

*Методичні матеріали до практичних занять
з дисципліни «Вища математика»
(частина 2)*

1. Невизначений інтеграл
2. Визначений інтеграл
3. Застосування визначених інтегралів
4. Функції багатьох змінних
5. Диференціальні рівняння

Невизначений інтеграл

В диференціальному численні розв'язували таку задачу: для заданої функції знайти її похідну. В інтегральному численні розв'язують обернену задачу: по заданій похідній відновити первісну функцію.

Невизначеним інтегралом для неперервної функції $f(x)$ називають множину всіх первісних функцій $F(x)$ і позначають

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Основні властивості невизначеного інтеграла:

$$1) \int kf(x)dx = k \int f(x)dx;$$

$$2) \int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx.$$

Таблиця основних інтегралів:

$$1. \int dx = x + C;$$

$$2. \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1);$$

$$3. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$$

$$4. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$$

$$5. \int e^u du = e^u + C;$$

$$6. \int \sin u du = -\cos u + C;$$

$$7. \int \cos u du = \sin u + C;$$

$$8. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$$

$$9. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$$

$$10. \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C;$$

$$11. \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$$

$$12. \int \operatorname{tg} u du = -\ln |\cos u| + C;$$

$$13. \int \operatorname{ctg} u du = \ln |\sin u| + C;$$

$$14. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$$

$$15. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C;$$

$$16. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$$

$$17. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.$$

Приклад 21. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2 + 12}{x^2 - 3} dx$.

Розв'язання. Виділимо цілу частину підінтегральної функції. Для цього поділимо чисельник на знаменник способом ділення многочлена на многочлен, або припишемо в чисельнику -3 та $+3$ і розглянемо суму дробів. Одержимо

$$\frac{x^2 - 3 + 3 + 12}{x^2 - 3} = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 3} + \frac{15}{x^2 - 3} = 1 + \frac{15}{x^2 - 3}.$$

$$\int \frac{x^2 + 12}{x^2 - 3} dx = \int \left(1 + \frac{15}{x^2 - 3} \right) dx = \int dx + 15 \int \frac{dx}{x^2 - 3} = x + \frac{15}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} \right| + C$$

.

Приклад 22. Знайти інтеграл $\int \frac{3x - 2}{\sqrt{5 - x^2}} dx$.

Розв'язання. Розглянемо різницю двох інтегралів і до кожного із них застосуємо відповідну формулу із таблиці інтегралів. Одержимо

$$\int \frac{3x - 2}{\sqrt{5 - x^2}} dx = 3 \int \frac{x dx}{\sqrt{5 - x^2}} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} = I,$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{5 - x^2}} = \left| \begin{array}{l} u = 5 - x^2 \\ du = -2x dx \end{array} \right| = \frac{1}{-2} \int \frac{-2x dx}{\sqrt{5 - x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{u} = -\sqrt{5 - x^2};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ a = \sqrt{5} \end{array} \right| = \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}};$$

$$I = 3 \left(-\sqrt{5 - x^2} \right) - 2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C = -3\sqrt{5 - x^2} - 2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C$$

.

Приклад 23. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 9}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у знаменнику підінтегральної функції і зможемо застосувати відповідну формулу із таблиці інтегралів. Одержимо

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 5x + 9} &= \left| \begin{aligned} x^2 + 5x + 9 &= \\ &= x^2 + 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 9 = \\ &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \end{aligned} \right| = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} = \\ &= \left| \begin{aligned} u &= x + \frac{5}{2} \\ du &= dx \\ a &= \frac{\sqrt{11}}{2} \end{aligned} \right| = \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C = \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 5}{\sqrt{11}} + C. \end{aligned}$$

Приклад 24. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}+5}$.

Розв'язання. Часто доводиться вводити заміну для спрощення обчислення інтегралу. Замінімо $\sqrt{x-3}$ на нову змінну. Одержимо

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{x-3}+5} &= \left| \begin{aligned} \sqrt{x-3} &= t, \quad dx = 2t dt \\ x-3 &= t^2, \quad x = t^2 + 3 \end{aligned} \right| = \int \frac{(t^2 + 3)2t dt}{t + 5} = \\ &= 2 \int \frac{t^3 + 3t}{t + 5} dt = 2 \int \left(t^2 - 5t + 28 - \frac{140}{t + 5} \right) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 - \frac{t^3 + 3t}{t^3 + 5t^2} \left| \begin{array}{r} t + 5 \\ \hline t^2 - 5t + 28 - \frac{140}{t + 5} \end{array} \right| \\
 - \frac{-5t^2 + 3t}{-5t^2 - 25t} \\
 - \frac{28t}{28t + 140} \\
 -140
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int t^2 dt - 10 \int t dt + 56 \int dt - 280 \int \frac{dt}{t+5} = \\
 &= 2 \frac{t^3}{3} - 10 \frac{t^2}{2} + 56t - 280 \ln|t+5| + C = \\
 &= \frac{2}{3} \sqrt{(x-3)^3} - 5(x-3) + \\
 &+ 56\sqrt{x-3} - 280 \ln|\sqrt{x-3} + 5| + C.
 \end{aligned}$$

Приклад 25. Знайти інтеграл $\int x^2 \cos 2x dx$.

Розв'язання. Серед методів інтегрування важливим є метод інтегрування частинами. Формула інтегрування частинами має вид

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (24)$$

При інтегруванні цю формулу застосовують один чи декілька раз. Застосуємо формулу для знаходження інтеграла:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos 2x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2, \, du = 2x \, dx \\ dv = \cos 2x \, dx, \, v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x \cdot 2x \, dx = \\
&= \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \int x \sin 2x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \, du = dx \\ dv = \sin 2x \, dx, \, v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \left(-\frac{1}{2} x \cos 2x - \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \right) = \frac{x^2}{2} \sin 2x + \\
&+ \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin 2x + \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.
\end{aligned}$$

Приклад 26. Знайти інтеграл $\int x^2 \ln(x+2) \, dx$.

Розв'язання. Для знаходження інтеграла застосуємо формулу (24). Одержимо

$$\int x^2 \ln(x+2) \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln(x+2), \, du = \frac{dx}{x+2}, \\ dv = x^2 \, dx, \, v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3} \ln(x+2) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x+2} =$$

$$\begin{array}{r|l}
 -x^3 & x+2 \\
 \hline
 x^3+2x^2 & x^2-2x+4-\frac{8}{x+2} \\
 -2x^2 & \\
 \hline
 -2x^2-4x & \\
 -4x & \\
 \hline
 4x+8 & \\
 -8 &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^3}{3} \ln|x+2| - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x+2} dx = \frac{x^3}{3} \ln|x+2| - \\
 & - \frac{1}{3} \int \left(x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2} \right) dx = \frac{x^3}{3} \ln|x+2| - \\
 & - \frac{1}{3} \int x^2 dx + \frac{2}{3} \int x dx - \frac{4}{3} \int dx + \frac{8}{3} \int \frac{dx}{x+2} = \\
 & = \frac{x^3}{3} \ln|x+2| - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3} x + \\
 & + \frac{8}{3} \ln|x+2| + C = \frac{x^3}{3} \ln|x+2| - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{3} - \frac{4x}{3} + \frac{8}{3} \ln|x+2| + C.
 \end{aligned}$$

Приклад 27. Знайти інтеграл $\int (e^{-3x} + \operatorname{ctg} 5x - \sqrt[3]{x} + 2) dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
 \int (e^{-3x} + \operatorname{ctg} 5x - \sqrt[3]{x} + 2) dx &= \int e^{-3x} dx + \int \operatorname{ctg} 5x dx - \int \sqrt[3]{x} dx + 2 \int dx = \\
 &= -\frac{1}{3} e^{-3x} - \frac{1}{5 \sin^2 5x} - \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + 2x + C = -\frac{1}{3} e^{-3x} - \frac{1}{5 \sin^2 5x} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + 2x + C.
 \end{aligned}$$

Визначений інтеграл

Для обчислення визначеного інтеграла застосовують формулу, яка зв'язує визначений інтеграл та первісну функцію. Ця формула має вигляд

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (25)$$

де $F(x)$ – первісна функція, а a та b – межі (границі) інтегрування і її називають формулою Ньютона-Лейбніца.

Приклад 28. Обчислити інтеграл $\int_0^1 e^{2x} dx$.

Розв'язання. При обчисленні визначеного інтеграла за формулою (25) необхідно знайти первісну функцію для функції e^{2x} . Одержимо

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (e^{2 \cdot 1} - e^0) = \frac{1}{2} (e^2 - 1).$$

Приклад 29. Обчислити інтеграл $\int_6^{11} \frac{dx}{\sqrt{x-2}+3}$.

Розв'язання. Для знаходження первісної в заданому інтегралі необхідно застосувати метод заміни змінної. Разом із заміною змінної поміняємо межі інтегрування. Одержимо

$$\begin{aligned}
& \int_6^{11} \frac{dx}{\sqrt{x-2}+3} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-2}=t, \ x=t^2+2, \text{ npu } x=6: t_1=\sqrt{6-2}=2, \\ x-2=t^2, \ dx=2t\,dt, \text{ npu } x=11: t_2=\sqrt{11-2}=3 \end{array} \right| = \\
& = \int_2^3 \frac{2t\,dt}{t+3} = 2 \int_2^3 \frac{(t+3)-3}{t+3} dt = 2 \left(\int_2^3 dt - 3 \int_2^3 \frac{dt}{t+3} \right) = 2t \Big|_2^3 - 6 \ln|t+3| \Big|_2^3 = \\
& = 2(3-2) - 6(\ln 6 - \ln 5) = 2 - 6 \ln \frac{6}{5}.
\end{aligned}$$

Застосування визначених інтегралів

Площу криволінійної трапеції для неперервної на сегменті $[a, b]$ функції $y = f(x) > 0$, згідно геометричного змісту інтеграла, обчислюють за формулою

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (27)$$

Площу криволінійного сектора в полярній системі координат обчислюють за формулою

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi, \quad (28)$$

де $\rho = \rho(\varphi)$ неперервна $\forall \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$.

Довжину дуги лінії на сегменті $[a, b]$ неперервної разом зі своєю похідною функції $y = f(x)$ обчислюють за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad (29)$$

або за формулою

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt, \quad (30)$$

якщо функція задана параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$.

У випадку, коли крива задана полярним рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, то

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi. \quad (31)$$

Об'єм тіла обертання криволінійної трапеції з основою $[a, b]$ навколо осі Ox , яка обмежена неперервною функцією $y = f(x)$, обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx. \quad (32)$$

Якщо криволінійна трапеція з основою $[c, d]$ обертається навколо осі Oy , то об'єм тіла обертання обчислюють за формулою

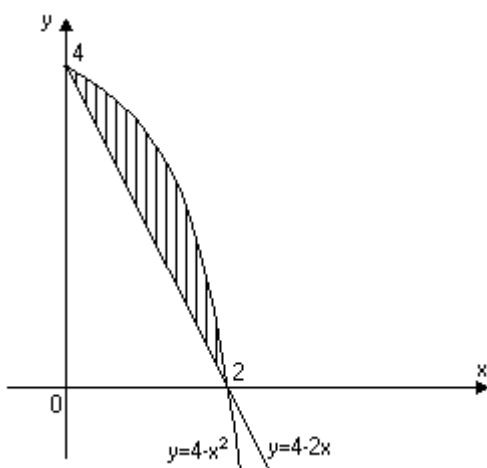
$$V = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 dy = \pi \int_c^d x^2 dy, \quad (33)$$

де $x = \varphi(y)$ неперервна для всіх $y \in [c, d]$.

Задача 2. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y = 4 - x^2$ та $y = 4 - 2x$.

Розв'язання. Зобразимо фігуру (рис. 10). Знайдемо точки перетину ліній. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 4 - 2x, \end{cases} \Rightarrow 4 - x^2 = 4 - 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0, \quad x_1 = 0, x_2 = 2.$$



Площа фігури дорівнює різниці площ двох криволінійних трапецій, площі яких обчислимо за формулою (27). Одержимо

$$\begin{aligned}
S &= S_2 - S_1 = \int_0^2 (4 - x^2) dx - \int_0^2 (4 - 2x) dx = \\
&= \int_0^2 (4 - x^2 - 4 + 2x) dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \\
&= \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \text{ (кв.од.)}
\end{aligned}$$

Задача 3. Обчислити площу фігури, яка обмежена лінією $\rho = 2 - \sin \varphi$.

Розв'язання. Побудуємо в полярних координатах лінію $\rho = 2 - \sin \varphi$ по точках (рис. 11).

φ	ρ
0	2
$\frac{\pi}{2}$	1
π	2
$\frac{3}{2}\pi$	3
2π	2

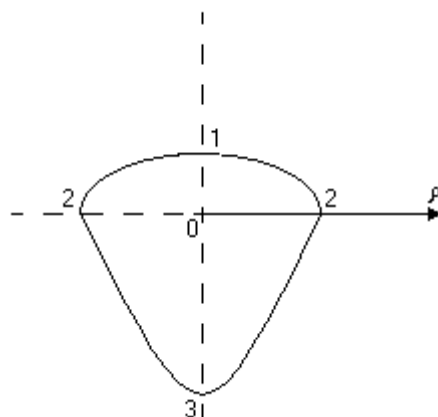


Рис. 11

Застосуємо
формулу (28).

Одержимо

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2 - \sin \varphi)^2 d\varphi = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4 - 4\sin \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(4 - 4\sin \varphi + \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - 4\sin \varphi - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) d\varphi = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} + 4\cos \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} \cdot 2\pi + 4\cos 2\pi - \frac{1}{4} \sin 4\pi - 4\cos 0 + \frac{1}{4} \sin 0 \right) = \\
&= \frac{1}{2} (9\pi + 4 - 4) = \frac{9}{2} \pi \text{ (кв.од.)}
\end{aligned}$$

Задача 4. Обчислити довжину дуги лінії $y = \sqrt{x^3}$, якщо $x \in [0, 1]$.

Розв'язання. Згідно формули (29) необхідно знати похідну функції. Знайдемо $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Тоді

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \frac{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{8}{27} \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3} \Big|_0^1 = \frac{8}{27} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}\right)^3} - 1 \right) = \frac{8}{27} \left(\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3} - 1 \right) = \frac{8}{27} \left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1 \right). \end{aligned}$$

Задача 5. Обчислити довжину однієї арки циклоїди

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Розв'язування. Довжину дуги лінії обчислимо за формулою (30). Для цього знайдемо x'_t та y'_t , а також $(x'_t)^2 + (y'_t)^2$. Одержимо

$$\begin{aligned} x'_t &= a(1 - \cos t), \quad y'_t = a \sin t, \quad (x'_t)^2 + (y'_t)^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = \\ &= a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = a^2(2 - 2\cos t) = 2a^2(1 - \cos t) = \\ &= 2a^2 \cdot 2\sin^2 \frac{t}{2} = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= -2a \cdot 2 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos \pi - \cos 0) = -4a(-1 - 1) = 8a. \end{aligned}$$

Задача 6. Обчислити об'єми тіл обертання навколо осей Ox та Oy фігури, яка обмежена лініями $4y = x^2$ та $y = x$.

Розв'язування. Обчислимо об'єми тіл, які утворюються при обертанні фігури навколо осей. Знайдемо точки перетину ліній:

$$\begin{cases} 4y = x^2, \\ y = x, \end{cases} \Rightarrow 4x = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x = 0, x(x-4) = 0, \begin{matrix} x_1 = 0, & x_2 = 4 \\ y_1 = 0, & y_2 = 4. \end{matrix}$$

Одержали дві точки з координатами $A(0;0)$ та $B(4;4)$. Зобразимо ці тіла схематично (рис. 12,13).

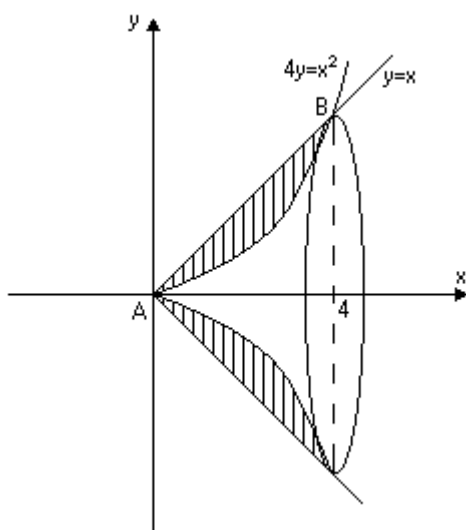


Рис. 12

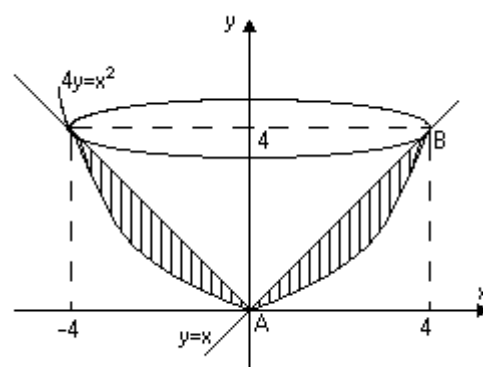


Рис. 13

1) Об'єм тіла обертання навколо осі Ox дорівнює різниці двох об'ємів тіл, які ми обчислимо за формулою (32). Одержимо

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 = \pi \int_0^4 x^2 dx - \pi \int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} \right)^2 dx = \pi \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 - \frac{\pi}{16} \int_0^4 x^4 dx = \\ &= \frac{\pi}{3} x^3 \Big|_0^4 - \frac{\pi}{16} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^4 = \frac{\pi}{3} \cdot 64 - \frac{\pi}{16} \cdot \frac{4^5}{5} = \frac{64\pi}{3} - \frac{64\pi}{5} = \\ &= \frac{64\pi(5-3)}{15} = \frac{128}{15} \pi \text{ (куб.од.)} \end{aligned}$$

2) Аналогічно обчислюємо об'єм тіла обертання навколо осі Oy , використавши формулу (33):

$$\begin{aligned}
 V = V_1 - V_2 &= -\pi \int_0^4 y^2 dy + \pi \int_0^4 4y dy = -\pi \frac{y^3}{3} \Big|_0^4 + 4\pi \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^4 = \\
 &= 2\pi y^2 \Big|_0^4 - \frac{\pi}{3} y^3 \Big|_0^4 = 2\pi \cdot 16 - \frac{\pi}{3} \cdot 16 = \frac{6\pi \cdot 16 - 16\pi}{3} = \\
 &= \frac{16\pi(6-1)}{3} = \frac{80}{3} \pi \text{ (куб.од.)}
 \end{aligned}$$

Функції багатьох змінних

Частинні похідні і повний диференціал

Функцією двох змінних називається правило (закон), по якому кожній парі чисел $(x, y) \in M$ відповідає єдине число $z \in N$. Множина M – область визначення функції, а N – множина значень функції.

Для функцій двох та багатьох змінних $z = f(x, y)$, $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ розглянемо частинні похідні.

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ по одній змінній називають скінченну границю виду:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x, y); \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x, y),$$

де $\Delta_x z$ та $\Delta_y z$ – частинний приріст функції по одній змінній.

Повним диференціалом функції багатьох змінних називається головна лінійна частина приросту функції. Для функції $z = f(x, y)$ повний диференціал має вигляд

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Повний диференціал функції багатьох змінних застосовується до наближених обчислень, вважаючи, що $\Delta z \approx dz$.

Частинні похідні знаходяться за правилами та формулами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи решту змінних сталими величинами.

Частинною похідною n-го порядку функції багатьох змінних по одній змінній називають першу похідну від $n - 1$ -ї похідної.

Приклад 32. Знайти частинні похідні другого порядку функції

$$z = x^5 y^2 - 2xy^3 + 3x - 5y + 11.$$

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні першого порядку по кожній змінній:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = 5x^4 y^2 - 2y^3 + 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = 2x^5 y - 6xy^2 - 5.$$

Від кожної частинної похідної першого порядку z'_x та z'_y знайдемо першу похідну по кожній змінній. Це будуть частинні похідні другого порядку і їх буде чотири:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{x^2} &= 20x^3 y^2; & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} &= 10x^4 y - 6y^2; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} &= 10x^4 y - 6y^2; & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 2x^5 - 12xy. \end{aligned}$$

Мішані похідні, які відрізняються порядком диференціювання, $z''_{xy} = z''_{yx}$, рівні між собою. Ця умова виконується у випадку їх неперервності.

Приклад 33. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}$, якщо $z = \ln(x^3 + 2y^3 - 2x + 1)$.

Розв'язання. Знайдемо частинну похідну функції тільки по x або по y , а потім від неї знайдемо першу похідну по іншій змінній.

Одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x &= \frac{1}{x^3 + 2y^3 - 2x + 1} \cdot (3x^2 - 2) = \frac{3x^2 - 2}{x^3 + 2y^3 - 2x + 1}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} &= \frac{0 - 6y^2(3x^2 - 2)}{(x^3 + 2y^3 - 2x + 1)^2} = -\frac{6y^2(3x^2 - 2)}{(x^3 + 2y^3 - 2x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Задача 7. Знайти рівняння прямої $y = ax + b$ методом найменших квадратів, користуючись таблицею значень

x	1	2	3	4	5
y	0,02	1,97	4,01	5,96	7,92

Розв'язання. Згідно методу найменших квадратів для знаходження параметрів a і b прямої використовують систему рівнянь:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (34)$$

Для простоти складання системи (34) складемо таблицю значень:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0,02	1	0,02
2	1,97	4	3,94
3	4,01	9	12,03
4	5,96	16	23,84
5	7,92	25	39,60
$\sum 15$	19,88	55	79,43

$$\begin{cases} 55a + 15b = 79,43, \\ + \quad 15a + 5b = 19,88, \end{cases} \cdot (-3)$$

$$10a = 79,43 - 3 \cdot 19,88 = 79,43 - 59,64 = 19,79,$$

$$a = 1,979;$$

$$5b = 19,88 - 1,979 \cdot 15 = 19,88 - 29,685 = -9,805,$$

$$b = -1,961.$$

Відповідь. Рівняння прямої має вигляд $y = 1,979x - 1,961$.

Екстремум функцій двох змінних

Поняття екстремуму (максимуму і мінімуму) для функцій багатьох змінних аналогічне поняттю для функції однієї змінної.

Точка $P_0(x_0, y_0) \in D$ для функції $z = f(x, y)$ називається точкою **максимуму**, якщо для довільних точок із її околу виконується умова $f(P_0) > f(P)$ і точкою **мінімуму**, якщо $f(P_0) < f(P)$.

Необхідними умовами існування екстремуму функції $z = f(x, y)$ в точці $P_0(x_0, y_0)$ є умови

$$z'_x(x_0, y_0) = 0, \quad z'_y(x_0, y_0) = 0. \quad (35)$$

Визначник виду

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{x^2} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{y^2} \end{vmatrix} \quad (36)$$

для функції $z = f(x, y)$ називається **визначником Гессе** або **гессіаном**.

Достатньою умовою існування екстремуму функції $z = f(x, y)$ в критичній точці $P_0(x_0, y_0)$ є умова $\Delta(P_0) > 0$, і якщо $z''_{x^2}(P_0) < 0$, то точка P_0 є точкою максимуму, а у випадку $z''_{x^2}(P_0) > 0$ – точкою мінімуму. У випадку, коли $\Delta(P_0) < 0$, ця умова є достатньою умовою відсутності екстремуму в критичній точці P_0 . Сумнівним є випадок $\Delta(P_0) = 0$. Тоді необхідні додаткові дослідження.

Приклад 34. Знайти екстремуми функції

$$z = x^3 + y^3 - 27x - 12y.$$

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні першого порядку:
 $z'_x = 3x^2 - 27$, $z'_y = 3y^2 - 12$. В силу умови (35) прирівнюємо ці похідні до нуля і, розв'язавши систему рівнянь, знаходимо критичні точки функції.

$$\begin{cases} 3x^2 - 27 = 0, \\ 3y^2 - 12 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 9 = 0, \\ y^2 - 4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 3, \\ y = \pm 4. \end{cases}$$

Одержали такі критичні точки: $P_1(3;4)$, $P_2(3;-4)$, $P_3(-3;4)$ і $P_4(-3;-4)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку: $z''_{x^2} = 6x$, $z''_{xy} = 0$,
 $z''_{y^2} = 6y$, $z''_{yx} = 0$. Підставимо ці похідні у визначник Гессе (36).

Одержимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy.$$

Обчислимо значення цього визначника в кожній точці:

$$1) P_1(3,4), \Delta(P_1) = \begin{vmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 24 \end{vmatrix} = 18 \cdot 24 > 0, z''_{x^2}(P_1) = 18 > 0,$$

$P_1(3;4)$ – точка мінімуму;

$$2) P_2(3,-4), \Delta(P_2) = \begin{vmatrix} 18 & 0 \\ 0 & -24 \end{vmatrix} = 18 \cdot (-24) < 0,$$

в точці $P_2(3;-4)$ відсутній екстремум;

$$3) P_3(-3,4), \Delta(P_3) = \begin{vmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 24 \end{vmatrix} = (-18) \cdot 24 < 0,$$

в точці $P_3(3;-4)$ відсутній екстремум;

4)

$$P_4(-3, -4), \Delta(P_4) = \begin{vmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -24 \end{vmatrix} = (-18) \cdot (-24) > 0, z''_{x^2}(P_4) = -18 < 0$$

,

$P_4(-3; -4)$ – точка максимуму.

Обчислимо значення екстремумів функції.

$$z_{\min}(P_1) = 3^3 + 4^3 - 27 \cdot 3 - 12 \cdot 4 = 27 + 64 - 81 - 48 = -38,$$

$$z_{\max}(P_4) = (-3)^3 + (-4)^3 + 27 \cdot 3 + 12 \cdot 4 = -27 - 64 + 81 + 48 = 38.$$

$$\underline{\text{Відповідь.}} \quad z_{\min}(3; 4) = -38, \quad z_{\max}(-3; -4) = 38.$$

Диференціальні рівняння

Звичайним диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну, функцію та її похідні. Порядок диференціального рівняння визначає найвища похідна, яка входить у рівняння. Розв'язком диференціального рівняння є всяка функція $y = f(x)$, яка при підстановці її у рівняння перетворює його у тотожність.

Диференціальне рівняння першого порядку має вид $F(x, y, y') = 0$ або $y' = f(x, y)$. Загальним розв'язком цього рівняння є функція виду $y = \varphi(x, C)$, яка при довільних значеннях сталої величини C є розв'язком цього рівняння. Геометрично функція $y = \varphi(x, C)$ описує множину інтегральних кривих. Для знаходження частинного (єдиного) розв'язку необхідно знати початкові умови, які для рівняння першого порядку записують у вигляді $y(x_0) = y_0$ або $y|_{x=x_0} = y_0$.

Не існує єдиного універсального методу, за допомогою якого можна розв'язати диференціальні рівняння першого порядку. Існує певний клас рівнянь, які можна розв'язати (проінтегрувати). Розглянемо такі рівняння.

Диференціальні рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ називаються рівняннями з відокремлюваними змінними, якщо їх можна звести до виду

$$y' = f_1(x) f_2(y). \quad (37)$$

Якщо записати $y' = \frac{dy}{dx}$, то одержимо $\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$, або

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx. \quad \text{Тут} \quad \text{змінні} \quad \text{відокремились.} \quad \text{Можемо}$$

проінтегрувати отриманий вираз. Одержимо

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C, \quad C = C_2 - C_1. \quad (38)$$

Вираз (38) називають загальним інтегралом диференціального рівняння (37).

Приклад 35. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy' + y = 0$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння відносно похідної y' .

Одержимо

$$y' = -\frac{y}{x}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Big| \cdot dx; \quad dy = -\frac{y}{x} dx; \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Змінні відокремились і можемо проінтегрувати вираз. Одержимо

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| + C_1 = -\ln|x| + C_2 \Rightarrow \ln|y| + \ln|x| = C_3, \quad C_3 = C_2 - C_1.$$

Сталу величину C_3 запишемо у вигляді $C_3 = \ln C$, тоді

$$\ln|y| + \ln|x| = \ln C \Rightarrow xy = \pm C, \quad \pm C = C_4, \quad xy = C_4 \Rightarrow y = \frac{C_4}{x}.$$

Однорідними рівняннями першого порядку називають рівняння виду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (39)$$

Для того, щоб рівняння (39) звести до рівняння з відокремлюваними змінними, вводять заміну змінної $y = xt$. Тоді

$y' = t + xt'$ і рівняння (39) можна переписати через змінну t .

Одержуємо

$$t + xt' = \varphi(t), \quad xt' = \varphi(t) - t, \quad t' = \frac{\varphi(t) - t}{x}.$$

Змінні відокремлюються і його вже можна розв'язати.

Приклад 36. Знайти загальний розв'язок рівняння $2xyy' = x^2 + y^2$.

Розв'язання. Розв'яжемо це рівняння відносно похідної y' ; одержимо однорідне рівняння

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Введемо заміну змінної $y = xt$, $y' = t + xt'$. Одержимо

$$t + xt' = \frac{x^2 + x^2t^2}{2x \cdot xt} = \frac{x^2(1+t^2)}{2x^2t} = \frac{1+t^2}{2t}.$$

Або

$$xt' = \frac{1+t^2}{2t} - t = \frac{1+t^2-2t^2}{2t} = \frac{1-t^2}{2t}; \quad t' = \frac{1-t^2}{2t} \cdot \frac{1}{x};$$

якщо позначимо $t' = \frac{dt}{dx}$, то одержимо вираз, який можна

інтегрувати. Маємо

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \Rightarrow dt = \frac{1-t^2}{2t} \cdot \frac{1}{x} dx \Big| : \frac{1-t^2}{2t} \Rightarrow \frac{2t dt}{1-t^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{2t dt}{1-t^2} = \int \frac{dx}{x} + C_1 \Rightarrow -\ln|1-t^2| = \ln|x| + C_1; \quad C_1 = \ln C, \quad \ln|x| + \ln|1-t^2| = \ln C \Rightarrow \\ \Rightarrow x(1-t^2) = C.$$

Повернемося до старої змінної, тобто підставимо замість t його значення $t = \frac{y}{x}$. Одержуємо загальний розв'язок у вигляді

$$x \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \right) = C \Rightarrow x \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2} = C \Rightarrow x^2 - y^2 = Cx.$$

Лінійними рівняннями першого порядку називають рівняння виду

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x), \quad (40)$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – задані функції.

Одним із способів розв'язування лінійних рівнянь є метод знаходження розв'язку рівняння (40) у вигляді добутку двох функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$, тобто $y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$; $y' = u'v + v'u$.

Тоді рівняння (40) можна переписати у вигляді

$$u'v + v'u + P(x)uv = Q(x), \quad u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x). \quad (41)$$

На функцію $v = v(x)$ накладають таку умову, щоб вираз

$$v' + P(x)v = 0. \quad (42)$$

Замість рівняння (41) одержуємо рівняння

$$u'v = Q(x). \quad (43)$$

Рівняння (42) є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'язавши його, одержуємо функцію $v = v(x)$. Підставимо цю функцію у рівняння (43) і одержимо рівняння з відокремлюваними змінними, для якого зможемо знайти загальний розв'язок у вигляді $u = u(x, C)$.

Тоді загальний розв'язок лінійного рівняння (40) запишемо у вигляді

$$y = v(x) \cdot u(x, C).$$

Зауваження. Тим самим методом можна розв'язувати рівняння виду

$$y' + yP(x) = Q(x)y^\alpha,$$

де α – довільне число і яке називають рівнянням Бернуллі.

Приклад 37. Розв'язати рівняння $y' - \frac{y}{x} = x^2$.

Розв'язання. Це лінійне рівняння першого порядку. Будемо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді $y = u \cdot v$, $y' = u'v + v'u$.

Після підстановки цієї заміни у рівняння одержимо таке рівняння:

$$u'v + v'u - \frac{uv}{x} = x^2, \quad u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x^2.$$

Прирівняємо до нуля вираз у круглій дужці $v' - \frac{v}{x} = 0$. Залишилося

рівняння виду $u'v = x^2$. Знайдемо розв'язок рівняння $v' = \frac{v}{x}$:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}; \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}; \quad \ln|v| = \ln|x|, \quad v = x.$$

Підставимо одержане значення v у рівняння $u'v = x^2$.
Одержимо

$$u'x = x^2, \quad u' = x, \quad \frac{du}{dx} = x, \quad du = x dx, \quad \int du = \int x dx + C, \quad u = \frac{x^2}{2} + C.$$

Загальний розв'язок шуканого рівняння має вигляд

$$y = u \cdot v = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)x, \quad y = x\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

Диференціальне рівняння другого порядку має вид $F(x, y, y', y'') = 0$ або $y'' = f(x, y, y')$, а початкові умови записують у вигляді $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$.

Лінійне рівняння другого порядку має вид

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x), \quad (44)$$

де $a_0(x), a_1(x), a_2(x), b(x)$ – деякі неперервні функції, а $a_0(x) \neq 0$. Якщо $b(x) = 0$, то лінійне рівняння

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad (45)$$

називають лінійним однорідним.

Структура загального розв'язку для рівняння (45) має вигляд

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (46)$$

де C_1, C_2 – сталі величини, а $y_1 = y_1(x)$ та $y_2 = y_2(x)$ – функції, які складають фундаментальну систему розв'язків для цього рівняння.

Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (44) дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язку $\tilde{y}(x)$ неоднорідного рівняння і записується у вигляді

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \tilde{y}(x). \quad (47)$$

Лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами має вид

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (48)$$

де p, q – сталі величини.

Якщо розв'язок рівняння (48) шукати у вигляді функції $y = e^{kx}$, то характеристичне рівняння для цього рівняння має вид

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (49)$$

Якщо корені характеристичного рівняння (49):

1) дійсні різні $k_1 \neq k_2$, то загальний розв'язок рівняння (48) записують у вигляді

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}; \quad (50)$$

2) дійсні рівні $k_1 = k_2 = k$, то загальний розв'язок рівняння (48) записують у вигляді

$$y = e^{kx} (C_1 + C_2 x); \quad (51)$$

3) комплексно спряжені $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ (i – уявна одиниця), то загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (52)$$

Частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами виду

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (53)$$

де $f(x)$ – неперервна функція, можна знайти методом варіації сталої, або іншими частинними методами.

Приклад 38. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' + y' - 2y = 0$, який задовольняє умовам $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння для заданого диференціального рівняння за формулою (49). Одержуємо

$$k^2 + k - 2 = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -2.$$

Корені дійсні різні. Тепер за формулою (50) запишемо загальний розв'язок

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Для знаходження констант C_1 та C_2 підставимо початкові умови в загальний розв'язок та його похідну y' : $y' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}$.

Одержимо

$$1 = C_1 e^0 + C_2 e^0, \quad 3 = C_1 e^0 - 2C_2 e^0,$$

або таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 - 2C_2 = 3, \end{cases} \Rightarrow 3C_2 = -2, C_2 = -\frac{2}{3}, C_1 = 1 - C_2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Відповідь. Частинний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = -\frac{2}{3}e^x + \frac{5}{3}e^{-2x}.$$

Приклад 39. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння для даного рівняння має вигляд

$$k^2 + 2k + 10 = 0.$$

Корені цього квадратного рівняння будуть уявними (комплексно спряженими):

$$k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-10} = -1 \pm \sqrt{-9} = -1 \pm \sqrt{9 \cdot (-1)} = -1 \pm 3i, \quad k_{1,2} = -1 \pm 3i,$$

де $\sqrt{-1} = i$. Згідно формули (52) загальний розв'язок рівняння, враховуючи, що $\alpha = -1$, $\beta = 3$, має вигляд

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Приклад 40. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 6y' + 9y = 0$, який задовольняє умовам $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$.

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння для даного диференціального рівняння і знайдемо його корені:

$$k^2 - 6k + 9 = 0, (k - 3)^2 = 0, k_{1,2} = 3.$$

Корені дійсні рівні $k_1 = k_2 = 3$. Тому згідно формули (51) загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = e^{3x} (C_1 + C_2 x).$$

Враховуючи початкові умови, обчислимо сталі величини C_1 та C_2 .

Так

$$y' = 3e^{3x} (C_1 + C_2 x) + e^{3x} \cdot C_2.$$

Тоді

$$\begin{cases} -2 = e^0 (C_1 + 0), \\ 1 = 3e^0 (C_1 + 0) + C_2 e^0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2, & C_2 = 7, \\ 3C_1 + C_2 = 1, & C_1 = -2. \end{cases}$$

Відповідь. Частинний розв'язок рівняння має вигляд $y = e^{3x} (7x - 2)$.

Наведемо тепер метод невизначених коефіцієнтів для знаходження розв'язку лінійного неоднорідного рівняння 2 порядку зі сталими коефіцієнтами і з правою частиною спеціального вигляду.

Розглянемо рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

I. Якщо $f(x) = P_n(x)$, тобто многочлен n -го степеня, то тоді частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\tilde{y}(x) = Q_n(x) \cdot x^r, \quad (54)$$

де $Q_n(x)$ – многочлен n -го степеня; $r=0$, якщо серед коренів характеристичного рівняння немає числа 0 , $r=1$, якщо $k=0$ є одним з коренів характеристичного рівняння.

II. Якщо $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$, тоді частинний розв’язок шукатимемо у вигляді

$$\tilde{y}(x) = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x) \cdot x^r, \quad (55)$$

де $Q_n(x)$ – многочлен n -го степеня; $r=0$, якщо жоден корінь характеристичного рівняння не співпадає з α , $r=1$, якщо один корінь характеристичного рівняння співпадає з α , $r=2$, якщо обидва корені характеристичного рівняння дорівнюють α .

III. Якщо $f(x) = e^{\alpha x} \cdot (M \cos \beta x + N \sin \beta x)$, тоді частинний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\tilde{y}(x) = e^{\alpha x} \cdot (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \cdot x^r, \quad (56)$$

де $r=0$, якщо числа $\alpha \pm i\beta$ не є коренями характеристичного рівняння, $r=1$, якщо $\alpha \pm i\beta$ – це корені характеристичного рівняння.

Застосування методу покажемо на прикладі.

Приклад 41. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння $y'' - 2y' + y = x^2 + 1$, який задовольняє початковим умовам $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Розв’язання. Відповідне однорідне рівняння має вигляд $y'' - 2y' + y = 0$, його характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$, корінь $k=1$ – кратний, отже загальний розв’язок однорідного рівняння має вигляд:

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^x \cdot x = e^x (C_1 + C_2 x).$$

Оскільки $f(x) = x^2 + 1$, тобто многочлен другого степеня, то згідно (54) шукаємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C) \cdot x^0 = Ax^2 + Bx + C.$$

Тут $r = 0$, тому що 0 не є коренем характеристичного рівняння.

Продиференціюємо $\tilde{y}$ двічі та підставимо отримані вирази в диференціальне рівняння:

$$\tilde{y}' = 2Ax + B, \quad \tilde{y}'' = 2A.$$

Отримаємо тотожність

$$2A - 2(2Ax + B) + Ax^2 + Bx + C = x^2 + 1.$$

Зведемо подібні члени:

$$Ax^2 + (B - 4A)x + (C + 2A - 2B) = x^2 + 1.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x ; тоді маємо:

$$\begin{cases} A = 1, & A = 1, \\ B - 4A = 0, & \Rightarrow B = 4, \\ C + 2A - 2B = 1, & C = 7. \end{cases}$$

Таким чином, $\tilde{y} = x^2 + 4x + 7$.

Згідно (47), загальний розв'язок має вигляд

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = e^x (C_1 + C_2 x) + x^2 + 4x + 7.$$

Знайдемо тепер частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам. Для цього підставимо в загальний розв'язок $x = 0$, $y = 1$; отримаємо

$$1 = e^0 (C_1 + C_2 \cdot 0) + 7 = C_1 + 7,$$

отже $C_1 = -6$. Продиференціюємо тепер y :

$$y' = e^x (C_1 + C_2 x) + e^x \cdot C_2 + 2x + 4$$

і підставимо початкові умови $x=0$; $y'=0$:

$$0 = e^0 (C_1 + 0) + e^0 \cdot C_2 + 4,$$

отже $0 = -6 + C_2 + 4$, звідки $C_2 = 2$. Остаточного маємо відповідь:
частинний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = e^x (-6 + 2x) + x^2 + 4x + 7.$$

Приклад 42. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 4\sin 2x$, який задовольняє початковим умовам: $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

Розв'язання. Відповідне однорідне рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = 0,$$

його характеристичне рівняння $k^2 - 3k + 2 = 0$, корені якого $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, отже загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x.$$

Тепер, оскільки $f(x) = 4\sin 2x$, то згідно (56) маємо $\alpha = 0$, $\beta = 2$; частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = (A \cos 2x + B \sin 2x) \cdot x^0 = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Тут $r = 0$, оскільки $\pm 2i$ не є коренем характеристичного рівняння. Тепер диференціюємо $\tilde{y}$ двічі:

$$\tilde{y}' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x;$$

$$\tilde{y}'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

Підставимо отримані вирази в рівняння:

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 3(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + 2A \cos 2x + 2B \sin 2x = 4 \sin 2x$$

.

Зведемо подібні члени і прирівняємо коефіцієнти при відповідних членах:

$$\begin{aligned} \cos 2x(-4A - 6B + 2A) + \sin 2x(-4B + 6A + 2B) &= 4\sin 2x \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} -6B - 2A = 0, \\ -2B + 6A = 4, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} A = -3B, \\ -2B - 18B = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{5} = 0,6 \\ B = -\frac{1}{5} = -0,2 \end{cases} \end{aligned}$$

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння є

$$\tilde{y} = 0,6\cos 2x - 0,2\sin 2x.$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння запишемо у вигляді

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + 0,6\cos 2x - 0,2\sin 2x.$$

Знайдемо тепер частинний розв'язок, що задовольняє початковим умовам. Підставимо $x = 0$, $y = -1$ в розв'язок:

$$-1 = C_1 + C_2 + 0,6.$$

Продиференціюємо y та підставимо в отриманий вираз $x = 0$, $y' = 1$:

$$\begin{aligned} y' &= 2C_1 e^{2x} + C_2 e^x - 1,2\sin 2x - 0,4\cos 2x, \\ 1 &= 2C_1 + C_2 - 0,4. \end{aligned}$$

Отже, для знаходження C_1 і C_2 маємо систему

$$\begin{cases} -1,6 = C_1 + C_2, \\ 1,4 = 2C_1 + C_2. \end{cases}$$

Відніmemo від другого рівняння системи перше:

$$1,4 + 1,6 = 2C_1 - C_1 + C_2 - C_2 \Rightarrow 3 = C_1,$$

отже, з першого рівняння тоді

$$C_2 = -1,6 - C_1 = -4,6.$$

Запишемо остаточну відповідь: частинний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = 3e^{2x} - 4,6 \cdot e^x + 0,6 \cos 2x - 0,2 \sin 2x.$$