

*Методичні матеріали до практичних занять з
дисципліни «Вища математика»
(частина 3)*

1. Ряди
2. Теорія ймовірностей та математична статистика

Ряди

Числові ряди

Числовим рядом називають послідовність чисел $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, з'єднаних між собою знаками плюс (або мінус), тобто

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \quad (57)$$

Числа u_i ($i = 1, 2, \dots$) називаються членами ряду, а u_n – загальним членом ряду.

Частинною сумою ряду називають суму S_n перших n членів ряду.

Збіжним називають числовий ряд, для якого виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad (58)$$

а границю S називають сумою ряду. Якщо умова (58) для ряду (57) не виконується, то такий ряд називають **розбіжним**.

Необхідною умовою збіжності ряду (57) є умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \quad (59)$$

Якщо умова (59) не виконується, то такий ряд є розбіжним. Часто необхідна умова (59) виконується, але не виконується при цьому умова (58) і тоді ряд є розбіжним.

При перевірці виконання умови (58) виникають значні труднощі при обчисленні послідовності частинних сум S_n . Існують достатні ознаки збіжності ряду (57), за допомогою яких значно простіше дослідити збіжність ряду.

Для **знакододатних числових рядів** зупинимось на таких ознаках збіжності:

1) **Ознака Даламбера**. Якщо для знакододатного ряду (57) існує границя відношення наступного члена до попереднього при необмеженому зростанні номера n , тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho, \quad (60)$$

то при $\rho < 1$ ряд збіжний, а при $\rho > 1$ ряд розбіжний. При $\rho = 1$ необхідно застосувати іншу ознаку.

2) **Радикальна ознака Коші**. Якщо для знакододатного ряду (57) існує границя виду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho, \quad (61)$$

то при $\rho < 1$ ряд збіжний, а при $\rho > 1$ ряд розбіжний. При $\rho = 1$ необхідно застосувати іншу ознаку.

3) **Ознака порівняння рядів**. Якщо один з двох знакододатних рядів $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжний (розбіжний) і виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k, \quad (k \neq 0, k \neq \infty),$$

то збіжним (розбіжним) є і другий ряд.

Приклад 43. Дослідити збіжність рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+5)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{15n-1}{6n+3} \right)^n.$$

Розв'язання. а) Застосуємо ознаку Даламбера. Для цього запишемо

$$u_n = \frac{3^n}{(n+5)!}, \quad u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{((n+1)+5)!} = \frac{3^{n+1}}{(n+6)!},$$

і знайдемо границю за формулою (60). Одержимо

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+6)!} : \frac{3^n}{(n+5)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot 3(n+5)!}{(n+6)! \cdot 3^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot 3(n+5)!}{(n+5)! \cdot (n+6) \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+6} = 0, \quad \rho = 0 < 1.$$

Ряд збіжний.

б) Застосуємо радикальну ознаку Коші. Обчислимо границю виду (61).

Одержимо:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{15n-1}{6n+3}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n-1}{6n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15 - \frac{1}{n}}{6 + \frac{3}{n}} = \frac{15}{6}, \quad \rho = \frac{15}{6} > 1.$$

Ряд розбіжний.

Для **знакозмінних рядів** достатньою є така ознака збіжності. Якщо для знакозмінного ряду $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ є збіжним ряд, який складений з абсолютних величин членів цього ряду $|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$, то знакозмінний ряд збіжний і таку його збіжність називають абсолютною.

Серед знакозмінних рядів окремо вирізняють знакочергові ряди виду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n. \quad (62)$$

Ознака Лейбніца. Якщо для ряду (62) абсолютні величини членів ряду спадні: $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$ і виконується умова $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то ряд збіжний, а його сума не більша першого члена ряду.

Зауваження. Якщо ряд із абсолютних величин членів ряду (62) є розбіжним, а умова Лейбніца виконується, то такий ряд називають умовно збіжним.

Приклад 44. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$.

Розв'язання. Перевіримо умови ознаки Лейбніца:

$$1) \frac{1}{\sqrt[3]{1 \cdot 2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{2 \cdot 3}} > \frac{1}{\sqrt[3]{3 \cdot 4}} > \dots > \frac{1}{\sqrt[3]{n \cdot (n+1)}} > \dots;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n \cdot (n+1)}} = 0.$$

Умови виконуються. Ряд збіжний.

Функціональні ряди

Функціональними рядами називаються ряди, членами яких є деякі функції

$u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$), визначені в області зміни аргументу x :

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \quad (63)$$

Функціональний ряд називається збіжним в точці x_0 , якщо при підстановці $x = x_0$ в функціональний ряд (63) одержимо числовий збіжний ряд, а точку x_0 називають точкою збіжності функціонального ряду. Сукупність всіх точок збіжності функціонального ряду називають областю його збіжності.

Частинним випадком функціональних рядів є степеневі ряди.

Степеневим рядом називають ряд виду

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad (64)$$

де a і коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ є сталі величини. Радіус збіжності степеневого ряду (64) обчислюється за формулою

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (65)$$

Областю збіжності степеневого ряду (64) є інтервал $(a-R, a+R)$, до якого можуть бути додані кінцеві точки $a-R$ і $a+R$.

Приклад 45. Знайти область збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+5} x^n$.

Розв'язання. За формулою (65) знайдемо радіус збіжності ряду.

$$a_n = \frac{n+3}{n+5}, \quad a_{n+1} = \frac{n+4}{n+6},$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+5} : \frac{n+4}{n+6} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)(n+6)}{(n+5)(n+4)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{n}\right) \left(1 + \frac{6}{n}\right)}{\left(1 + \frac{5}{n}\right) \left(1 + \frac{4}{n}\right)} = 1, \quad R = 1.$$

Одержали інтервал $(-1;1)$. Дослідимо ще збіжність ряду на кінцях цього інтервалу.

1) При $x = 1$ одержимо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+5} (1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+5},$$

де $u_n = \frac{n+3}{n+5}$. Перевіримо необхідну умову (59) збіжності числового ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{5}{n}} = 1 \neq 0.$$

Необхідна умова не виконується. Ряд розбіжний.

2) При $x = -1$ одержимо знакочерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n+5}$, який також

розбіжний, бо для нього не виконується необхідна умова збіжності ($\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1 \neq 0$) ознаки Лейбніца.

Тобто до інтервалу збіжності ряду не можна додати жодної кінцевої точки.

Відповідь. Областю збіжності степеневому ряду є інтервал $(-1;1)$.

Якщо функція $y = f(x)$ є сумою степеневих рядів

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots, \quad (66)$$

то такий ряд називають рядом Тейлора, а вираз (66) називають розвиненням функції у степеневий ряд. Якщо у виразі (66) $a = 0$, то такий ряд має вигляд

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots, \quad (67)$$

і називається рядом Маклорена для функції $f(x)$.

Розглянемо приклади розвинення у степеневі ряди деяких елементарних функцій.

Розвинути у степеневий ряд функцію $f(x) = e^x$. Знайдемо похідні даної функції:

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad f'''(x) = e^x, \dots, \quad f^{(n)}(x) = e^x, \dots$$

При $a = 0$ одержимо

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = e^0 = 1.$$

Одержані значення підставимо у ряд Маклорена (67). Одержимо розвинення функції у степеневий ряд

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots. \quad (68)$$

Аналогічно можна знайти розвинення інших функцій у степеневі ряди. Так

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots,$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (69)$$

Ряд (69) називають біноміальним рядом. Цей ряд збігається при $x \in (-1; 1)$.

Степеневі ряди мають широке застосування в точних та наближених обчисленнях функцій, інтегралів, наближеному розв'язуванні диференціальних рівнянь та інших випадках.

Приклад 46. Розкласти в степеневий ряд функцію $f(x) = e^{-x^2}$ і знайти його радіус збіжності.

Розв'язання. Позначимо $-x^2 = t$ і для функції e^t в силу формули (68) запишемо ряд

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots \quad (70)$$

При підстановці замість t його значення ($t = -x^2$) ряд (70) матиме вигляд

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \dots$$

За формулою (65) знайдемо радіус збіжності одержаного ряду. Враховуючи, що

коефіцієнти $|a_n| = \frac{1}{n!}$, $|a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)!}$, тоді

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n!} : \frac{1}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty,$$

$$R = \infty.$$

Ряд збіжний на всій числовій осі $(-\infty, +\infty)$.

Приклад 47. Розкладаючи підінтегральну функцію в ряд обчислити з точністю до 0,001 визначений інтеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

Розв'язання. Підінтегральну функцію $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} = (1+x^4)^{-\frac{1}{4}}$

розвинемо у біноміальний ряд, використовуючи формулу (69), яку перепишемо у вигляді

$$(1+t)^m = 1 + \frac{m}{1!}t + \frac{m(m-1)}{2!}t^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}t^3 + \dots$$

Позначимо $t = x^4$, $m = -\frac{1}{4}$ і одержимо таке розвинення для функції:

$$\begin{aligned} (1+x^4)^{-\frac{1}{4}} &= 1 + \frac{-\frac{1}{4}}{1!}x^4 + \frac{-\frac{1}{4}(-\frac{1}{4}-1)}{2!}x^8 + \frac{-\frac{1}{4}(-\frac{1}{4}-1)(-\frac{1}{4}-2)}{3!}x^{12} + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{4 \cdot 1!}x^4 + \frac{1 \cdot 5}{4^2 \cdot 2!}x^8 - \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4^3 \cdot 3!}x^{12} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{4^4 \cdot 4!}x^{16} - \dots \end{aligned}$$

Підставимо розвинення функції під знак інтеграла і після інтегрування обчислимо його наближено, взявши стільки членів, щоб решта ряду була меншою від 0,001. Щоб не одержати похибки від округлення, будемо брати чотири знаки після коми.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int_0^1 (1+x^4)^{-\frac{1}{4}} dx = \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{4 \cdot 1!}x^4 + \frac{1 \cdot 5}{4^2 \cdot 2!}x^8 - \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4^3 \cdot 3!}x^{12} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{4^4 \cdot 4!}x^{16} - \dots \right) dx = \\ &= \left(x - \frac{x^5}{5 \cdot 4 \cdot 1!} + \frac{5x^9}{9 \cdot 4^2 \cdot 2!} - \frac{5 \cdot 9 x^{13}}{13 \cdot 4^3 \cdot 3!} + \frac{5 \cdot 9 \cdot 13 x^{17}}{17 \cdot 4^4 \cdot 4!} - \dots \right) \Bigg|_0^1 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{1}{20} + \frac{5}{288} - \frac{45}{4992} + \frac{585}{104448} - \dots \approx 1 - 0,0500 + 0,0174 - 0,0090 + 0,0052 - 0,0004 = \\
&= (1 + 0,0174 + 0,0052) - (0,05 + 0,0090) = 1,0326 - 0,0590 = 0,9736 \approx 0,974.
\end{aligned}$$

Відповідь. $I \approx 0,974$.