $AB$ ;
- 2) рівняння висоти  $CH$ , проведеної до сторони  $AB$ ;
- 3) рівняння медіани  $AM$ , де т. $M$  середина сторони  $BC$ ;
- 4) точку  $N$  перетину медіани  $AM$  і висоти  $CH$ ;
- 5) рівняння прямої, що проходить через т.  $C$  паралельно стороні  $AB$ ;
- 6) відстань від точки  $C$  до прямої  $AB$ .

*Зауваження:* для кожного пункту виконати рисунок.

**Варіанти:**

- |                                     |                                      |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $A(-3; 0), B(3; 2), C(2; 5).$    | 16) $A(6; -9), B(10; -1), C(-4; 1).$ |
| 2) $A(-2; 0), B(4; 2), C(2; 6).$    | 17) $A(4; 1), B(-3; -1), C(7; -3).$  |
| 3) $A(-3; -2), B(14; 4), C(6; 8).$  | 18) $A(-4; 2), B(6; -4), C(4; 10).$  |
| 4) $A(-2; 0), B(2; 4), C(4; 0).$    | 19) $A(3; -1), B(11; 3), C(-6; 2).$  |
| 5) $A(1; -2), B(7; 1), C(3; 7).$    | 20) $A(-7; -2), B(-7; 4), C(5; -5).$ |
| 6) $A(-2; -3), B(1; 6), C(6; 1).$   | 21) $A(-1; -4), B(9; 6), C(-5; 4).$  |
| 7) $A(-4; 2), B(-6; 6), C(6; 2).$   | 22) $A(10; -2), B(4; -5), C(-3; 1).$ |
| 8) $A(4; -3), B(7; 3), C(1; 10).$   | 23) $A(-3; -1), B(-4; -5), C(8; 1).$ |
| 9) $A(4; -4), B(8; 2), C(3; 8).$    | 24) $A(-2; -6), B(-3; 5), C(4; 0).$  |
| 10) $A(-3; -3), B(5; -7), C(7; 7).$ | 25) $A(-7; -2), B(3; -8), C(-4; 6).$ |
| 11) $A(1; -6), B(3; 4), C(-3; 3).$  | 26) $A(0; 2), B(-7; -4), C(3; 2).$   |
| 12) $A(-4; 2), B(8; -6), C(2; 6).$  | 27) $A(7; 0), B(1; 4), C(-8; -4).$   |
| 13) $A(-5; 2), B(0; -4), C(5; 7).$  | 28) $A(1; -3), B(0; 7), C(-2; 4).$   |
| 14) $A(4; -4), B(6; 2), C(-1; 8).$  | 29) $A(-5; 1), B(8; -2), C(1; 4).$   |
| 15) $A(-3; 8), B(-6; 2), C(0; -5).$ | 30) $A(-4; 2), B(2; -5), C(5; 0).$   |

**Завдання 5.** Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду і визначити координати її центру, півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, і якщо крива має асимптоти, то і рівняння асимптот. Виконати рисунок.

|            |                                         |
|------------|-----------------------------------------|
| Варіант 1  | $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0.$ |
| Варіант 2. | $y^2 + 4y = 2x.$                        |
| Варіант 3  | $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0.$   |
| Варіант 4  | $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0.$      |
| Варіант 5  | $x^2 + 4x + 8 = 2y.$                    |
| Варіант 6  | $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0.$      |
| Варіант 7  | $x^2 + y^2 - 8y = 0.$                   |
| Варіант 8  | $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0.$   |
| Варіант 9  | $x^2 - 10x = 4y - 13.$                  |
| Варіант 10 | $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0.$   |
| Варіант 11 | $x = 2y^2 - 12y + 14.$                  |
| Варіант 12 | $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 8 = 0.$         |
| Варіант 13 | $x = y^2 + 8y + 9.$                     |
| Варіант 14 | $9x^2 + 4y^2 + 54x - 40y + 145 = 0.$    |
| Варіант 15 | $y = x^2 + 2x - 3.$                     |
| Варіант 16 | $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0.$      |
| Варіант 17 | $x = y^2 - 6y + 10.$                    |
| Варіант 18 | $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y = 24.$           |
| Варіант 19 | $y^2 - 2y - 2x + 1 = 0$                 |
| Варіант 20 | $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y = 3.$             |
| Варіант 21 | $y^2 - 8y = 4x.$                        |
| Варіант 22 | $2x^2 + 5y^2 - 12x + 10y + 13 = 0.$     |

|            |                                      |
|------------|--------------------------------------|
| Варіант 23 | $x^2 + y^2 - 6x = 0.$                |
| Варіант 24 | $y = x^2 - 4x + 5.$                  |
| Варіант 25 | $x^2 - y^2 + 6x + 4y - 4 = 0.$       |
| Варіант 26 | $x^2 + 6x + 5 = 2y.$                 |
| Варіант 27 | $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0.$      |
| Варіант 28 | $x = y^2 - 6y + 7.$                  |
| Варіант 29 | $x^2 + 9y^2 - 6x - 27 = 0.$          |
| Варіант 30 | $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0.$ |

## ЛІТЕРАТУРА

1. Басманов О.Є., Кириченко І.К., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Вища математика. – Харків: АПБУ, 2003. – 136 с.
2. Білоусова Л.І., Горонескуль М.М. Курс вищої математики у середовищі Maple : Навчальний посібник. – Х.: УЦЗУ, КП «Міська друкарня», 2009. – 412с.
3. Горонескуль М.М. Основи вищої математики. Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів. – Харків: НУЦЗУ, 2015- 125 с.
4. Мунтян В.К., Говаленков С.В. Вища математика. Методичні вказівки для самостійних занять. – Харків: НУЦЗУ, 2015
5. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. – Частина 1. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 552 с.

*Навчальне видання*

**Методичні рекомендації  
та варіанти завдань до виконання  
розрахунково-графічної роботи  
«Елементи лінійної і векторної алгебри  
та аналітичної геометрії»  
з навчальної дисципліни «Вища математика»  
для здобувачів вищої освіти  
за освітньо-професійними програмами  
«Пожежна безпека», «Цивільний захист» та «Охорона праці»**

Підписано до друку \_\_\_\_ 2024. Формат 60x84 1/16.  
Умовн.-друк. арк. 2,0.  
Вид. № \_\_\_\_/\_\_\_\_.

Сектор редакційно-видавничої діяльності  
Національного університету цивільного захисту України  
18034 м. Черкаси, вул. Онопрієнка, 8,  
[www.nuczu.edu.ua](http://www.nuczu.edu.ua)