

Зміст	3
Передмова	7
Вступ	8
Розділ 1. Матриці та визначники	11
1.1. Матриці.	11
1.1.1. Види матриць.	11
1.1.2. Означення дій над матрицями.	14
1.1.3. Властивості додавання матриць та множення матриці на число.	16
1.1.4. Символи суми.	16
1.1.5. Властивості множення матриць.	17
1.1.6. Властивості транспонування.	18
1.1.7. Обернена матриця у випадку квадратних матриць 2-го порядку.	19
1.1.8. Подібні матриці.	21
1.2. Визначники та їх властивості.	22
1.2.1. Властивості визначників.	23
1.2.2. Мінор і алгебраїчні доповнення визначника.	24
Вправи для самостійного розв'язування.	25
Розділ 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).	27
2.1. Система двох лінійних рівнянь з двома невідомими.	27
2.2. Системи лінійних рівнянь: основні означення.	28
2.3. Розв'язування СЛАР матричним способом.	29
2.4. Розв'язування СЛАР методом Крамера.	30
2.5. Ранг матриці. Прямокутні СЛАР.	32
2.5.1. Ранг матриці.	32
2.5.2. Теорема Кронекера–Капеллі.	32
2.6. Розв'язування СЛАР методом Гаусса.	33
Вправи для самостійного розв'язування.	34
Розділ 3. Вектори.	36
3.1. Основні поняття, означення.	36
3.2. Лінійні операції над векторами.	36
3.3. Лінійна комбінація векторів.	37
3.4. Базис. Афінна та декартова системи координат.	37
3.5. Скалярний добуток векторів.	38
3.6. Векторний добуток векторів.	39
3.7. Мішаний добуток векторів.	40
Вправи для самостійного розв'язування.	41
Розділ 4. Аналітична геометрія.	43
4.1. Пряма лінія на площині.	43
4.2. Площина і пряма у просторі.	46
4.2.1. Площина.	46
4.2.2. Види рівнянь прямої.	46
4.2.3. Кут між прямими у просторі.	47
4.2.4. Взаємне розміщення прямої і площини у просторі.	48
4.2.5. Кут між площиною і прямою.	49

Вправи для самостійного розв'язування.	51
4.3. Криві другого порядку.	53
4.3.1. Еліпс та його канонічне рівняння. Властивості.	53
4.3.2. Гіпербола та її канонічне рівняння. Асимптоти гіперболи.	54
4.3.3. Парабола та її канонічне рівняння. Властивості.	55
4.3.4. Системи координат: полярна, циліндрична, сферична.	56
4.4. Поверхні другого порядку.	57
4.4.1. Еліпсоїд.	57
4.4.2. Гіперболоїд.	58
4.4.3. Параболоїд.	59
4.4.4. Конус другого порядку.	60
4.4.5. Циліндри.	60
Вправи для самостійного розв'язування.	61
Розділ 5. Ряди.	63
5.1. Основні поняття числових рядів.	63
5.2. Необхідні і достатні умови збіжності числових рядів.	64
5.3. Властивості дій з рядами.	66
5.4. Ознаки збіжності числових рядів.	66
5.4.1. Необхідна і достатня умова збіжності ряду з додатніми членами.	66
5.4.2. Ознаки порівняння.	67
5.4.3. Ознака Даламбера.	68
5.4.4. Радикальна ознака збіжності Коші.	70
5.4.5. Інтегральна ознака збіжності Коші.	71
5.5. Знакозмінні числові ряди.	72
5.5.1. Знакопочергові ряди.	72
5.5.2. Абсолютна й умовна збіжність.	73
5.6. Функціональні ряди.	74
5.6.1. Поняття функціонального ряду.	74
5.6.2. Властивості рівномірно збіжних рядів.	75
5.7. Степеневі ряди.	76
5.7.1. Інтервал і радіус збіжності степеневих рядів.	76
5.7.2. Диференціювання та інтегрування степеневих рядів.	78
5.7.3. Зображення функцій степеневими рядами.	
Ряди Тейлора і Маклорена.	79
5.7.4. Ряд Маклорена для деяких елементарних функцій.	80
5.8. Застосування рядів для наближених обчислень.	81
5.9. Ряд Фур'є.	83
Термінологічний словник ключових понять.	84
Приклади розв'язування задач.	84
Теми рефератів.	87
Вправи для самостійного розв'язування.	87
Розділ 6. Диференціальні рівняння.	90
6.1. Основні поняття диференціальних рівнянь.	90
6.1.1. Попередній аналіз задач, що приводять до	

диференціальних рівнянь. Основні означення.	90
6.1.2. Властивості загального розв'язку.	91
6.1.3. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку.	92
6.1.4. Геометричний зміст диференціальних рівнянь першого порядку.	93
6.2. Найпростіші диференціальні рівняння першого порядку.	94
6.2.1. Рівняння з відокремлюваними змінними.	94
6.2.2. Лінійні рівняння.	96
6.3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.	97
6.4. Лінійні диференціальні рівняння.	98
6.4.1. Рівняння Бернуллі.	100
6.5. Диференціальні рівняння у повних диференціалах.	101
6.6. Особливі точки та особливі розв'язки рівняння першого порядку.	103
6.7. Найпростіші диференціальні рівняння вищих порядків.	104
6.7.1. Основні поняття.	104
6.7.2. Рівняння, що допускають послідовне інтегрування.	
Рівняння виду $y^{(n)}=f(x)$.	104
6.7.3. Рівняння, що допускають пониження порядку.	105
6.8. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.	107
6.8.1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.	107
6.8.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.	108
6.9. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку зі змінними коефіцієнтами, які зводяться до рівнянь зі сталими k -ми	110
6.10. Системи диференціальних рівнянь.	111
6.10.1. Нормальні системи диференціальних рівнянь.	111
6.10.2. Нормальні системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.	112
Вправи для самостійного розв'язування.	115
Розділ 7. Операційне числення.	117
7.1. Означення функції-оригінала та її зображення Лапласа.	117
7.2.Зображення найпростіших функцій.	119
7.3. Властивості перетворення Лапласа.	120
7.3.1. Лінійність перетворення Лапласа.	120
7.3.2. Імпульсні функції.	121
7.3.3. Складені функції.	122
7.3.4. Періодичні функції.	123
7.3.5. Інтегрування оригінала.	123
7.3.6. Диференціювання оригінала.	124
7.3.7. Інтегрування зображення.	124
7.3.8. Диференціювання зображення.	125
7.4. Таблиця стандартних зображень.	127

Вправи для самостійного розв'язування.	127
Розділ 8. Теорія ймовірностей.	128
8.1. Основні поняття.	128
8.2. Операції над подіями.	129
8.3. Формула повної ймовірності.	135
8.4. Формула Байєса (формула гіпотез).	136
8.5. Повторення випробувань Формула Бернуллі.	137
8.6. Випадкові величини.	138
8.7. Закон розподілу дискретної випадкової величини.	138
8.8. Біноміальний розподіл.	143
8.9. Розподіл Пуасона.	144
8.10. Числові характеристики дискретних випадкових величин.	145
8.10.1. Властивості математичного очікування.	145
8.10.2. Обчислення дисперсії.	147
8.10.3. Властивості дисперсії.	147
8.10.4. Середнє квадратичне відхилення.	148
8.11. Функція розподілу.	149
8.11.1. Властивості функції розподілу.	150
8.12. Густина розподілу.	150
8.12.1. Властивості густини розподілу.	151
8.13. Числові характеристики неперервних випадкових величин.	153
8.14. Рівномірний розподіл.	154
8.15. Показниковий розподіл.	156
8.16. Нормальний закон розподілу.	157
8.17. Функція Лапласа.	158
8.18. Теорема Бернуллі.	161
8.19. Теорема Муавра–Лапласа.	162
Вправи для самостійного розв'язування.	162
Розділ 9. Математична статистика.	165
9.1. Варіаційний ряд, гістограма.	165
9.2. Емпірична функція розподілу.	169
9.3. Числові характеристики вибірки.	171
9.4. Умовні варіанти.	172
9.5. Закон великих чисел. Центральна гранична теорема.	172
9.6. Статистичні оцінки параметрів.	175
9.7. Довірчий інтервал, довірна ймовірність.	177
9.8. Перевірка статистичних гіпотез.	182
9.8.1. Критерій Пірсона (критерій χ^2).	183
9.9. Вибіркове рівняння прямої лінії регресії.	188
9.10. Метод найменших квадратів.	192
9.10.1. Лінійна апроксимація.	193
Питання для самоперевірки.	195
Додатки.	196
Глосарій.	202

ПЕРЕДМОВА

Даний підручник є продовженням підручника «Вища математика» (частина 1). Він відповідає програмі з вищої математики для курсантів та студентів вищих навчальних закладів пожежно-технічного профілю. Його мета – забезпечити ґрунтовне засвоєння теоретичних та практичних курсів з вищої математики, сприяти формуванню навичок у застосуванні відомих методів вищої математики у різних галузях техніки, а також допомогти курсантам та студентам при самостійному розв’язуванні задач.

В книзі викладені необхідні основи математичного апарату і приклади його застосування. Підручник «Вища математика» (частина 2) містить такий матеріал: матриці та визначники, системи лінійних алгебраїчних рівнянь, вектори, аналітична геометрія, Ряди, диференціальні рівняння, операційне числення, теорія ймовірностей та математична статистика. Саме такий об’єм знань є найбільш актуальним для осіб, які одержують освіту з вищевказаних спеціальностей.

При написанні підручника автори керувались принципом забезпечення необхідного рівня фундаментальної математичної підготовки курсантів та студентів з посиленням її прикладного застосування. При цьому автори прагнули досягти відпрацювання вузлових понять курсу без надмірного повторення і деталізації.

Користуючись даним підручником, курсанти та студенти повинні отримати необхідний їм рівень математичної строгості і впевненість при користуванні математичними конструкціями в умовах глобальної комп’ютеризації навчального процесу. У своїй роботі автори керувались переконанням, що досконало побудована система взаємно зумовлених тверджень, створює надзвичайно великі труднощі у засвоєнні навчального матеріалу, особливо для недостатньо підготовлених курсантів. Тому вони прагнули до максимального спрощення тверджень, ілюстрування їх дії простими прикладами та зменшення кількості доведень і логічних міркувань. Однак, це зовсім не означає, що підручник охоплює лише основну та найпростішу частину курсу вищої математики.

Даний підручник можна також використати як робочу книгу з вищої математики і для самоосвіти, оскільки на великій кількості розв’язаних прикладів тут ілюструється застосування сучасних математичних понять та висвітлюється їх походження.

Книга буде корисною і користуватиметься попитом також при підготовці слухачів заочної та дистанційної форм навчання. Матеріал висвітлюється так, що у ньому виділяється головне, але при цьому не втрачається цілісність матеріалу та його зміст, взаємозалежність, зв’язки та обумовленість одних розділів іншими.

Мета підручника – у простому викладенні чітко і конкретно показати широкому колу читачів доступність і гармонію вузлових понять вищої математики, що продуктивно сприятиме більш глибокому засвоєнню курсу для формування наукового світогляду та створення надійної бази професійних знань майбутніх фахівців.

Автори висловлюють особливу подяку **8376834763847** за цінні зауваження і поради. Щира подяка **834657436764** за корисні зауваження та співпрацю.

Велика подяка рецензентам посібника **доктору фізико-математичних наук, доценту кафедри _____ Черкаського державного технологічного університету Дідковському Руслану Михайловичу та доктору педагогічних наук, професору кафедри педагогіки вищої школи і освітнього менеджменту Черкаського національного університету ім. Б. Хмельницького Гнєзділовій Кірі Миколаївні** за поради та зауваження при ознайомленні з рукописом підручника.

ВСТУП

Математика – одна з найдавніших наук. Свої перші математичні уявлення і поняття людина формувала у глибокій давнині, розв'язуючи найпростіші задачі практичного характеру. Ускладнювалися форми суспільної трудової діяльності і перед людиною поставали все складніші задачі, для розв'язання яких вона формувала нові математичні поняття, створювала математичні теорії. При цьому математика розвивалася під впливом двох головних стимулів: потреб практичної діяльності людини і логіки розвитку самої математики, яка впливала з бажання людини зрозуміти навколишній світ і своє місце у ньому.

Математика представляє собою значну складову у загальній сумі людських знань і пристосована до обслуговування різноманітних галузей науки і практичної діяльності. Усі основні математичні поняття виникли і розвивались у відповідності з потребами природознавства (фізики, механіки, астрономії та ін.) і техніки. Поступово числові розрахунки проникають майже у всі напрямки практичної діяльності людини. У зв'язку з розвитком науки і техніки ускладнюється сам процес теоретичного дослідження. Для розв'язування все складніших задач необхідним ставав і більш розвинений математичний апарат (теоретичні конструкції, правила, форми та ін.). Спочатку це були алгоритми найпростіших обчислювальних процедур, а з часом логічні доведення стали головними у математиці, оскільки у ній почали визнаватися найдосконалішими результати у найбільш загальному вигляді, а тому й міркування стали домінуючими. Силу і життєвість математики становлять її доведення – міркування на основі уже відомих тверджень. Математика відрізняється від усіх інших наук своїм специфічним методом, у основі якого лежать: абстрагування, ідеалізація, формалізація, аналогія та узагальнення. Застосовуючи їх, ми все глибше проникаємо у суть об'єктивно реального, що дозволяє більш точно відображати у логіко-математичних моделях складні процеси і явища, які недоступні для вивчення засобами безпосередніх спостережень та експериментів. Справа у тому, що процеси і явища можна вивчати, лише відкидаючи у значній мірі усі якісні особливості, залишаючи лише кількісні характеристики і просторові форми. При цьому стають прозорими зв'язки, залежності і глибинні пружини функціонування явищ і процесів. Останнє і дозволяє їх глибше вивчити та застосувати на практиці. Це приводить до розбудови математичної теорії та її прикладних галузей.

Обчислювальний характер математики – невід'ємний її атрибут. Але не лише він визначає її суть. Можна навіть сказати, що суттю сучасної математики є логічні доведення і процеси мислення, з допомогою яких одержують аналітичні формули. Ось чому навчання математиці має відповідати принципу: різному профілю – різну математику, але обов'язково з домінуючим компонентом – доведенням. Це дає і чітке уявлення про математику як струнку логічну систему, і слугуватиме формуванню правильного світогляду та методології. Останнє є одним з головних завдань математичної освіти, яка саме і дає поняття про «альфа» і «омега» людського мислення.

Справді, математика – своєрідна наука. Вона не лише виділяється серед інших своїми характеристиками – абстрактністю, здатністю доводити твердження, широким діапазоном застосувань, обчислювальним характером. Вона не тільки є предметом засвоєння, а й одночасно є джерелом розвитку мислення, що робить її надзвичайно важливою рушійною пружиною формування особистості. Це дозволяє приєднати її до моделей культури в цілому, що виконує роль важливого засобу гуманізації освіти і дозволяє розвинути якісні

характеристики раціонального мислення, яке відзначається строгістю, аргументованістю, фундаментальністю, економічністю. Сьогодні такий стиль потрібен не лише математику, а й усім, хто займається діяльністю, пов'язаною з елементами інтелектуальної праці. Тому в наш час стрімкого поширення знань математична експансія стала звичайним явищем. Адже можна згадати слова видатного вченого Рене Декарта, який сказав, що знання лише тоді стають надійними, коли набувають математичних форм. Отже, прикладні науки у значній мірі прогресують саме завдяки тому, що користуються математикою. Але й сама математика їм завдячує своїм стрімким розвитком.

Математика пройшла *чотири основні періоди розвитку*.

1. Зародження математики – від глибокої давнини до VI–V ст. до н.е., тобто до того часу, коли математика стає самостійною галуззю теоретичного знання зі своїм власним предметом і методом. У первісної людини виникає здатність до абстрактного мислення, з'являються суб'єктивні, а потім цілком об'єктивні уявлення про простір і час. Розуміння часу прийшло через спостереження послідовних подій та руху у просторі як зміни взаємного розташування тіл з плином часу. Спостереження за Сонцем і Місяцем, зірками, лінією горизонту дають основоположні геометричні поняття точки, прямої, кола, площини тощо. Про зародження математики з практичних потреб в історії математики говорить досить впевнено. Розвивається лічба, вимірювання, прийоми арифметичних дій над натуральними числами, створюється усна і письмова нумерація, системи числення. Відбувається процес абстрагування від конкретної природи об'єктів, які обраховують або вимірюють. З цього і починається розвиток математики як науки. Засновником математики була людина, яка вперше сказала: « $1+1=2$ ».

2. Елементарна математика – від VI–V ст. до н.е. до кінця XVI ст. Досягнуті успіхи у вивченні сталих величин. Період починається з приведення накопичених знань у систему, з'являється теоретична математика, виділяються математичні методи доведення, математика усвідомлюється як самостійна і самодостатня наука. Чітко визначений предмет математики – реальний світ; об'єкт – числа і фігури; метод – логічний, дедуктивний, аксіоматичний. Винайдено позиційну систему числення, введено від'ємні та ірраціональні числа, створено тригонометрію, таблицю логарифмів для спрощення і уніфікації обчислень. У зв'язку зі створенням алгебри (буквенна символіка) математика перейшла на вищий ступінь абстракції. Перший ступінь абстракції – абстрагування від якісної природи об'єктів і утворення поняття числа, а наступним кроком було абстрагування від конкретного кількісного змісту числа, введення символів $a, b, c, \dots$, кожен з яких може означати будь-яке число. У цей час сформувалися основні теорії, що стосуються математики сталих величин, створилися передумови відкриття аналітичної геометрії і аналізу нескінченно малих – двох основних дисциплін класичної математики. Вони вивчають уже не стани, а закономірності змінних величин. Так, наприклад, великий грецький вчений-астроном Гіппарх (біля 190–125 рр. до н.е.) на основі кількохсот річних даних вавилонян та власних спостережень відкрив явище прецесії земної осі, Клавдій Птолемей (біля 100–178) дав людству першу кількісну модель Сонячної системи, Ератосфен (біля 276–194 рр. до н.е.) досить точно визначив радіус нашої планети. До цього періоду розвитку математики відносяться такі славні імена, як Піфагор (біля 580–500 рр. до н.е.), Евклід (біля 330–265 рр. до н.е.), Архімед (287–212 рр. до н.е.) та багато інших. Завершення періоду виникнення так званої елементарної математики привело до розвитку мистецтва розв'язувати не лише лінійні та квадратні рівняння, але й рівнянь третього та четвертого степенів (італійці Сципіон дель Ферро (1465–1526), Ніколо Тарталья (1499–1557), Джироламо Кардано (1501–1576), Лудовіко Феррарі (1522–1565)).

3. Створення математики змінних величин – кінець XVI – середина XIX ст. На початку цього періоду французький вчений Рене Декарт (1596–1650) створює аналітичну геометрію; ряд математиків – П'єр Ферма, Бонавентура Кавальєрі, Еванжеліста Торрічеллі, Блез Паскаль, Ісаак Барроу та інші створили передумови, а англійський учений Ісаак Ньютон (1642–1727) і німецький учений Готфрід Лейбніц (1646–1716) створили аналіз нескінченно малих. Їх видатні послідовники Леонард Ейлер (1707–1783), Карл Гаусс (1777–1855), Жозеф Лагранж (1736–1813), Огюстен Коші (1789–1857), Бернард Больцано (1781–1848), Микола Лобачевський (1792–1856), Михайло Остроградський (1801–1862), Карл Вейєрштрасс (1815–1897), Йоган Бернуллі (1667–1748), Джордж Грін (1793–1841), Джордж Габріель Стокс (1819–1903) та багато інших дали людству блискучий розвиток ідей своїх попередників. У математику твердо входить ще висловлена греками ідея неперервності, виникає поняття функціональної залежності, що дозволяє конструювати продуктивні математичні методи вивчення руху, при цьому плідно працює у математиці і концепція дискретності. За невеликий проміжок часу до середини XIX ст. у математиці склалися майже усі математичні теорії, які нині називають класичними основами сучасної вищої математики. Математика, починаючи з епохи Просвітництва XVIII ст., стає провідною наукою.

4. Сучасна математика характеризується швидким зростанням об'єму просторових форм і кількісних відношень. У зв'язку з цим у неї вводяться нові, надзвичайно абстрактні, об'єкти. Сучасна алгебра, теорія множин, теорія багатовимірних просторів піднесли математику на новий ступінь абстракцій, що дозволило проникнути на нові горизонти математичних досліджень дійсності.

Сьогодні математика збагатилась і кількісно, і якісно. Їх нову сутність і новий зміст одержали методи, на які особливо вплинула поява електронних обчислювальних машин, особливо цифрових. Виникла потреба не тільки чіткої алгоритмізації процесів використання електронних обчислювальних машин, а й переосмислення та підвищення ролі якісних методів. При цьому суттєво посилюється логічна функція електронних обчислювальних машин, яка перетворюється із засобу обчислень у засіб реалізації систем штучного інтелекту та майже тотальної роботизації. У зв'язку з цим розширилася сфера застосування математики, виникло багато нових математичних теорій, які призвели і до руйнації меж між математичними галузями. При цьому методи переносяться з однієї галузі в іншу і йде різноманітне взаємопроникнення ідей, зокрема з фізикою. Це пов'язане з виникненням супералгебри, супераналізу, пошуком суперсиметрії диференціальних рівнянь та деякими іншими напрямками, і стало потужним знаряддям дослідження глибинних закономірностей природи.

Комп'ютери сьогодні дозволяють розв'язувати найскладніші задачі з різних галузей практичної діяльності людини на основі раніше напрацьованих математичних знань. Проте, як і раніше, шлях у математику завжди починається власними, самостійно розв'язаними задачами. Ставити і розв'язувати їх – невід'ємна частина будь-якого навчання, оскільки неможливо зрозуміти математику, не розв'язуючи задач.

Матриці та визначники.

1.1. Матриці.

Матриця вперше з'явилась в середині XIX століття в роботах англійських математиків У. Гамільтона і А. Келі (У. Гамільтон (1805–1865) – ірландський математик, іноземний член Петербурзької Академії Наук, праці по теорії комплексних чисел. Побудував систему чисел – *кватерніонів* (чотири); А. Келі (1821–1895) – англійський математик, іноземний член Петербурзької Академії Наук, праці по теорії і алгебрі, квадратичні формули, проєкційна геометрія, математичний аналіз і астрономія), на даний момент широко використовуються в прикладній математиці, вони значно спрощують розгляд складних систем рівнянь.

Означення. *Матрицею* називається прямокутна таблиця, складена з чисел чи функцій. Ми будемо розглядати тільки дійсні числові матриці. Така матриця має вигляд:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Означення. Якщо матриця має k рядків і n стовпців, то про таку матрицю кажуть, що вона має розмір $k \times n$.

Означення. Якщо кількість рядків і кількість стовпців матриці рівні, то така матриця називається *квадратною*, а кількість її рядків (стовпців) називається її *порядком*.

Матрицю також позначають великими латинськими літерами або за допомогою відповідних малих літер з двома індексами:

$$A = [a_{ij}] = \|a_{ij}\|, \quad B = [b_{ij}] = \|b_{ij}\|.$$

Означення. Дві матриці однакових розмірів називають *рівними*, якщо їх відповідні елементи рівні.

Наприклад, матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

не є рівними ($A \neq B$), оскільки $a_{23} = 8$, $b_{23} = 1$.

1.1.1. Види матриць.

Означення. Матриця, що складається з одного рядка (стовпця), називається *матрицею-рядком* (*матрицею-стовпцем*).

Матрицю-рядок також називають *рядком*, а матрицю-стовпець – *стовпцем*. Використовуються також наступні терміни: вектор-рядок, вектор-стовпець. Вектор, що складається з n елементів, називається *n -вимірним*.

Означення. Матриця O довільних розмірів, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається *нуль-матрицею*:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Означення. Рядок (стовпець), усі елементи якого є нулі, називається *нульовим рядком* (стовпцем) або *нуль-вектором*.

Означення. *Одиничною* матрицею називається квадратна матриця E_n -го порядку наступного вигляду:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = [\delta_{ij}], \quad (1.3)$$

$$\text{де } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \\ 0, & \text{якщо } i \neq j \end{cases} \text{ — символ Кронекера.}$$

Означення. Квадратна матриця D називається *діагональною*, якщо вона має наступний вигляд:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

тобто $d_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$. Таку матрицю також позначають наступним чином:

$$D = \text{diag}\{d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}\}.$$

Наприклад,
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{diag}\{1, 0, 2\}.$$

Зрозуміло, що одинична матриця є діагональною.

Означення. Квадратна матриця A називається *нижньою трикутною*, якщо вона має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

тобто $a_{ij} = 0$, якщо $i < j$.

Означення. Квадратна матриця A називається *верхньою трикутною*, якщо вона має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

тобто $a_{ij} = 0$, якщо $i > j$.

Матриця, яка є або нуль-матрицею, або матрицею виду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

де $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \dots, a_{kk} \neq 0$ називають *верхньою трапецієподібною* матрицею.



1). $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – нуль-матриця;

2). $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ – вектор-

стовпець;

3). $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – діагональна матриця;

4). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця;

5). $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ – нижня трикутна матриця;

6). $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – верхні трапецієподібні матриці.

Означення. Східчастою називають матрицю A , яка має наступні властивості:

- 1). Якщо i -ий рядок нульовий, то $(i+1)$ -ий рядок також нульовий;
- 2). Якщо перші ненульові елементи i -го і $(i+1)$ -го рядків є в стовпцях K_i і K_{i+1} відповідно, то $K_i < K_{i+1}$.



$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{східчаста матриця, де } K_1=2, K_2=4, K_3=5.$$

1.1.2. Означення дій над матрицями.

Означення. Сумою двох матриць однакових розмірів A і B називають матрицю C , кожний елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B , тобто

$$C=A+B=\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+b_{k1} & a_{k2}+b_{k2} & \dots & a_{kn}+b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij}+b_{ij} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

(або $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всіх i, j).

Означення. Добутком матриці A на число λ називають таку матрицю B , кожний елемент якої дорівнює добутку числа λ і відповідного елемента матриці A , тобто:

$$B = \lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \dots & \lambda a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{ij} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

(або $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ для всіх i, j).

Означення. Матрицю $(-1)A$ позначатимемо через $-A$ і називатимемо її матрицею, протилежною до матриці A .

Означення. Під різницею матриць A і B ($A-B$) будемо розуміти суму $A+(-B)$. Зрозуміло, що $A-A = O$, $A+O = O+A = A$ для всякої матриці A і нуль-матриці O тих же розмірів.

Означення. Транспонованою до матриці A розмірів $k \times n$ називається така матриця B розмірів $n \times k$, що $b_{ij} = a_{ji}$ для всіх i, j . Тобто матриця B має за рядки відповідні стовпці матриці A .

Транспоновану матрицю позначають через A^T , а елементи її через a^T_{ij} ($= a_{ji}$).



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Для введення добутку двох матриць визначимо спочатку добуток рядка і стовпця однакової довжини (рядок – лівий множник, стовпець – правий множник, бо порядок співмножників тут важливий !):

$$(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n).$$

У результаті одержимо квадратну матрицю першого порядку, яку можна ототожнити з її єдиним елементом $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$. Добуток AB матриць A і B визначаємо тільки тоді, коли кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B .

Нехай матриця A має розмір $k \times n$, а матриця $B - n \times r$.

Означення. Добутком матриць A і B називається матриця $C = AB$, що має розмір $k \times r$, а її елемент c_{ij} дорівнює добутку i -го рядка матриці A і j -го стовпця матриці B :

$$c_{ij} = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}, \quad (1.10)$$

$$i=1, \dots, k; j=1, \dots, r.$$



- 1). $(a_1 \ a_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (a_1b_1 + a_2b_2);$
- 2). $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} (a_1 \ a_2) = \begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 \\ b_2a_1 & b_2a_2 \end{pmatrix};$
- 3). $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\lambda + a_{12}y \\ a_{21}\lambda + a_{22}y \end{pmatrix};$
- 4). $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\lambda_{11} + a_{12}\lambda_{21} & a_{11}\lambda_{12} + a_{12}\lambda_{22} \\ a_{21}\lambda_{11} + a_{22}\lambda_{21} & a_{21}\lambda_{12} + a_{22}\lambda_{22} \\ a_{31}\lambda_{11} + a_{32}\lambda_{21} & a_{31}\lambda_{12} + a_{32}\lambda_{22} \end{pmatrix}.$

Нехай A – квадратна матриця n -го порядку, E – одинична матриця n -го порядку, а O – квадратна нуль-матриця n -го порядку. Тоді легко перевірити, що:

$$AE = EA = A,$$

$$AO = OA = O.$$

Слід зауважити, що добуток двох ненульових матриць може бути нульовою матрицею (нуль-матрицею).

$$\text{Справді, } \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,5 & 2,5 \\ 2,5 & 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Квадратна матриця Bn -го порядку називається *оберненою* до квадратної матриці An -го порядку, якщо

$$AB = BA = E.$$

Обернену матрицю до матриці A позначають через A^{-1} .



$$\text{Нехай } A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}. \text{ Тоді } B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} - \text{обернена матриця до}$$

матриці A .

1.1.3. Властивості додавання матриць та множення матриць на числа.

Додавання матриць та множення матриць на числа мають наступні властивості:

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (асоціативність);
1. $A + O = O + A = O$;
2. $A + (-A) = (-A) + A = O$;
3. $A + B = B + A$ (комутативність);
4. $1 \cdot A = A$;
5. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda A + \lambda B$;
6. $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$;
7. $\lambda (\mu A) = (\lambda \mu) A$

(для довільних матриць A, B, C однакових розмірів і для довільних чисел λ, μ).

Доведемо властивості 1 і 7. Всі інші властивості доводяться аналогічно і залишаються для самостійного доведення читачу.

$$\begin{aligned} 1. \quad A + (B + C) &= [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) = [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] = \\ &= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = \\ &= ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}] = (A + B) + C. \end{aligned}$$

(тут ми використали асоціативність додавання чисел).

$$\begin{aligned} 7. \quad (\lambda + \mu) A &= (\lambda + \mu) [a_{ij}] = [(\lambda + \mu) a_{ij}] = [\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}] = \\ &= [\lambda a_{ij}] + [\mu a_{ij}] = \lambda [a_{ij}] + \mu [a_{ij}] = \lambda A + \mu A \end{aligned}$$

(тут ми використали дистрибутивність множення відносно додавання для чисел).

1.1.4. Символи суми.

Суму $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ позначають через $\sum_{i=1}^n a_i$, де i називається *індексом підсумовування* і його позначення ролі не відіграє, тобто його можна замінити будь-якою іншою буквою:

$$1). \quad \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{u=1}^n a_u;$$

Очевидними також є й інші властивості символу суми:

$$2). \quad \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \quad (\text{адитивність});$$

$$3). \quad \sum_{i=1}^n \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^n a_i \quad (\text{однорідність});$$

де λ – будь-яке число (яке не залежить від i).

Часто використовуються так звані подвійні суми, які необхідні для підсумовування доданків з двома індексами.

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\text{або} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k a_{ij} \right),$$

тобто для знаходження суми всіх елементів прямокутної таблиці (матриці):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Тут i, j називаються *першим* і *другим індексами підсумовування* відповідно.

Очевидно, що сума S всіх елементів даної таблиці дорівнює

$$\begin{aligned} S &= (a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n}) + (a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n}) + \dots + (a_{k1} + a_{k2} + \dots + a_{kn}) = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{1j} + \sum_{j=1}^n a_{2j} + \dots + \sum_{j=1}^n a_{kj} = S_1 + S_2 + \dots + S_k, \end{aligned}$$

де $S_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (i=1, \dots, k).$

Тому $S = \sum_{i=1}^k S_i = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right)$. (знаходимо суму всіх сум елементів рядків).

З другого боку,

$$\begin{aligned} S &= (a_{11} + a_{21} + \dots + a_{k1}) + (a_{12} + a_{22} + \dots + a_{k2}) + \dots + (a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{kn}) = \\ &= \sum_{i=1}^k a_{i1} + \sum_{i=1}^k a_{i2} + \dots + \sum_{i=1}^k a_{in} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^k a_{ij} \right). \end{aligned}$$

(Знаходимо суму всіх сум елементів стовпців).

Таким чином, має місце наступна *властивість символу подвійної суми*:

$$4). \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k a_{ij} = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^k a_{ij} \right).$$

Взагалі кажучи, символ суми може записуватися у найрізноманітніших ситуаціях. Його ж зміст може бути зрозумілим з контексту.

Тепер нам легко буде оперувати з матрицями. Наприклад, елемент добутку $C = AB$ матриць A і B розмірів $k \times n$ і $n \times r$, відповідно, записується наступним чином:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{t=1}^n a_{it}b_{tj}.$$

1.1.5. Властивості множення матриць.

1. Множення матриць не є комутативним, тобто існують такі матриці A і B , для яких $AB \neq BA$.



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $(AB)C = A(BC)$ для довільних матриць A, B, C , для яких існують добутки AB і BC (асоціативність).

Справді, нехай A має розмір $k \times n$, $B - n \times r$, $C - r \times t$. Покладемо $AB = U$ і $BC = V$. Зрозуміло, що U має розмір $k \times r$, а $V - n \times t$. Тоді нам треба довести, що $UC = AV$. Доведемо це.

Елемент добутку UC дорівнює $\sum_{s=1}^r u_{is}c_{sj}$, але $u_{is} = \sum_{l=1}^n a_{il}b_{ls}$, тобто

$\sum_{s=1}^r \left(\sum_{l=1}^n a_{il} b_{ls} \right) c_{sj} = \sum_{s=1}^r \left(\sum_{l=1}^n a_{il} b_{ls} c_{sj} \right)$ – елемент добутку UC (використана властивість 3 символу суми).

Знайдемо тепер елемент добутку AV : $\sum_{l=1}^n a_{il} v_{lj} = \sum_{l=1}^n a_{il} \left(\sum_{s=1}^r b_{ls} c_{sj} \right) = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{s=1}^r a_{il} b_{ls} c_{sj} \right)$ (використана властивість 3 символу суми).

Використавши властивість 4 подвійних сум, матимемо, що $UC = AV$.

3. $A(B + C) = AB + AC$, якщо B і C мають однаковий розмір та існує AB ; $(A + B)C = AC + BC$, якщо A і B мають однаковий розмір та існує AC (дистрибутивність).

Доведемо першу рівність за вказаних умов. Нехай A має розмір $k \times n$, а B і C – $n \times r$. Тоді елемент добутку $A(B + C)$ дорівнює

$$\sum_{s=1}^n a_{is} (b_{sj} + c_{sj}) = \sum_{s=1}^n (a_{is} b_{sj} + a_{is} c_{sj}).$$

Елементи добутків AB , AC дорівнюють відповідно,

$$\sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj}, \quad \sum_{s=1}^n a_{is} c_{sj}.$$

Тому елемент матриці $AB + AC$ дорівнює

$$\sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj} + \sum_{s=1}^n a_{is} c_{sj} = \sum_{s=1}^n (a_{is} b_{sj} + a_{is} c_{sj})$$

(тут була використана властивість 2 символу суми – адитивність).

Отже, відповідні елементи матриць $A(B + C)$, $AB + AC$ рівні. Тому перша рівність доведена. Друга рівність доводиться аналогічно.

4. $AE = EA = A$, де A – квадратна матриця, а E – одинична матриця того ж порядку n .

Справді, елемент добутку AE дорівнює $\sum_{s=1}^n a_{is} \delta_{sj} = a_{ij}$, а елемент добутку EA дорівнює

$$\sum_{s=1}^n \delta_{is} a_{sj} = a_{ij}.$$

5. Якщо квадратна матриця A має обернену матрицю, то обернена матриця єдина.

Справді, нехай B і C – обернені до A матриці. Тоді $AB = BA = E$ і $AC = CA = E$.

Отже $C = CE = C(AB) = (CA)B = EB = B$ (тут використані властивості 4, 2 множення матриць).

6. Якщо квадратні матриці A і B мають обернені, то $(A^{-1})^{-1} = A$ і $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (перевірити самостійно!)

1.1.6. Властивості транспонування.

1. $(A^T)^T = A$ для довільної матриці A (ідемпотентність);
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$, де A і B – довільні матриці однакових розмірів (адитивність);
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ для довільної матриці A і довільного числа λ (однорідність);

4. $(AB)^T = B^T A^T$ для довільних матриць A і B , для яких існує добуток AB ;

5. $(AA^T)^T = AA^T$, $(A^T A)^T = A^T A$

Доведемо ці властивості.

1. Очевидно.

2. Справді, $([a_{ij}] + [b_{ij}])^T = ([a_{ij} + b_{ij}])^T = [(a_{ij} + b_{ij})^T] = [a_{ji} + b_{ji}] = [a_{ji}] + [b_{ji}] = [a_{ij}^T] + [b_{ij}^T] = [a_{ij}^T + b_{ij}^T]$.

3. Справді, $(\lambda[a_{ij}])^T = ([\lambda a_{ij}])^T = [(\lambda a_{ij})^T] = [\lambda a_{ji}] = \lambda[a_{ji}] = \lambda[a_{ij}]^T$.

4. Нехай $U = AB$. Тоді $u_{ij}^T = u_{ji} = \sum_{s=1}^n a_{js} b_{si} = \sum_{s=1}^n b_{is}^T a_{sj}^T$, тобто $U^T = B^T A^T$.

5. Доведемо першу з рівностей. Використаємо попередню і першу властивості:

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T.$$

Матриця A , для якої $A = A^T$, називається *симетричною*.

Таким чином, матриця AA^T завжди симетрична.



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} - \text{симетрична матриця.}$$

1.1.7. Обернена матриця у випадку квадратних матриць другого порядку.



Розглянемо матрицю $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$. Припустимо, що матриця A має обернену матрицю $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. Тоді $AX = XA = E$, тобто

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• З рівності $AX = E$ отримаємо дві системи:

$$\begin{cases} 3x_{11} - 2x_{21} = 1; \\ -6x_{11} + 4x_{21} = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 3x_{12} - 2x_{22} = 0; \\ -6x_{12} + 4x_{22} = 1. \end{cases}$$

Оскільки $3x_{11} - 2x_{21} = 1$, то $-2(3x_{11} - 2x_{21}) = -2$, тобто $-6x_{11} + 4x_{21} = -2$. Очевидно, що така рівність і друга рівність системи виконуватися одночасно не можуть. Отже маємо протиріччя. Таким чином, матриця A оберненої матриці не має.



Нехай матриця $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Покажемо, що A має обернену матрицю і знайдемо її.

• Існування матриці, оберненої до A , рівносильне існуванню спільного розв'язку X_0 двох матричних рівнянь $AX = E$ і $XA = E$, де $X_0 = \begin{pmatrix} x_{11}^0 & x_{12}^0 \\ x_{21}^0 & x_{22}^0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Припустимо, що такий розв'язок справді існує, тоді з $AX_0 = E$ отримаємо системи:

$$\begin{cases} -x_{11}^0 = 1; \\ 3x_{11}^0 + 2x_{21}^0 = 0, \end{cases} \begin{cases} -x_{12}^0 = 0; \\ 3x_{12}^0 + 2x_{22}^0 = 1. \end{cases}$$

Зрозуміло, що тоді $x_{11}^0 = -1$, $x_{21}^0 = \frac{3}{2}$, $x_{12}^0 = 0$, $x_{22}^0 = \frac{1}{2}$.

Отже, з існування розв'язку випливає, що він дорівнює $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Легко переконатися, що справді

$$A \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = E \quad i \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} A = E.$$

Таким чином A^{-1} існує і дорівнює $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Для кожної квадратної матриці другого порядку існує простий спосіб з'ясування того факту, чи існує для неї обернена матриця. Для цього введемо поняття визначника квадратної матриці другого порядку.

Означення. Визначником матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається число

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.11)$$

Зрозуміло, що $\det(A) = \det(A^T)$.

Лема. Якщо A і B – дві квадратні матриці другого порядку, то

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) = \\ &= a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} - a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} - \\ &- a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} - a_{12}b_{22}a_{22}b_{21} = a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} - \\ &- a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} = a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) - a_{12}a_{21}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = \det(A) \det(B). \end{aligned}$$

Лемі доведено.

Твердження. Для того, щоб квадратна матриця A другого порядку мала обернену матрицю, необхідно і достатньо, щоб $\det(A) \neq 0$.

Доведення. Нехай матриця A має обернену матрицю B . Тоді $AB = BA = E$, де $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

За лемою $\det(A) \det(B) = \det(AB) = \det(E) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$, тобто

$\det(A) \det(B) = 1 \neq 0$. Тому $\det(A) \neq 0$.

Навпаки, нехай $\det(A) \neq 0$. Покажемо, що матриця $B = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$ є оберненою до A . Справді,

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & -a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11} \\ a_{21}a_{22} - a_{22}a_{21} & -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(A) & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(A) & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Твердження доведено.

 Нехай $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. Тоді $\det(A) = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 14 - 12 = 2 \neq 0$.

Отже, A має обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

 Нехай $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. Тоді $\det(A) = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \neq 0$.

Отже, A^{-1} існує і дорівнює матриці $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$.

Означення. Квадратна матриця A другого порядку називається *особливою* (або *виродженою*), якщо $\det(A) = 0$, і *неособливою* (*невиродженою*), якщо $\det(A) \neq 0$.

1.1.8. Подібні матриці.

Будемо говорити, що квадратна матриця A порядку n є подібною до квадратної матриці C того ж порядку, якщо існує невинроджена квадратна матриця X порядку n така, що $XAX^{-1} = C$.

В цьому випадку пишуть наступне: $A \sim C$.

Властивості подібності:

1. $A \sim A$ (рефлексивність).

Справді, $EAE^{-1} = A$

2. Якщо $A \sim B$, то $B \sim A$ (симетричність).

Справді, якщо $XAX^{-1} = B$, то $A = (X^{-1})B(X^{-1})^{-1}$, бо $((X^{-1})^{-1} = X)$.

3. Якщо $A \sim B$ і $B \sim C$, то $A \sim C$.

Справді, якщо $A \sim B$ і $B \sim C$, то існують такі X, Y , що $XAX^{-1} = B$, $YBY^{-1} = C$. Тоді $YXAX^{-1}Y^{-1} = C$, тобто $(YX)A(YX)^{-1} = C$ $((YX)^{-1} = X^{-1}Y^{-1})$.

Означення. Класом подібних матриць будемо називати всі матриці, що є подібними до даної матриці A .

1.2. Визначники та їх властивості.

До поняття визначника приходимо, розглядаючи системи алгебраїчних рівнянь першого порядку. Розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1, \\ a_2x + b_2y = d_2 \end{cases} \quad (1.12)$$

де x та y – невідомі. Розв'язуючи її, отримаємо систему:

$$x = \frac{d_1b_2 - d_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}; \quad y = \frac{a_1d_2 - a_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (1.13)$$

Означення. Вираз $a_1b_2 - a_2b_1$ називається визначником (детермінантом) другого порядку і записується так:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad (1.14)$$

де $\begin{vmatrix} \end{vmatrix}$ – знак визначника.

Таким чином, в кожній квадратній матриці можна поставити у відповідність число, яке називається визначником матриці:

$$\Delta = \det = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.15)$$

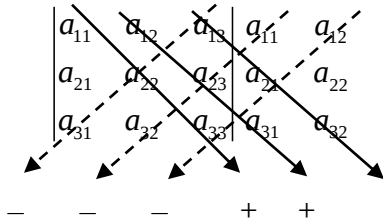
Визначник другого порядку:

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad (1.16)$$

допоміжна головна діагональ
діагональ

Означення. Визначником третього порядку називається число, утворене так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \quad (1.17)$$



Перетворення виразу (1.17) і застосування (1.14) приводить до формули:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad (1.18)$$

По аналогії з формулою (1.18) визначається визначник *четвертого порядку*:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \quad (1.19)$$

Аналогічно визначник *n'ятого порядку* і т.д.:

$$\Delta = |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^{i+j} a_{ij1} a_{2j2} \dots a_{njn}. \quad (1.20)$$

1.2.1. Властивості визначників.

Будемо розглядати властивості визначників на основі визначників 3-го порядку: вони будуть справедливі для визначників будь-якого порядку.

1) *Визначник не зміниться, якщо його транспонувати.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1.21)$$

2) *Якщо переставити місцями два паралельних рядки (або стовпчики), то визначник змінить знак:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad (1.22)$$

3) *Якщо визначник має два однакових рядки, то він дорівнює нулю.*

0 0 0

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad (1.23)$$

4) Визначник, що має нульовий рядок, дорівнює нулю.

5) Спільний множник, що є у всіх елементах одного рядка, можна винести за знак визначника.

$$\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 & c_1 \\ a_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & kb_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (1.24)$$

Наслідок: для множення визначника на число достатньо помножити на це число елементи одного рядка (або стовпця).

6) Якщо всі елементи якого-небудь рядка представити у вигляді суми двох доданків, то увесь визначник можна представити у вигляді суми двох визначників по формулі:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \quad (1.25)$$

7) Визначник дорівнює нулю, якщо елементи двох рядків пропорційні:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta = 0, \text{ якщо } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k \quad (1.26)$$

8) Якщо до кожного з елементів будь-якого рядка додати числа, пропорційні другому рядку, паралельного першому, то значення визначника не зміниться.

$$\begin{vmatrix} a_1 + kc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (1.27)$$

1.2.2. Мінор і алгебраїчне доповнення визначника.

Означення. Мінором M_{ij} називається визначник, складений з елементів даного визначника, якщо в ньому викреслити рядок i і стовпчик, на перетині яких стоїть елемент a_{ij} :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \text{і т.д.} \quad (1.28)$$

Означення. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається мінор цього елемента, помножений на множник $(-1)^{i+j}$.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \quad (1.29)$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} \quad \text{і т.д.} \quad (1.30)$$

Теорема. Сума добутків елементів рядка визначника на відповідні їм алгебраїчні доповнення дорівнює цьому визначнику:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = \dots$$

 Обчислити $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

• Для цього за допомогою властивості 8 зробити в якому-небудь з рядків усі елементи, крім одного, рівними нулю. Тоді, розкладаючи отриманий визначник по елементам цього рядка, отримаємо лише один доданок. Так, якщо ми хочемо у третьому рядку визначника залишити відмінний від нуля елемент лише на другому місці, то потрібно другий стовпчик помножити на (-2) і додати до першого, а потім в отриманому визначнику другий стовпчик додати до третього.

Маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (\text{віднімаємо другий рядок від першого}) = -1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5.$$

Вправи для самостійного розв'язування.

1. Матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ подати, як лінійну комбінацію матриць:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Нехай $AB = O$. Чи обов'язково $BA = O$?

3. Обчислити $A^2 - 3A + 5E$, якщо $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Коли справджуються рівності $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ і $(AB)^2 = A^2B^2$.
5. Довести, що добуток двох симетричних матриць є симетричною матрицею тоді й тільки тоді, коли ці матриці комутують.
6. Квадратна матриця A називається кососиметричною, якщо $A^T = -A$. Довести, що всяку квадратну матрицю можна представити як суму симетричної та кососиметричної.
7. Обчислити $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^n$.
8. Довести: якщо $AB = BA$, то обидві матриці квадратні та однакового порядку.
9. Довести формулу $(A_1 A_2 \dots A_n)^T = A_n^T A_{n-1}^T \dots A_1^T$.
10. Довести, що добуток двох верхніх (нижніх) трикутних матриць однакового розміру є верхньою (нижньою) трикутною матрицею.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

2.1. Система двох лінійних рівнянь з двома невідомими.

Нехай маємо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими x_1, x_2 :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (2.1)$$

В даному пункті розглядатимемо лише такі системи.

Означення. Розв'язком такої системи називається вектор $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, де c_1, c_2 – числа, для

якого мають місце такі числові рівності:

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 &= b_1; \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 &= b_2. \end{aligned}$$

Система може не мати розв'язків, може мати єдиний розв'язок, або мати більше одного розв'язку.



$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

- Дана система розв'язків не має.



$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

- Дана система має єдиний розв'язок

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1; \\ 4x_1 + 2x_2 = 2. \end{cases}$$

- Дана система має безліч розв'язків $\begin{pmatrix} a \\ 1-2a \end{pmatrix}$, де a –

довільне число.

Справді, $2a + (1-2a) = 1$ і $4a + 2(1-2a) = 2$ для довільного числа a .

Означення. Дві системи рівнянь називаються *рівносильними (еквівалентними)*, якщо вони мають однакові множини розв'язків. Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок.

Система рівнянь називається *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку, тобто множина розв'язків є порожня множина $\emptyset$.

зручно записувати в матричному вигляді.

$$A\vec{x}=\vec{b}, \quad (2.2)$$

$$\text{де } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Форму (2.2) запису системи (2.1) називають *матричною*.

Наслідок. Система $A\vec{x}=\vec{0}$, де $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ має лише нульовий

розв'язок тоді і тільки тоді, коли $\det(A) \neq 0$.

2.2. Системи лінійних рівнянь: основні означення.

Нехай маємо систему з k лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k, \end{array} \right. \quad (2.3)$$

де $a_{ij} (i=1, 2, \dots, k; \quad j=1, 2, \dots, n)$ – деякі числа. Зокрема, можливо, що $k=1$.

Означення. Розв'язком системи (2.3) називається будь-яка впорядкована сукупність чисел $C_1, C_2, \dots, C_n$, яка задовольняє систему, що означає наступне: якщо в кожне рівняння системи замість x_i підставити $c_i (i=1, 2, \dots, n)$, то одержимо k правильних числових рівностей. Отже, розв'язок системи можна вважати вектором з n компонентами.

Означення. Систему називають *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок; у протилежному випадку система називається *несумісною* (тобто коли не існує жодної впорядкованої системи чисел $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, що задовольняє систему).

 Система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0; \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$ є сумісною, оскільки $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ – її розв'язок.

- Справді, $2 \cdot 1 + (-2) = 0$ і $1 + (-2) = -1$ – сукупність правильних числових рівностей.

$$\text{Система} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \text{ є несутимісною.}$$

- Справді, якби вектор $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ був її розв'язком, то тоді б $0 = c_1 + c_2 - c_3 = 1$, але $0 \neq 1$,

тобто ми отримали б суперечність.

Введемо позначення:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Тоді систему (2.3) можна записати у матричному вигляді:

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (2.4)$$

Матриця $A = [a_{ij}]$ називається матрицею системи (2.3). Приєднавши до матриці A стовпець вільних членів $\vec{b}$, одержимо так звану розширену матрицю системи:

$$\left(A \mid \vec{b} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array} \right) \quad (2.5)$$

Зрозуміло, що система лінійних рівнянь однозначно визначається своєю розширеною матрицею.

Означення. Дві системи називаються *рівносильними (еквівалентними)*, якщо множини їх розв'язків співпадають. З цього випливає, що несумісні системи рівносильні.

2.3. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь матричним способом.

Матричний спосіб можна застосувати, якщо кількість рівнянь і кількість невідомих співпадають, а крім того, матриця системи має обернену.

Запишемо систему (2.3) у матричному вигляді. Для цього введемо матриці виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Користуючись правилом множення матриць, систему (2.3) запишемо у матричному вигляді:

$$A \cdot X = B \quad (2.6)$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$X = A^{-1} \cdot B, \quad (2.7)$$

де A^{-1} є оберненою матрицею до матриці A .



Розв'язати систему лінійних рівнянь
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$
 матричним способом.

• Складемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи будемо шукати у вигляді (2.7). Необхідно знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A . Обернена матриця існує, бо $\Delta A = -3 \neq 0$. Знайдемо алгебраїчні доповнення для кожного елемента матриці A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 2 = -6, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -(4 + 8) = -12,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 = 9, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 3) = -1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3 - 4) = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 6 = 4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-6 - 3) = 9,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7.$$

Складемо обернену матрицю. Одержимо:

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 \\ -12 & 0 & 9 \\ 9 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Помножимо обернену матрицю на матрицю B і одержимо шукану матрицю X . Маємо

$$X = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 \\ -12 & 0 & 9 \\ 9 & 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 - 1 + 4 \\ -12 + 0 + 9 \\ 9 + 1 - 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$.

2.4. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера.

Це правило можна застосувати, якщо кількість рівнянь і кількість невідомих співпадають. Для простоти викладу розглянемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими ($n = m = 3$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (2.8)$$

Позначимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Означення. Визначник Δ називають *визначником системи* і його складають з коефіцієнтів при невідомих, а у визначниках $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ коефіцієнти при відповідних невідомих замінені вільними членами.

Якщо $\Delta \neq 0$, то система (2.8) має єдиний розв'язок. Невідомі визначають за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}, \quad (2.9)$$

і такий спосіб визначення невідомих називають *правилом Крамера*.

Якщо $\Delta = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$, то система (2.8) має безліч розв'язків, а правило Крамера застосувати не можна.

Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один із визначників Δx_i , $i = 1, 2, 3$, відмінний від нуля, то система (2.8) несутісна.



Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

• Складемо і обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-8 + 2) - (4 + 8) + 3(1 + 8) = 3 \cdot (-6) - 12 + 27 = -18 - 12 + 27 = -3;$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-8 + 2) - (4 + 2) + 3(1 + 2) = -6 - 6 + 9 = -3;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(4 + 2) - (4 + 8) + 3(1 - 4) = 18 - 12 - 9 = -3;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-2-1) - (1-4) + (1+8) = -9 + 3 + 9 = 3.$$

Підставимо одержані результати у формули (2.9). Маємо

$$x_1 = \frac{-3}{-3} = 1, \quad x_2 = \frac{-3}{-3} = 1, \quad x_3 = \frac{3}{-3} = -1.$$

Відповідь: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$.

2.5. Ранг матриці. Прямокутні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

2.5.1. Ранг матриці.

Означення. Рангом матриці називають найвищий порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці і позначають $r = r(A)$.

Розглянемо систему з m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (2.10)$$

де a_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) – коефіцієнти при невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$, b_k ($k = \overline{1, m}$) – вільні члени.

Для того, щоб система лінійних рівнянь (2.10) була сумісною (тобто, мала розв'язок), необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи $r(A)$ дорівнював рангу її розширеної матриці $r(B)$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Якщо система лінійних рівнянь (2.10) сумісна, то вона має один або безліч розв'язків.

2.5.2. Теорема Кронекера–Капеллі.

(Леопольд Кронекер (1823–1891) – німецький математик; Альфредо Капеллі (1855–1910) – італійський математик).

Теорема Кронекера–Капеллі – критерій сумісності системи лінійних алгебраїчних рівнянь: $Ax=b$.

СЛАР має розв'язки тоді і тільки тоді, коли ранг матриці A дорівнює рангу її розширеної матриці B .

Причому система має єдине рішення, якщо ранг дорівнює числу невідомих і нескінченно багато рішень, якщо ранг менше числа невідомих.

Теорема (Кронекера–Капеллі). Для того щоб неоднорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь (3) була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці A виду (2) дорівнював рангу розширеної матриці

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Отже, стовпець вільних членів системи є лінійною комбінацією стовпців матриці A , коефіцієнти такої лінійної комбінації і будуть розв'язком СЛАР.

2.6. Розв'язування СЛАР методом Гаусса.

Для розв'язування систем лінійних рівнянь застосовують метод, який називають методом Гаусса або методом виключення змінних. Суть методу Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь розглянемо за допомогою матриць. Його ідея полягає у зведенні розширеної матриці системи за допомогою елементарних перетворень матриці до трикутної матриці.

Означення. Трикутною називають матрицю, у якої під головною діагоналлю всі елементи рівні нулю.

Елементарними перетвореннями матриці є такі перетворення:

- 1) перестановка двох рядків матриці;
- 2) множення всіх елементів рядка на одне і те ж число, відмінне від нуля;
- 3) додавання елементів якого-небудь рядка матриці, помножених на одне і те ж число, до відповідних елементів іншого рядка;
- 4) відкидання рядків матриці, елементами яких є нулі.

Проводячи елементарні перетворення над матрицею системи, отримують нову систему рівнянь, яка еквівалентна заданій, але з новими коефіцієнтами та вільними членами. Одержують трикутну систему рівнянь, із якої визначають невідомі.



Методом Гаусса розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2. \end{cases}$$

• Складемо розширену матрицю системи і будемо робити над нею необхідні елементарні перетворення, щоб одержати трикутну матрицю. На початку переставимо перше і третє рівняння місцями, а потім помножимо елементи першого рядка відповідно на мінус три, мінус два та мінус два і одержані результати додамо відповідно до елементів другого, третього та четвертого рядків. Аналогічно вчинимо з елементами другого, а потім третього рядків. Одержимо матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 4 \\ 3 & 2 & -1 & | & 2 \\ 2 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 2 & -4 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 4 \\ 0 & -1 & -10 & | & -10 \\ 0 & -1 & -5 & | & -5 \\ 0 & 0 & -10 & | & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 10 & | & 10 \\ 0 & 1 & 5 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \\
\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 10 & | & 10 \\ 0 & 0 & -5 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 10 & | & 10 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 10 & | & 10 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 10 & | & 10 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Система лінійних рівнянь матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_2 + 10x_3 = 10, \\ x_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_2 = 10 - 10x_3 = 0, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

З третього рівняння $x_3 = 1$. З другого рівняння одержали x_2 , а з першого одержуємо x_1 . Відповідь: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

Вправи для самостійного розв'язування.

1–10. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь а) методом Крамера; б) методом матричного числення.

- | | |
|---|--|
| 1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$ | 6. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$ |
| 2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$ | 7. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 7. \end{cases}$ |
| 3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$ | 8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 8, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 - 6x_3 = 8. \end{cases}$ |
| 4. $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$ | 9. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 9, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - 7x_3 = 9. \end{cases}$ |
| 5. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$ | 10. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 - 8x_3 = 10. \end{cases}$ |

11-20. Методом Гаусса розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$11. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x_1 + 6x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - 6x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Вектори.

3.1. Основні поняття, означення.

Означення 1. Вектором називається напрямлений відрізок.

Позначення: $\mathbf{a}$, $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$.

Означення 2. Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

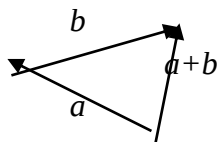
Означення 3. Вектор називається *нульовим*, якщо його початкова і кінцева точки співпадають. Нульовий вектор не має певного напрямку.

Означення 4. Два вектори називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, мають однакову довжину (модуль) і однаковий напрямок.

Зауваження. Таким чином, ми вивчаємо так звані вільні вектори, початкова точка яких може бути вибрана довільно. Вектори, для яких важлива точка прикладання, наз. зв'язаними і використовуються у деяких розділах фізики.

3.2. Лінійні операції над векторами.

Означення 5. Сумою $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називається вектор, що виходить з початку вектора $\mathbf{a}$ у кінець вектора $\mathbf{b}$, якщо початок вектора $\mathbf{b}$ співпадає з кінцем вектора $\mathbf{a}$.



Зауваження. Таке правило додавання векторів називається *правилом трикутника*.

Властивості додавання:

Властивість 1. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

Зауваження. Є ще одне правило додавання векторів – *правило паралелограма*: сума векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ є діагональ паралелограма, побудованого на них, як на сторонах, що виходить з їх спільного початку.

Властивість 2. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

Властивість 3. Для будь-якого вектора $\mathbf{a}$ існує нульовий вектор $\mathbf{O}$ такий, що $\mathbf{a}+\mathbf{O}=\mathbf{a}$.

Властивість 4. Для кожного вектора $\mathbf{a}$ існує протилежний йому вектор $\mathbf{a}'$ такий, що $\mathbf{a}+\mathbf{a}'=\mathbf{O}$.

Означення 6. Різницею $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називається такий вектор $\mathbf{c}$, який у сумі з вектором $\mathbf{b}$ дає вектор $\mathbf{a}$.

Означення 7. Добутком $k\mathbf{a}$ вектора $\mathbf{a}$ на число k називається вектор $\mathbf{b}$, колінеарний вектору $\mathbf{a}$, що має модуль, рівний $|k||\mathbf{a}|$, і напрямок, що співпадає з напрямком $\mathbf{a}$ при $k>0$, і протилежний $\mathbf{a}$ при $k<0$.

Властивості множення вектора на число:

Властивість 1. $k(a+b)=ka+kb$.

Властивість 2. $(k+m)a=ka+ma$.

Властивість 3. $k(ma)=(km)a$.

Наслідок. Якщо ненульові вектори a і b колінеарні, то існує таке число k , щоб $b=ka$.

3.3. Лінійна комбінація векторів.

Означення 8. Лінійною комбінацією векторів $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ називається вираз виду:

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + \dots + k_n a_n. \quad (3.1)$$

де k_i – числа.

Означення 9. Вектори $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ називаються лінійно залежними, якщо знайдуться такі числа $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$, не всі рівні нулю, що відповідна лінійна комбінація векторів рівна нулю, тобто

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + \dots + k_n a_n = 0. \quad (3.2)$$

Якщо ж рівність (3.2) можлива тільки при усіх $k_i = 0$, вектори називаються лінійно незалежними.

Зауваження 1. Якщо система векторів містить нульовий вектор, то вона лінійно залежна.

Зауваження 2. Якщо серед n векторів які-небудь $(n-1)$ лінійно залежні, то й усіх векторів лінійно залежні.

Зауваження 3. Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності двох векторів є їх колінеарність.

Означення 10. Вектори називаються компланарними, якщо вони лежать або у одній площині, або на паралельних площинах.

Зауваження 4. Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності трьох векторів є їх компланарність.

Зауваження 5. Будь-які чотири вектори у тривимірному просторі лінійно залежні.

3.4. Базис. Афінна та декартова системи координат.

Означення 11. Два лінійно незалежні вектори на площині (або три лінійно незалежні вектори в просторі) утворюють базис, якщо будь-який вектор площини (простору) може бути представлений у вигляді їх лінійної комбінації. Числові коефіцієнти цієї лінійної комбінації називаються координатами даного вектора у базисі, що розглядається: якщо a, b, c – базис і $d=ka+mb+pc$, то числа k, m, p є координати вектора d в базисі a, b, c .

Властивості базису:

1. Будь-які два неколінеарних вектори утворюють базис на площині, а будь-які три некомпланарних вектори – базис у просторі.

2. Розклад даного вектора по даному базису єдиний, тобто його координати в даному базисі визначаються єдиним чином.

3. При додаванні двох векторів їх координати відносно будь-якого базиса додаються.

4. При множенні вектора на число усі його координати множаться на це число.

Означення 12. Проекцією вектора AB на вісь Ox називається довжина напрямленого відрізка $A'B'$ осі Ox , де A' і B' – основи перпендикулярів, опущених з точок A і B на вісь Ox .

Позначення: $pr_{Ox}a$.

Властивості проєкцій:

1. $Pr_{Ox}a = |a|\cos\varphi$, де φ – кут між a і віссю Ox .
2. При додаванні двох векторів їх проєкції на будь-яку вісь додаються.
3. При множенні вектора на число його проєкція на будь-яку вісь множиться на це число.

Зауваження. Властивості 2 і 3 назвемо лінійними властивостями проєкції.

Розглянемо декартову систему координат, базис якої утворюють в просторі три попарно ортогональних одиничних вектори i, j, k . Тоді будь-який вектор d може бути представлений у вигляді їх лінійної комбінації:

$$d = Xi + Yj + Zk. \quad (3.3)$$

Означення 13. Числа X, Y, Z називаються *декартовими координатами вектора d* .

Зауваження. Декартові координати вектора рівні його проєкціям на осі Ox, Oy і Oz декартової системи координат.

Означення 14. Косинуси кутів, утворених вектором з осями декартової системи координат, називаються його *напрямними косинусами*.

Властивості напрямних косинусів:

1. $X = |d| \cos\alpha, Y = |d| \cos\beta, Z = |d| \cos\gamma$.
2. $\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$
3. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

3.5. Скалярний добуток векторів.

Означення. Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число (скаляр), яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Якщо хоча б один із векторів дорівнює нулю, то кут між векторами не визначений і за означенням скалярний добуток дорівнює нулю.

Отже:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\varphi. \quad (3.4)$$

де φ – кут між векторами. Використовуючи формулу проєкції вектора, можна також записати:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| pr_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| pr_{\vec{a}} \vec{b}.$$

Властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$
4. $(\vec{a} \cdot \vec{a}) = |\vec{a}|^2; \sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{a})} = |\vec{a}|.$

2. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
3. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.
5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, і навпаки,
 $\vec{a} \perp \vec{b}$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,
 $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$.

Нехай задано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тоді, використовуючи властивості скалярного добутку, умови $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$, маємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (3.5)$$

Отже, $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

З рівності (3.5) випливає, що:

1. Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

2. Кут між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна знайти за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

3.6. Векторний добуток векторів.

Означення. Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, якщо:

- 1) довжина вектора $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, де φ — кут між двома векторами;
- 2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- 3) вектор $\vec{c}$ спрямований так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.

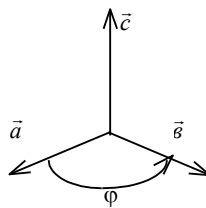


Рис. 3.1

Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах.

Властивості векторного добутку:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$ — колінеарні вектори.
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
3. $(\lambda \vec{a} \times \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Знайдемо векторні добутки одиничних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. З колінеарності векторів випливає: $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$. З того, що одиничні вектори збігаються з напрямом осей прямокутної системи координат, маємо:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

Знайдемо координати вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, якщо $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$.

$$\begin{aligned} \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned} \quad (3.6)$$

або

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

3.7. Мішаний добуток векторів.

Означення. Мішаним добутком векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

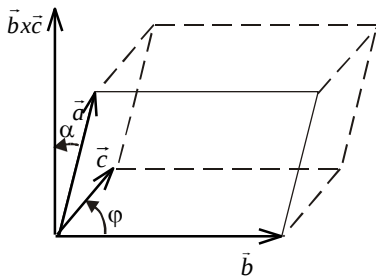


Рис. 3.2

Розглянемо геометричний зміст змішаного добутку. Для цього побудуємо на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, вважаючи, що вони не лежать в одній площині, тобто не компланарні, паралелепіпед (рис. 3.2).

Знайдемо об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рис. 3.2). Площа основи його дорівнює модулю векторного добутку векторів $|\vec{b} \times \vec{c}|$ $s = |\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{c}| |\vec{b}| \sin \varphi$. Висота дорівнює $|\vec{a}| \cos \alpha$. Отже, остаточно маємо:

$$V = |\vec{a}| \cos \alpha \cdot |\vec{b}| |\vec{c}| \sin \varphi = |\vec{a}| |\vec{b} \times \vec{c}| \cos \alpha = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| \quad (3.8)$$

З останнього випливає, що модуль мішаного добутку чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. З рівності (3.8) маємо умову компланарності трьох векторів $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0.$$

Ураховуючи формули (3.6) і (3.7) знаходження скалярного і векторного добутків, маємо:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot \left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \vec{k} \right) = \\ &= a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}, \quad \text{або } \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

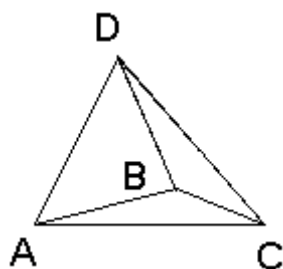
Властивості мішаного добутку:

1. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$.



Дано координати вершин піраміди $A(0;0;2)$, $B(2;2;1)$, $C(-2;1;0)$ та $D(-1;2;0)$. Знайти:

- 1) довжину ребра AB ;
- 2) написати рівняння ребра AB ;
- 3) обчислити кут між ребрами AB і AC ;
- 4) обчислити площу основи ABC ;
- 5) зробити схематичний малюнок піраміди.



• Зробимо схематичний малюнок піраміди.

- 1) Знайдемо довжину ребра AB . Одержимо

$$AB = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3.$$

- 2) Напишемо рівняння ребра AB :

$$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-0}{2-0} = \frac{z-2}{1-2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

- 3) Для обчислення косинуса кута між ребрами AB і AC знайдемо координати векторів:

$\overrightarrow{AB} = \{2-0; 2-0; 1-2\} = \{2; 2; -1\}$ і $\overrightarrow{AC} = \{-2-0; 1-0; 0-2\} = \{-2; 1; -2\}$. Тоді одержимо

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{-4 + 2 + 2}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{9}} = \frac{0}{9} = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

- 4) Площа основи $\triangle ABC$ дорівнює половині площі паралелограма, який побудований на векторах $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$. Тобто $S_{\Delta} = \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-4+1) + \vec{j}(-4-2) + \vec{k}(2+4) = -3\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k};$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |-3\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{81} = 9;$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 9 = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ (кв. одиниць)}.$$

Вправи для самостійного розв'язування.

Дано координати вершин піраміди $ABCD$. Знайти:

- 1) довжину ребра AB ;
- 2) написати рівняння ребра AB ;
- 3) обчислити кут між ребрами AB і AC ;
- 4) обчислити площу основи ABC ;
- 5) зробити схематичний малюнок піраміди.

1. $A(0;-1;2)$, $B(2;1;1)$, $C(-2;0;0)$, $D(-1;1;0)$.
2. $A(1;-1;2)$, $B(3;1;1)$, $C(-1;0;0)$, $D(0;1;0)$.
3. $A(2;-1;2)$, $B(4;1;1)$, $C(0;0;0)$, $D(1;1;0)$.
4. $A(3;-1;2)$, $B(5;1;1)$, $C(1;0;0)$, $D(2;1;0)$.
5. $A(4;-1;2)$, $B(6;1;1)$, $C(2;0;0)$, $D(3;1;0)$.
6. $A(-1;-1;2)$, $B(1;1;1)$, $C(-3;0;0)$, $D(-2;1;0)$.
7. $A(-2;-1;2)$, $B(0;1;1)$, $C(-4;0;0)$, $D(-3;1;0)$.
8. $A(-3;-1;2)$, $B(-1;1;1)$, $C(-5;0;0)$, $D(-4;1;0)$.
9. $A(-4;-1;2)$, $B(-2;1;1)$, $C(-6;0;0)$, $D(-5;1;0)$.
10. $A(-5;-1;2)$, $B(-4;1;1)$, $C(-7;0;0)$, $D(-6;1;0)$.

Аналітична геометрія.

4.1. Пряма лінія на площині.

Геометричним образом лінійного рівняння $Ax + By + C = 0$ є пряма на площині. Змінні x та y , що входять до рівняння, – це координати множини точок, що лежать на цій прямій. Якщо поділити рівняння прямої на один з відмінних від нуля коефіцієнтів A , B , C , то це рівняння буде залежати від двох параметрів, що визначають розміщення лінії відносно прямокутної системи координат.

Наприклад, якщо поділимо на $B \neq 0$, то одержимо *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*:

$$y = kx + b, \quad (4.1)$$

де $k = \operatorname{tg} \alpha$, α – кут нахилу прямої до осі OX , b – відрізок, що відтинає пряма на осі OY .

Означення. Рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$, де (x_0, y_0) – координати точки, що лежить на прямій, описує множину *прямих, що проходять через задану точку*.

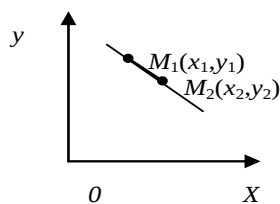


Рис. 4.1

Означення. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки (x_1, y_1) та (x_2, y_2) , можна записати у вигляді:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (4.2)$$

Означення. Якщо рівняння прямої подати у вигляді $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, то параметри a, b визначають відрізки, що відтинає пряма на відповідних осях системи координат.

Означення. Кут між двома прямими $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ знаходять за формулою:

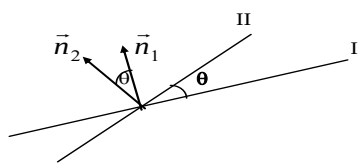


Рис. 4.2

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}, \quad (4.3)$$

$$\cos \theta = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} + \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (4.4)$$

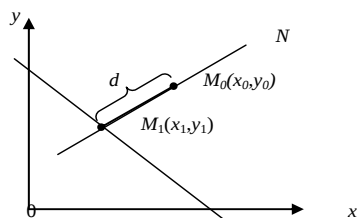


Рис. 4.3

з якої можна одержати умову паралельності ($k_1 = k_2$) і перпендикулярності $\left(k_2 = -\frac{1}{k_1}\right)$ двох прямих.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ обчислюють за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (4.5)$$

 Дано рівняння сторін AB ($x - 3y + 3 = 0$) і AC ($x + 3y + 3 = 0$) трикутника ABC . Точка $D(-1; 3)$ – основа висоти AD . Записати рівняння медіани AM , бісектриси AF і висоти AD трикутника, а також знайти кут A .

• Знайдемо координати вершини A . Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ x + 3y + 3 = 0 \end{cases} \quad A(-3; 0).$$

Запишемо рівняння висоти AD , використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві точки $\frac{x+3}{-1+3} = \frac{y}{3}$ або $y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$. Використовуючи умову перпендикулярності $\left(k_2 = -\frac{1}{k_1}\right)$, знайдемо кутовий коефіцієнт сторони BC трикутника: $k_2 = -\frac{2}{3}$. Тоді рівняння сторони BC можна записати так: $y - 3 = -\frac{2}{3}(x + 1)$; або $2x + 3y - 7 = 0$. Знайдемо координати вершин B і C трикутника, розв'язавши відповідно системи рівнянь:

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0; \\ 2x + 3y - 7 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x + 3y + 3 = 0; \\ 2x + 3y - 7 = 0. \end{cases}$$

Одержимо: $B\left(\frac{4}{3}; \frac{13}{9}\right)$; $C\left(10; -\frac{13}{3}\right)$. Основа медіани — це середина відрізка BC ; $M\left(\frac{17}{3}; \frac{13}{9}\right)$. Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві точки, одержимо

рівняння медіани: $3x - 18y - 43 = 0$. Знайдемо довжини сторін $AB = \frac{13\sqrt{10}}{9}$; $AC = \frac{13}{9}\sqrt{82}$.

Тоді обчислимо відношення, у якому основа бісектриси поділяє сторону BC : $\lambda = \frac{AC}{AB} = \sqrt{\frac{41}{5}}$.

За формулами $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$; $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ знайдемо координати основи бісектриси $F\left(\frac{30\sqrt{5} + 4\sqrt{41}}{3(\sqrt{5} + \sqrt{41})}; \frac{-13(4\sqrt{5} - \sqrt{41})}{9(\sqrt{5} + \sqrt{41})}\right)$. Рівняння бісектриси запишемо як рівняння прямої, що

проходить через задані точки: $\frac{x+3}{3(39\sqrt{5} + 7\sqrt{41})} = \frac{-y}{13(4\sqrt{5} - \sqrt{41})}$. Для знаходження кута A

визначимо кутові коефіцієнти прямої AC — $k_1 = -\frac{1}{3}$ і прямої AB — $k_2 = \frac{1}{3}$.

$$\text{Тоді } \operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{3}{5}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{3}{5}.$$

 Дано трикутник $A(1; 2)$, $B(3; 7)$, $C(5; -13)$. Знайти відстань від вершини B до медіани, що проходить через точку A .

• Знайдемо координати основи медіани: $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4$;
 $y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{7 - 13}{2} = -3$. Запишемо рівняння медіани як прямої, що проходить через дві задані точки: $\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-2}{-3-2}$, або $5x + 3y - 11 = 0$. Відстань від точки $B(3; 7)$ до медіани знайдемо за формулою: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|5 \cdot 3 + 3 \cdot 7 - 11|}{\sqrt{25 + 9}} = \frac{25}{\sqrt{34}}$.

 Знайти координати точки, що розташована на віддалі 5 одиниць від прямої $3x + 4y - 10 = 0$ і прямої $5x - 12y + 26 = 0$.

• Нехай (x, y) – координати шуканої точки, тоді маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{|3x + 4y - 10|}{\sqrt{9 + 16}} = 5; \\ \frac{|5x - 12y + 26|}{\sqrt{25 + 144}} = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1) \begin{cases} 3x + 4y = 35; \\ 5x - 12y = 39; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} 3x + 4y = 35; \\ 5x - 12y = -91; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} 3) \begin{cases} 3x - 4y = -15; \\ 5x - 12y = 39; \end{cases} \\ 4) \begin{cases} 3x - 4y = -15; \\ 5x - 12y = -91. \end{cases} \end{cases}$$

Отже, точок буде чотири: $A\left(\frac{72}{7}; \frac{29}{28}\right)$; $B(1; 8)$; $C(-21; -12)$; $D\left(-\frac{23}{2}; -\frac{39}{8}\right)$.

 Скласти рівняння бісектрис кутів, утворених двома прямими $2x - 9y + 18 = 0$ і $6x + 7y - 21 = 0$.

• Бісектриса є множиною точок, рівновіддалених від сторін кута. Нехай $M(x, y)$ — одна з точок цієї множини. Тоді, прирівнюючи відстані від цієї точки до прямих, маємо:

$$\frac{|2x - 9y + 18|}{\sqrt{4 + 81}} = \frac{|6x + 7y - 21|}{\sqrt{36 + 49}} \Rightarrow |2x - 9y + 18| = |6x + 7y - 21|.$$

З останнього рівняння маємо рівняння двох бісектрис у вигляді: $4x + 16y - 39 = 0$ і $8x - 2y - 3 = 0$. Слід зазначити, що бісектриси взаємно перпендикулярні: $k_1 = -\frac{1}{4}$; $k_2 = 4$.

Вправи для самостійного розв'язування.

1. Вивести рівняння прямої на площині з кутовим коефіцієнтом.

2. Вивести рівняння прямої, що проходить через задану точку з заданим кутовим коефіцієнтом.
3. Вивести рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

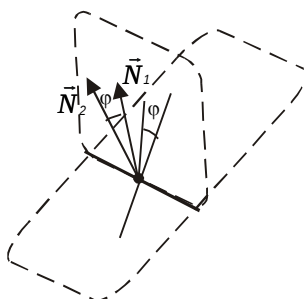
4.2. Площина і пряма у просторі.

4.2.1. Площина.

Будь-яке рівняння першого степеня відносно координат точки простору $Ax + By + Cz + D = 0$ відображає площину. Коефіцієнти при змінних A, B, C є компонентами вектора, перпендикулярного до площини.

Кут між двома площинами $Ax + By + Cz + D = 0$ і $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ визначається за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}. \quad (4.6)$$



Умовою їх паралельності є: $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$, а перпендикулярності – $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$.

Відстань від точки $A(x_0, y_0, z_0)$ до площини можна знайти за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

4.2.2. Види рівнянь прямої.

Пряму у просторі можна задати як лінію перетину двох площин у прямокутній системі координат:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Зрозуміло, що ці площини мають бути непаралельними, тобто їхні нормальні вектори $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ – не колінеарні. Система (4.7) називається *загальним рівнянням прямої*. Дістанемо ще деякі форми рівняння прямої.

А. Канонічне рівняння прямої. Нехай у системі координат $Oxyz$ задано пряму l і ненульовий вектор $\vec{s}$, колінеарний цій прямій. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить прямій, а напрямний вектор $\vec{s} = (m, n, p)$. Тоді довільна точка $M(x, y, z)$ лежатиме на прямій тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ колінеарні:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (4.8)$$

Рівняння (4.8) називається **канонічним рівнянням прямої у просторі**.

В. Параметричне рівняння прямої.

У рівнянні прямої (4.8) позначимо через t кожне з рівних відношень. Тоді

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t.$$

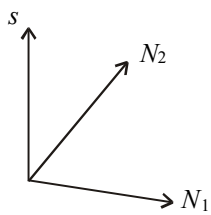
Звідси дістаємо:
$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

С. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Нехай дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ належать прямій у просторі. Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ можна розглядати як напрямний вектор прямої. Заміняючи ним вектор $\vec{s} = (m, n, p)$ у рівнянні (4.8), дістанемо шукане рівняння прямої у просторі

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (4.9)$$

Маючи кілька рівнянь однієї й тієї ж прямої, поміркуємо, як дістати зв'язок між ними. Розглянемо, як із загального рівняння (4.7) вивести канонічне рівняння (4.8). Для цього потрібно знайти точку, яка лежить на прямій, тобто розв'язати систему (4.7), і напрямний вектор $\vec{s}$ прямої. Пригадуючи геометричний зміст коефіцієнтів у рівнянні площини, запишемо вектор $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ – перпендикулярний до першої площини, а $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ – неперпендикулярний до другої.



Напрямний вектор прямої $\vec{s}$ перпендикулярний до обох цих векторів (рис.). Таким чином, $\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$. Використовуючи запис векторного добутку через визначник, дістаємо:

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ B_1 & C_1 & A_1 \\ B_2 & C_2 & A_2 \end{vmatrix} = (m, n, p). \quad (4.10)$$

4.2.3. Кут між прямими у просторі.

Нехай задано дві прямі

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Візьмемо до уваги, що вектори $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ колінеарні відповідним прямим і скористаємося формулою:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (4.11)$$

З останньої формули випливає умова **перпендикулярності** двох прямих:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,$$

а умову паралельності двох прямих дістанемо як умову колінеарності напрямних векторів $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Розглянемо ще задачу знаходження відстані від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$.

Шукану відстань можна розглянути як довжину висоти паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_0 M_1}$ і $\vec{s}$ (рис.). Відомо, що площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку векторів, на яких побудовано цей паралелограм. Доходимо висновку, що шукану висоту, а отже, і відстань від точки до прямої можна знайти за формулою:

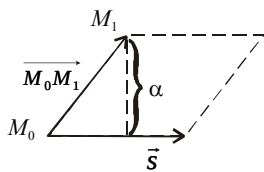


Рис. 4.4

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0 M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{\left| \begin{matrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{matrix} \right|^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \quad (4.12)$$

4.2.4. Взаємне розміщення прямої і площини у просторі.

Нехай задано пряму $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ і площину $Ax + By + Cz + D = 0$ у просторі.

Якщо $\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$, то пряма перпендикулярна до площини, а коли $Am + Bn + Cp = 0$, пряма паралельна площині.

Нехай $Am + Bn + Cp \neq 0$. Знайдемо координати точки перетину площини і прямої. Перейдемо до канонічного рівняння прямої

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt$$

і підставимо значення x, y, z у рівняння площини:

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0.$$

Звідси, використовуючи умову непаралельності, знайдемо значення параметра

$$t^* = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Координати точки перетину:

$$x = x_0 + mt^*, \quad y = y_0 + nt^*, \quad z = z_0 + pt^*.$$

4.2.5. Кут між площиною і прямою.

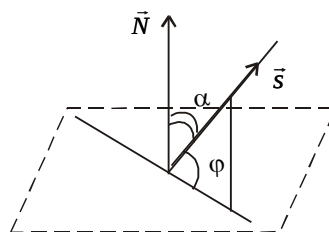


Рис. 4.5

Кут φ між площиною і прямою дорівнює куту між прямою і її проекцією на площину (рис.). Вектор $\vec{N} = (A, B, C)$ – перпендикулярний до площини, а кут α , який він утворює з вектором $\vec{s}$, разом з φ у сумі дорівнює 90° . Тобто $\alpha + \varphi = 90^\circ$.

Знайдемо кут α як кут між двома векторами.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{N} \cdot \vec{s}}{|\vec{N}| |\vec{s}|}.$$

Якщо $\alpha < 90^\circ$, то $\cos \alpha = \cos(90 - \varphi) = \sin \varphi$, а якщо $\alpha > 90^\circ$, то $\cos \alpha = \cos(90 - \varphi) = -\sin \varphi$, у будь-якому разі $\sin \varphi = |\cos \alpha|$. Отже,

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (4.13)$$



Скласти рівняння площини, що проходить через вісь OZ і утворює з площиною $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ кут 60° , і знаходження її відстані до точки $A(1; 3; 5)$.

• Рівняння шуканої площини можна записати у вигляді $Ax + By = 0$, тому що вона проходить через вісь OZ . Використаємо другу умову задачі: $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{2A + B}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{10}}$, з якої одержимо рівняння: $3\frac{A^2}{B^2} + 8\frac{A}{B} - 3 = 0$; $\frac{A}{B} = -3$ або $\frac{A}{B} = \frac{1}{3}$. Остаточно маємо, що умовам задачі задовольняють дві площини: $3x - y = 0$ і $x + 3y = 0$. Точка A лежить на першій площині, тому що $d_1 = 0$, а відстань її до другої площини $d_2 = \frac{|1 + 9|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$.



Знайти напрямний вектор прямої

$$\begin{cases} x + y - z = 0; \\ x - y = 0 \end{cases}$$

і кути, які вона утворює з осями системи координат.

• Вектори $\vec{N}_1(1; 1; -1)$ і $\vec{N}_2(1; -1; 0)$ перпендикулярні до відповідних площин, що задають рівняння прямої, тому напрямний вектор прямої $\vec{s}$ розташований перпендикулярно до кожного з векторів $\vec{N}_1, \vec{N}_2$. Згідно з означенням векторного добутку векторів

$$\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}.$$

Тобто: $\vec{s} = (-1; -1; -2)$ або $\vec{s} = (1; 1; 2)$. Кути з осями знайдемо за формулами:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}; \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{6}}; \cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$



Показати, що прямі $\begin{cases} x - z + 2 = 0; \\ y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$ і $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$

перетинаються, і написати рівняння площини, в якій вони розташовані.

• Дві прямі будуть лежати на одній площині, коли їх напрямні вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ і вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ будуть компланарними. Точка $M_1(-2; 1; 0)$ лежить на першій прямій, а $M_2(2; 4; 2)$ – на

другій. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (4; 3; 2)$. Направний вектор $\vec{s}_1 = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$

$$= \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}; \vec{s}_2 = (3; 1; 1). (\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0. \text{ Отже, прямі лежать на одній}$$

площині. Для запису рівняння цієї площини знайдемо вектор

$$\vec{N} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}. \text{ Точка } M_1(-2; 1; 0) \text{ лежить на цій площині. Отже, маємо:}$$

$$x + 2 + 2(y - 1) - 5z = 0 \text{ або остаточно: } x + 2y - 5z = 0.$$

Закінчіть вирази:

1. Загальне рівняння площини в просторі має вигляд: ...
2. Вектор $\vec{N} = (A, B, C)$ направлений ...
3. Якщо одна з проекцій вектора $\vec{N}$ на вісь системи координат дорівнює нулю, то ...
4. Якщо дві проекції вектора $\vec{N}$ на осі системи координат дорівнюють нулю, то ...
5. Кут між двома площинами знаходиться за формулою: ...
6. Умовою перпендикулярності двох площин є ...
7. Умовою паралельності двох площин є ...
8. Нормальне рівняння площини має вигляд: ...
9. Відстань від точки до площини знаходиться за формулою: ...
10. Загальне рівняння прямої у просторі має вигляд: ...
11. Канонічне рівняння прямої у просторі має вигляд: ...

12. Параметричне рівняння прямої у просторі має вигляд: ...
13. Рівняння прямої у просторі, що проходить через дві задані точки, має вигляд: ...
14. Кут між двома прямими у просторі визначається за формулою: ...
15. Кут між прямою у просторі і площиною знаходиться за формулою: ...
16. Умова паралельності прямої і площини, має вигляд: ...
17. Умова перпендикулярності прямої і площини має вигляд: ...
18. Умова того, що пряма лежить на площині, має вигляд: ...
19. Точка перетину прямої і площини знаходиться за формулою: ...

Вправи для самостійного розв'язування.

20. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(0; 1; 3)$; $M_2(2; 4; 5)$; $M_3(1, -2, 1)$.
21. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(-4; 0; 4)$ і відтинає на осях OX і OY відповідно відрізки $a = 4$; $b = 3$.
22. Через точку $M(-1; 2; 3)$ проведено площину перпендикулярно до $\overrightarrow{OM}$. Написати її рівняння.
23. Знайдіть кут між площинами:
 - 1) $x - 2y + 2z - 8 = 0$ і $x + z - 6 = 0$;
 - 2) $x + 2z - 6 = 0$ і $x + 2y - 4 = 0$.
24. Написати рівняння площини, що проходить через точку $(-1; -1; 2)$ і перпендикулярна до площин $x - 2y + z - 4 = 0$ і $x + 2y - 2z + 4 = 0$.
25. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $(2; 2; -2)$ і паралельна до площини $x - 2y - 3z = 0$.
26. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-1; -2; 0)$ і $M_2(1; 1; 2)$ і перпендикулярна до площини $x + 2y + 2z - 4 = 0$.
27. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $O(0; 0; 0)$, $A(3; -2; 1)$ і $B(1; 4; 0)$.
28. Знайти кут між площиною $x - y + \sqrt{2}z - 5 = 0$ і координатною площиною Oyz .
29. Обчислити відстані:
 - 1) точки $(3; 1; -1)$ до площини $22x + 4y - 20z - 45 = 0$;
 - 2) точки $(4; 3; -2)$ до площини $3x - y + 5z + 1 = 0$;
 - 3) точки $\left(2; 0; -\frac{1}{2}\right)$ до площини $4x - 4y + 2z + 17 = 0$.
30. Обчислити висоту піраміди, опущену з вершини S , якщо $S(0; 6; 4)$, $A(3; 5; 3)$, $B(-2; 11; -5)$, $C(1; -1; 4)$.
31. Скласти рівняння площини, якщо вона віддалена від точок $A(6; 1; -1)$, $B(0; 5; 4)$ і $C(5; 2; 0)$ відповідно на відстані $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_3 = 0$.
32. Знайти рівняння площин, що поділяють навпіл двогранні кути між площинами $3x - y + 7z - 4 = 0$ і $5x + 3y - 5z + 2 = 0$.
33. На осі OZ знайти точку, рівновіддалену від двох площин: $x + 4y - 3z - 2 = 0$ і $5x + z + 8 = 0$.
34. Обчислити відстань між площинами $11x - 2y - 10z + 15 = 0$ і $11x - 2y - 10z - 45 = 0$.

35. Через лінію перетину площин $4x - y + 3z - 1 = 0$ і $x + 5y - z + 12 = 0$ провести площину, що: 1) проходить через точку $(1; 1; 1)$, 2) паралельна осі OY , 3) перпендикулярна до площини $2x - y + 5z - 3 = 0$.

36. На відстані 3 одиниць від площини $3x - 6y - 2z + 14 = 0$ провести паралельну їй площину.

37. Знайти точки перетину прямої $\begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0; \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$ з координатними площинами.

38. Скласти рівняння ребер тетраедра, якщо його вершинами є: $A(0; 0; 2)$, $B(4; 0; 5)$, $C(5; 3; 0)$, $D(-1; 4; -2)$.

39. Перевірити, чи лежать точки $(3; 0; 1)$, $(0; 2; 4)$, $\left(1; \frac{4}{3}; 3\right)$ на одній прямій.

40. Визначити напрямні косинуси прямих:

$$1) \frac{x-1}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+2}{12}; \quad 2) \frac{x}{12} = \frac{y-7}{9} = \frac{z+3}{20}.$$

41. Визначити кут між прямими $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2}$ і $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}$.

42. Звести до канонічного вигляду загальне рівняння прямої $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0; \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$

43. Обчислити напрямні косинуси прямої $\begin{cases} 5x - 6y + 2z + 21 = 0; \\ x - z + 3 = 0. \end{cases}$

44. Через точку $(2; -5; 3)$ провести пряму:

$$1) \text{ паралельно прямій } \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z+3}{9};$$

$$2) \text{ паралельно прямій } \begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0; \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

45. У площині Oxz знайти пряму, що проходить через початок системи координат і перпендикулярна до прямої $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{1}$.

46. Чи перетинаються прямі:

$$1) \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-5}{5} \text{ і } \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1};$$

$$2) \begin{cases} 4x + z - 1 = 0; \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} 3x + y - z + 4 = 0; \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}?$$

47. Написати рівняння перпендикуляра, проведеного від точки $(2; 3; 1)$ до прямої $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

48. З початку системи координат опустити перпендикуляр на пряму $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$.

49. Через точку $A(4; 0; -1)$ провести пряму так, щоб вона перетинала дві прямі: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3}$ і $\frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

50. Знайти відстань від точки $O(0; 0; 0)$ до прямої $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{-5}$.

51. Знайти відстань між паралельними прямими $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$ і $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$.

52. Довести, що пряма $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$ паралельна площині $2x + y - z = 0$, а пряма $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{3}$ лежить на цій площині.

53. Написати рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ і точку $(3; 4; 0)$.

54. Написати рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі: $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ і $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

55. Написати рівняння прямої, що проходить через початок системи координат і утворює однакові кути з площинами $3x - 4y = 0$, $y = 0$; $z = 0$. Знайти цей кут.

56. Знайти точку перетину прямої $x = 2t - 1$, $y = t + 2$, $z = 1 - t$ з площиною $3x - 2y + z = 3$.

57. Знайти точку перетину прямої $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ з площиною $x + 2y + 3z - 29 = 0$.

58. Знайти проекцію точки $(3; 1; -1)$ на площину $x + 2y + 3z - 30 = 0$.

59. Знайти проекцію точки $(2; 3; 4)$ на пряму $x = y = z$.

60. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $(2; 1; 0)$ на пряму $\begin{cases} x - 3z + 1 = 0; \\ y - 2z = 0. \end{cases}$

61. Через пряму $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ провести площину, перпендикулярну до площини $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

62. Знайти проекцію прямої $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ на площину $x - y + 3z + 8 = 0$.

63. Провести площину, що проходить через перпендикуляри, опущені з точки $(-3; 2; 5)$ на площини $4x + y - 3z + 13 = 0$ і $x - 2y + z - 11 = 0$.

64. Через пряму $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}$ провести площину паралельно площині $x + y - z + 15 = 0$.

65. На прямій $\frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{-1}$ знайти точку, найближчу до точки $(3; 2; 6)$.

66. На прямій $\begin{cases} x + 2y + z = 1; \\ 3x - y + 4z = 29 \end{cases}$ знайти точку, рівновіддалену від точок $A(3; 11; 4)$, $B(-5; -13; -2)$.

67. Знайти точку, симетричну точці $(4; 3; 10)$ відносно прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

4.3. Криві другого порядку.

4.3.1. Еліпс та його канонічне рівняння. Властивості.

Розглянемо тепер лінії другого порядку, які на площині в загальному випадку можна записати так:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (4.14)$$

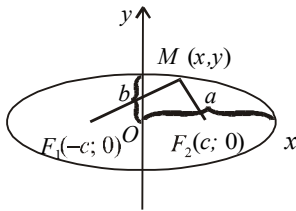
Рівняння (4.14) описує всі криві другого порядку в загальному випадку. Спинимось спочатку на простіших, так званих канонічних рівняннях ліній другого порядку.

Означення. Множина точок площини, для яких сума відстаней від двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є величиною сталою, яка дорівнює $2a$ і більша, ніж відстань між фокусами, називається *еліпсом*.

На рис. зображено $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокуси еліпса, $M(x, y)$ – точка множини, яка задовольняє означення, тобто $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, причому $2c < 2a \Rightarrow a > c$.

Тоді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.15)$$



канонічне рівняння еліпса, де $b^2 = a^2 - c^2$.

Розглянемо геометричний зміст параметрів, що входять в рівняння (4.15). Якщо $x = 0$, $y = \pm b$, тобто точки $(0, b)$ і $(0, -b)$ є точками перетину еліпса з віссю Oy . Відрізок завдовжки b називають *малою піввіссю* еліпса. При $y = 0$, $x = \pm a$ і відповідно $(a, 0)$; $(-a, 0)$ є точками перетину еліпса з віссю Ox . Відрізок завдовжки a – *велика піввісь* еліпса. З парності виразу (9.24) за x і за y випливає симетрія еліпса відносно осей Ox і Oy . На рис. зображено еліпс.

Ексцентриситет еліпса – це відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$; за означенням $c < a$ і $\varepsilon \in [0, 1)$.

Оскільки $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$, то $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. З останньої рівності випливає геометричний зміст ексцентриситету, який полягає в тому, що він характеризує *ступінь витягнутості* еліпса. Так, при $\varepsilon = 0 \Rightarrow a = b$ маємо коло, якщо ε наближається до одиниці, то відношення довжини півосей еліпса стає малим, тобто еліпс витягується вздовж осі Ox .

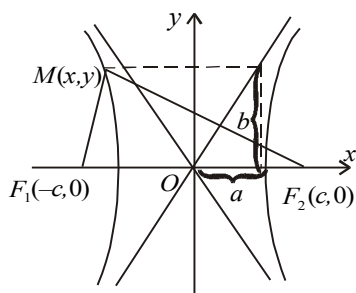
4.3.2. Гіпербола та її канонічне рівняння. Асимптоти гіперболи.

Означення. Множина точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величиною сталою, яка дорівнює $2a$ і менша за відстань між фокусами, називається *гіперболою*.

Скористаємось рис., з якого бачимо, що точки $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$ – фокуси гіперболи, точка $M(x, y)$ – точка визначеної множини. Тоді $||MF_1| - |MF_2|| = 2a$, $a < c$.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.16)$$



$$\text{де } b^2 = c^2 - a^2.$$

Дослідимо здобуте рівняння. Гіпербола не перетинає вісь Oy . При $y=0$; $x=\pm a$ і точки $(-a, 0)$; $(a, 0)$ – точки перетину з віссю Ox .

Розглянемо ще рівняння прямих $y = \pm \frac{b}{a}x$, які далі називатимемо *асимптотами гіперболи*. Враховуючи симетрію відносно осей Ox і Oy , будемо графік гіперболи, який зображено на рис.

Відрізки завдовжки b і a називають відповідно *уявною* і *дійсною осями гіперболи*.

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{c}{a}$, але $c > a$ і $\varepsilon > 1$. Беручи до уваги, що $c^2 = a^2 + b^2$, дістаємо: $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$, або $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

З останньої рівності випливає, що для гіперболи ексцентриситет характеризує ступінь нахилу віток гіперболи до осі Ox .

Дві прямі, рівняння яких $x = -\frac{a}{\varepsilon}$; $x = \frac{a}{\varepsilon}$, називаються *директрисами* еліпса і гіперболи. Для еліпса $0 \leq \varepsilon < 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} > a$, директриси еліпса – це дві прямі, що розміщені симетрично відносно осі Oy і проходять зовні еліпса. Для гіперболи $\varepsilon > 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Тобто директриси гіперболи розміщені симетрично відносно осі Oy і лежать між вітками гіперболи.

Для еліпса і гіперболи можна сформулювати важливе *твердження*: якщо r — відстань від деякої точки еліпса або гіперболи до будь-якого фокуса, а d — відстань від цієї самої точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то відношення $\frac{r}{d}$ *стале й дорівнює ексцентриситету, тобто* $\varepsilon = \frac{r}{d}$.

Розглянуте твердження можна покласти в основу означення цих ліній.

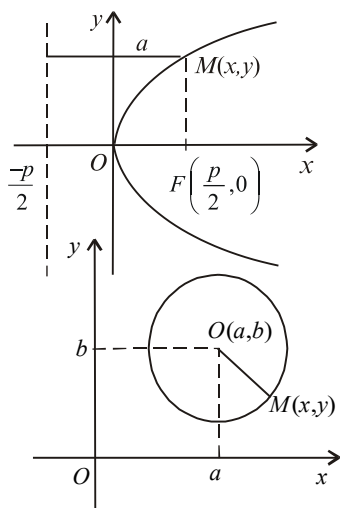
Означення. Множина точок, для яких відношення відстаней від фокуса і до відповідної директриси — величина стала, що дорівнює ексцентриситету ε , є *еліпс*, якщо $\varepsilon < 1$, і *гіпербола*, якщо $\varepsilon > 1$.

4.3.3. Парабола та її канонічне рівняння. Властивості.

Означення. Множина точок площини, що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається *директрисою*, є *парабола*.

За означенням $r = d$, отже (див. рис.):

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}, \text{ або } y^2 = 2px. \quad (4.17)$$



– канонічне рівняння параболи, коли $\varepsilon = 1$. Парабола симетрична осі Ox , проходить через початок системи координат. Її графік подано на рис.

Коло. До кривих другого порядку належить і добре відома лінія, яка називається *колом* (рис.).

Означення. Множина точок, що містяться на однаковій відстані від заданої точки – центра, називається *колом*. За означенням $OM = R$ або $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$.

Піднісши обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (4.18)$$

– канонічне рівняння кола. Тут (a, b) — координати центра кола, R — його радіус. Розкривши дужки в лівій частині (4.18), дістанемо, очевидно, рівняння другого степеня, тобто коло — також крива другого порядку.

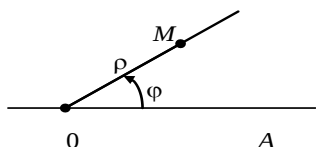


Рис. 4.6

4.3.4. Системи координат: полярна, циліндрична й сферична.

I. Полярна система.

O — полюс, OA — полярна вісь. Полярними координатами називаються числа ρ і φ , де ρ — перша координата або **полярний радіус**, число φ — друга координата або **полярний кут**.

Формули переходу декартова $\leftrightarrow$ полярна

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (4.19)$$

I, навпаки

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad (4.20)$$

II. Циліндрична система

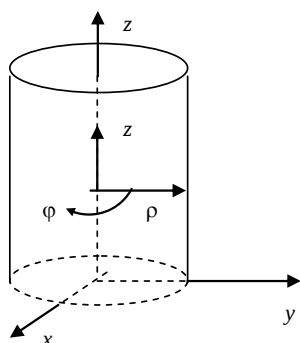


Рис. 4.7

ρ — радіус, φ — кут у площині, z — вертикально:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases} \quad (4.21)$$

III. Сферичні координати

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases} \quad (4.22)$$

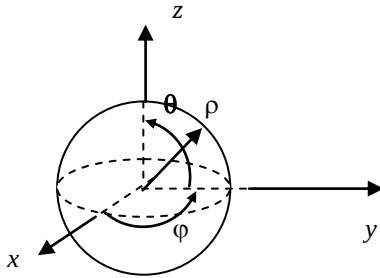


Рис. 4.8

4.4. Поверхні другого порядку.

4.4.1. Еліпсоїд.

Означення. Поверхня, яка в прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (4.23)$$

називається *еліпсоїдом*.

Для встановлення геометричного образу рівняння (4.23) скористаємось перерізами, паралельними площині Oxy . Кожен з наших перерізів визначається площиною $z = h$, де h – будь-яке число, а лінія, яка утворюється в перерізі, визначається системою рівнянь:

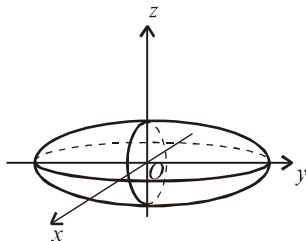


Рис. 4.9

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

Дослідимо цю систему залежно від h . Якщо $|h| > c$, то, оскільки $c > 0$, дістаємо $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$. У такому разі система рівнянь визначає

уявний еліпс, тобто точок перетину еліпсоїда з площиною $z = h$ не існує. Якщо $h = \pm c$, то лінія перетину вироджується в точки $(0; 0; -c)$, $(0, 0, -c)$, тобто площини $z = \pm c$ дотикаються до еліпсоїда. Нарешті, якщо $|h| < c$ то досліджувану систему рівняння можна подати у вигляді

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1 \\ z = h. \end{cases}$$

Перше рівняння визначає еліпс, півосі якого змінюються залежно від h . При $h = 0$ у перетині еліпсоїда площиною $z = 0$ маємо найбільший еліпс.

Таким чином, проведений аналіз дозволяє зобразити геометричний образ еліпсоїда як замкненої овальної поверхні (рис.).

4.4.2. Гіперболоїд.

I. Однопорожнинний гіперболоїд.

Означення. Поверхня, яка в прямокутній системі координат визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (4.24)$$

називається *однопорожнинним гіперболоїдом*.

Для встановлення геометричного образу цієї поверхні зробимо перерізи її координатними площинами Oxy ($z = 0$) і Oxz ($y = 0$). Дістанемо дві системи

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \\ x = 0, \end{cases}$$

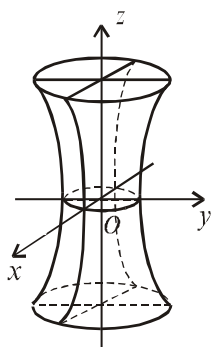


Рис. 4.10

з яких випливає, що в перерізі маємо гіперболи.

При перетині гіперболоїда площиною $z = h$ дістанемо лінії, що визначають еліпси

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1 \\ z = h. \end{cases}$$

Якщо $h = 0$, маємо найменший еліпс при перетині гіперболоїда площиною $z = 0$, якщо h необмежено зростає, то півосі еліпса зростають до нескінченності. Однопорожнинний гіперболоїд зображено на рис. .

II. Двопорожнинний гіперболоїд.

Означення. Поверхня, яка в прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (4.25)$$

називається *двопорожнинним гіперболоїдом*.

При перерізі його координатними площинами Oxz і Oyz дістанемо рівняння:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \\ x = 0, \end{cases}$$

з яких випливає, що в перерізі маємо гіперболи.

Розглянемо перерізи гіперболоїда площинами $z = h$, дослідивши систему:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Аналіз цих рівнянь показує, що при $|h| < c$ лінії перетину немає, при $|h| = c$ площина дотикається до гіперболоїда, при $|h| > c$ лінією перетину буде еліпс. Вигляд поверхні зображено на рис. .

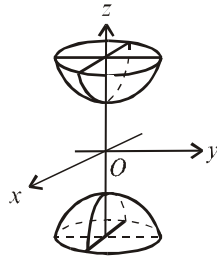


Рис. 4.11

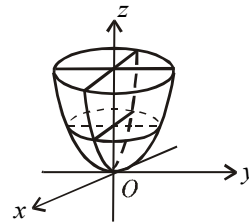


Рис. 4.12
Еліптичний параболоїд

4.4.3. Параболоїд.

I. Еліптичний параболоїд.

Означення. Поверхня, яка в прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 2z, \text{ де } p > 0, q = 0, \quad (4.26)$$

називається *еліптичним параболоїдом*.

При перетині еліптичного параболоїда координатними площинами Oxz і Oyz дістанемо лінії, що записуються рівняннями: $\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} y^2 = 2qz \\ x = 0 \end{cases}$, з яких випливає, що ці лінії – параболі.

При перерізах параболоїда площинами $z = h$ маємо: $\begin{cases} \frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1 \\ z = h, \end{cases}$ що відповідає

еліпсам при $h > 0$. Еліптичний параболоїд зображено на рис. .

II. Гіперболічний параболоїд.

Означення. Поверхня, яка в прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 2z, \text{ де } p > 0, q = 0, \quad (4.27)$$

називається *гіперболічним параболоїдом*.

Встановимо геометричний вигляд поверхні (4.27). У перетині параболоїда координатною площиною Oxz маємо $x^2 = 2pz$; $y = 0$, тобто в перетині дістаємо параболу. Її вітки спрямовані вгору, вона симетрична відносно осі Oz . У перетині параболоїда площинами $y = h$ також утворюються параболі $x^2 = 2p\left(z + \frac{h^2}{2q}\right)$, $y = h$.

Якщо січні площини мають рівняння $x=h$, то маємо $y^2 = 2p\left(z + \frac{h^2}{2q}\right)$, $x=h$ і вітки парабол перетину площини з параболоїдом спрямовані вниз, а їхні вершини розміщені на параболах $x^2 = 2pz$.

Розглянемо, нарешті, перетини параболоїда площинами $z=h$. Нехай маємо

$$\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1; \quad z = h.$$

Із цих рівнянь випливає, що при $h > 0$ у перетині дістанемо гіперболи, що перетинають площину Oxz , а при $h < 0$ – гіперболи, що перетинають площину Oyz . З аналізу ліній перетину гіперболічного параболоїда відповідними площинами випливає, що він має вигляд, зображений на рис. .

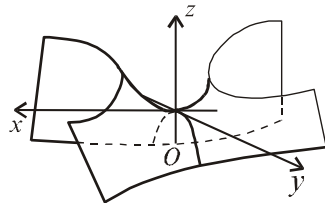


Рис. 4.13

Гіперболічний параболоїд

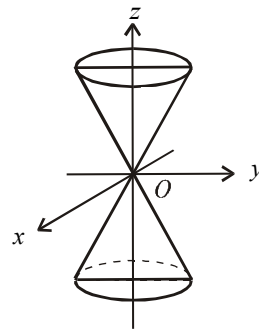


Рис. 4.14

Конус 2-го порядку

4.4.4. Конус другого порядку.

Означення. Поверхня, яка в прямокутній системі координат описується рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, називається *конусом другого порядку*.

У перетині поверхні площинами $x=0$ і $y=0$ одержуємо пари прямих, які є твірними конічної поверхні.

Якщо розглянути перетини поверхні площинами $z=h$, то маємо

$$\frac{x^2}{a^2 \frac{h^2}{c^2}} + \frac{y^2}{b^2 \frac{h^2}{c^2}} = 1; \quad z = h, \text{ тобто еліпси.}$$

Аналіз перетинів дає змогу побудувати поверхню, зображену на рис. .

4.4.5. Циліндри.

Якщо $p=0, q \neq 0$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ – *еліптичний циліндр* (рис. 4.15).

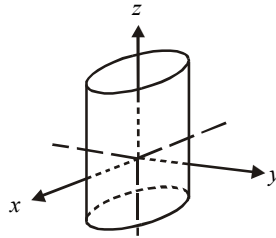


Рис. 4.15

Еліптичний циліндр

Якщо $p = 0, q \neq 0$; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ – гіперболічний циліндр (рис. 4.16).

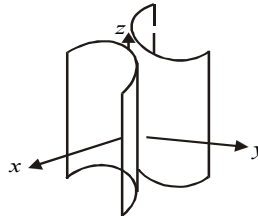


Рис. 4.16

Гіперболічний циліндр

Якщо $p^2 + q^2 \neq 0$; $\frac{z^2}{c^2} + qu = 0$ – параболічний циліндр (рис. 4.17).

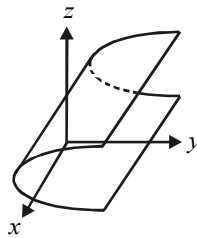


Рис. 4.17

Параболічний циліндр

Вправи для самостійного розв'язування.

1. Кінцевими точками одного з діаметрів кола є точки $A(1;3)$ і $B(-3;5)$. Написати рівняння цього кола.
2. Знайти величину радіуса кола $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$.
3. Написати рівняння лінії центрів двох кіл: $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ і $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0$.
4. Обчислити довжини осей, координати фокусів та ексцентриситет еліпса $25x^2 + 169y^2 = 4225$.
5. Написати канонічні рівняння парабол, які проходять через точку $M(-2;-3)$.
6. Написати канонічні рівняння парабол, які проходять через точку $M(4;1)$.
7. Обчислити довжину дійсної осі, координати фокусів, ексцентриситет та написати рівняння асимптот гіперболи $64x^2 - 17y^2 = 1088$.

8. Обчислити відстань між центрами кіл $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$ і $x^2 + y^2 + 4x + 14y + 49 = 0$.

9. Обчислити координати центра і величину радіуса кола $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 5 = 0$.

10. Через точку $M(-2; 5)$ провести прямі, які паралельні асимптотам гіперболи $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$.

5.1. Основні поняття числових рядів.

Ряди є основним обчислювальним засобом. Навіть у калькуляторах при обчисленні значень функцій використовуються ряди. Ряди застосовуються для наближених обчислень.

Нехай задано послідовність чисел $u_1, u_2, \dots, u_n \dots$.

Означення. Вираз $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ називається *рядом*, а самі числа $u_1, u_2, \dots, u_n \dots$ називаються *членами ряду*. Вираз u_n як функція від n називається *загальним членом ряду*.

Означення. Скінченні суми

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1, \\ S_2 &= u_1 + u_2, \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\dots \\ S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \end{aligned} \quad (5.1)$$

називаються *частинними сумами ряду*.

Означення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається *збіжним*, якщо існує границя частинних сум ряду

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad (5.2)$$

Означення. Границя частинних сум (5.2) називається *сумою ряду*. Якщо границя (5.2) не існує, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається *розбіжним*.



Дослідимо збіжність числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

• Знайдемо значення частинної суми ряду:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Шукаємо границю частинних сум ряду: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

Границя існує, отже, розглядуваний ряд збігається і його сума дорівнює 1.



Розглянемо ряд геометричної прогресії

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots, \quad (5.3)$$

I. Якщо $q \neq 1$, можемо знайти частинну суму ряду

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

II. Якщо $|q| < 1$, $q^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ і при цьому існує границя частинних сум ряду

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q},$$

ряд (5.3) збігається.

III. Якщо $|q| > 1$, границя частинних сум не існує і ряд (5.3) розбігається.

IV. Якщо $q = 1$, маємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1.$$

Його частинні суми

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty.$$

Границя частинних сум не існує, отже, при $q = 1$ ряд (5.3) розбігається.

V. Якщо $q = -1$, маємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots$$

і частинні суми

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 1, \quad S_4 = 0, \quad \dots \quad S_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n - \text{непарне}, \\ 0, & \text{якщо } n - \text{парне}. \end{cases}$$

Границя частинних сум S_n ряду не існує, і ряд (5.3) розбігається.

5.2. Необхідні і достатні умови збіжності числових рядів.

Теорема 1 (Критерій Коші). Для того, щоб ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігався, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайшлось таке $N = N(\varepsilon)$, що при будь-якому $p > 0$, $n \geq N$ виконується нерівність:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon. \quad (5.4)$$

Іншими словами, збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ рівносильна тому, що сума будь-якої кількості членів ряду, наступних за членом ряду з достатньо великим номером, може бути скільки завгодно малою.

Означення. Ряд

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots + u_{n+k} + \dots \quad (5.5)$$

називається *залишком ряду* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Очевидна теорема.

Теорема 2. Для того, щоб збігався ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, необхідно і достатньо, щоб збігався залишок ряду.

Доведення. Розглянемо при фіксованому значенні n частинну суму ряду (5.5).

$$\sigma_p = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots + u_{n+p} = S_{n+p} - S_n,$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sigma_p = \lim_{p \rightarrow +\infty} (S_{n+p} - S_n)$$

Існування границі $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sigma_p$ рівносильне існуванню границі $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, що доводить правильність теореми.

З теореми 2 випливає, що збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ не зміниться, якщо відкинути скінченну кількість перших членів.

З критерію Коші випливає, що збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ рівносильна тому, щоб усі частинні суми залишку ряду (5.5) були скільки завгодно малі, якщо номер n достатньо великий.

Теорема 3 (Необхідна умова збіжності). Для того щоб ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігався, необхідно, щоб загальний член ряду прямував до нуля, тобто щоб виконувалась умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \quad (5.6)$$

Доведення. Нехай ряд збігається, тобто існує границя частинних сум ряду

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k.$$

З рівності $u_n = S_n - S_{n-1}$ випливає, що існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

що і доводить правильність теореми.

Умова (5.6) не є достатньою для збіжності ряду, що можна бачити на прикладі так званого гармонічного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (5.7)$$



Дослідити збіжність ряду (5.7).

- Оцінимо знизу деякі частинні суми:

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad S_4 = S_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > S_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2}.$$

$$S_8 = S_4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > S_4 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{3}{2}, \dots$$

Аналогічним способом отримаємо оцінку

$$S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Оскільки частинні суми не обмежені згори, то не існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ і гармонічний ряд розбігається. Хоча для гармонічного ряду (5.7) виконана необхідна умова збіжності (5.6):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$



Дослідимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000n+1}$.

- Шукаємо границю загального члена ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1000n+1} = \frac{1}{1000}.$$

Оскільки загальний член ряду не прямує до нуля, то розглядуваний ряд розбігається.



Розглянемо знову ряд геометричної прогресії (5.3): $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ ($a \neq 0$).

- При $|q| > 1$ ряд розбігається, бо загальний член ряду $u_n = aq^n$ не прямує до нуля.

5.3. Властивості дій з рядами.

Теорема 4. Задано числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (5.8)$$

Якщо помножити члени ряду на один і той самий числовий множник $a \neq 0$ і дістати ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = au_1 + au_2 + \dots + au_n + \dots, \quad (5.9)$$

то із збіжності ряду (5.8) випливає збіжність ряду (5.9), і навпаки, зі збіжності ряду (5.9) випливає збіжність ряду (5.3). При цьому для сум ряду справджується рівність:

$$a \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} au_n, \quad a = \text{const.}$$

Отже, дії множення на число і підсумовування переставні.

Теорема 5. Якщо два ряди збігаються, то їх можна почленно додавати і віднімати, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n). \quad (5.10)$$

Теорема 6. Збіжність числового ряду не зміниться, якщо для нього приписати або відкинути скінченну кількість членів.



Розглянемо збіжний ряд з нульовими членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n - n) = (1 - 1) + (2 - 2) + (3 - 3) + \dots + (n - n) + \dots$$

- Розкривши дужки, дістанемо збіжний ряд

$$1 - 1 + 2 - 2 + 3 - 3 + \dots + n - n + \dots,$$

загальний член якого не прямує до нуля.

5.4. Ознаки збіжності числових рядів.

5.4.1. Необхідна і достатня умова збіжності ряду з додатними членами.

Розглядається ряд з додатними членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \quad u_n > 0 \quad (n = 1, 2, \dots, \infty). \quad (5.11)$$

Частинні суми ряду монотонно зростають, бо

$$S_2 - S_1 = u_2 > 0, \quad S_3 - S_2 = u_3 > 0, \dots, \quad S_n - S_{n-1} = u_n > 0, \dots$$

Звідси випливає правильність такої теореми.

Теорема 1. Для того, щоб ряд з додатними членами збігався, необхідно і достатньо, щоб усі його частинні суми були обмежені зверху.

Доведення. Якщо ряд (5.11) збігається, то існує границя послідовності частинних сум. Відомо, що збіжна послідовність обмежена.

Нехай послідовність частинних сум ряду обмежена зверху. За теоремою Вейєрштрасса монотонно зростаюча обмежена послідовність має границю. Отже, послідовність частинних сум ряду має границю і ряд збігається.

5.4.2. Ознаки порівняння.

Розглядаємо два ряди з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (5.12)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \quad (5.13)$$

Теорема 2. Нехай з деякого номера n виконується нерівність $u_n \leq v_n$. Тоді із збіжності ряду (5.13) випливає збіжність ряду (5.12), а із розбіжності ряду (5.12) випливає розбіжність ряду (5.13).

Доведення. Оскільки відкидання скінченної кількості членів ряду не впливає на його збіжність, то можна вважати, що нерівність $u_n \leq v_n$ виконується для всіх членів рядів. Якщо збігається ряд (5.13), то всі його частинні суми обмежені зверху. З огляду на це всі частинні суми ряду (5.12) теж обмежені зверху і, отже, ряд (5.12) збігається.

Якщо ряд (5.12) розбігається, то ряд (5.13) не може збігатися, бо за доведеним вище із збіжності ряду (5.13) випливає збіжність ряду (5.12). Теорему доведено.

При виконанні нерівності $u_n \leq v_n$ кажуть, що ряд (5.13) *мажорує* ряд (5.12).



Дослідимо збіжність числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad (5.14)$$

- Візьмемо збіжний ряд порівняння

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots \quad (5.15)$$

Оскільки виконуються нерівності

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2}, \quad \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}, \quad \dots$$

то за теоремою 2 ряд (5.14) збігається.

На практиці найбільш зручна ознака порівняння у граничній формі.

Теорема 3. Нехай для членів рядів (5.12), (5.13) існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \quad (0 < l < \infty)$.

Тоді обидва ряди (5.12), (5.13) збігаються або розбігаються одночасно. Якщо $l = 0$, то зі збіжності ряду (5.12) випливає збіжність ряду (5.13). Якщо $l = +\infty$, то з розбіжності ряду (5.13) випливає розбіжність ряду (5.12).

Доведення. Нехай $0 < l < \infty$. Для довільного $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < l$ знайдеться номер $N = N(\varepsilon)$, такий що при $n > N$ виконуватимуться нерівності:

$$0 < l - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < l + \varepsilon.$$

З нерівностей $(l - \varepsilon)v_n < u_n < (l + \varepsilon)v_n$ і збіжності ряду (5.12) випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (l - \varepsilon)v_n = (l - \varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} v_n$. З розбіжності ряду (5.12) $\sum_{n=1}^{\infty} (l + \varepsilon)v_n = (l + \varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} v_n$, що остаточно доводить правильність теореми.



Порівняємо збіжність рядів (5.14), (5.15), що мають загальні члени $u_n = \frac{1}{n^2}$,

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

- Шукаємо границю відношення загальних членів

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1.$$

Згідно з теоремою 3 обидва ряди (5.14), (5.15) збігаються або розбігаються одночасно.

Оскільки ряд (5.15) збігається, то й ряд (5.14) збігається.



Дослідимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$ порівнюючи з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

- Оскільки існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}} = 1$, то

досліджуваний ряд також розбігається.

5.4.3. Ознака Даламбера.

Теорема 4. Якщо для ряду з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (5.16)$$

починаючи з деякого номера $n \geq N$ виконується нерівність

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1, \quad (5.17)$$

то ряд (5.16) збігається. Якщо починаючи з деякого номера $n \geq N$ виконується нерівність

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \quad (5.18)$$

то ряд розбігається.

Доведення. З нерівності (5.17) випливає, що справджуються нерівності

$$u_{N+1} \leq qu_N, \quad u_{N+2} \leq qu_{N+1} \leq q^2 u_N, \quad u_{N+3} \leq qu_{N+2} \leq q^3 u_N, \dots, u_{N+p} \leq q^p u_N, \dots$$

Отже, члени ряду

$$u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots + u_{N+p} + \dots \quad (5.19)$$

мажоруються членами збіжного ряду

$$u_N + qu_N + q^2 u_N + \dots + q^p u_N + \dots, \quad |q| < 1.$$

Звідси випливає збіжність ряду (5.19) і, отже, збіжність ряду (5.16).

Якщо виконується нерівність (5.18), то справджується нерівність

$$u_{N+1} \geq u_N, \quad u_{N+2} \geq u_{N+1} \geq u_N, \dots, u_{N+p} \geq u_{N+p-1} \geq u_N, \dots$$

Оскільки загальний член ряду не прямує до нуля, то ряд (5.16) розбігається. Теорему доведено.



Дослідимо збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \dots, \quad u_n = \frac{1}{n!}.$$

- Дамо оцінку відношення членів ряду при $n \geq 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(n+1)}}{\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

З теореми 4 випливає збіжність ряду, який розглядається.

Теорема 5. (Ознака Даламбера у граничній формі).

Якщо для ряду (5.16) з додатними членами існує границя $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, то при $q < 1$ ряд збігається, при $q > 1$ ряд розбігається, при $q = 1$ ряд може збігатися і розбігатися.

Доведення. Якщо $q < 1$, то при достатньо великих значеннях n буде виконуватись нерівність $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q_1 < 1$ ($q < q_1$) і, отже, з огляду на теорему 4 ряд (5.16) збігається.

При $q > 1$ достатньо великих значеннях n буде виконуватись нерівність $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ і, отже, ряд (5.16) буде розбіжним.

При $q = 1$ ряд (5.16) може збігатися або розбігатися.



Розглянемо чисельний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \frac{4^2}{2^4} + \dots + \frac{n^2}{2^n} + \dots$$

- Знайдемо границю відношення членів ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} \cdot n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1.$$

З теореми 5 випливає збіжність ряду.



Дослідимо збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{na^n} = \frac{2}{1 \cdot a} + \frac{2^2}{2a^2} + \frac{2^3}{3a^3} + \dots + \frac{2^n}{na^n} + \dots, \quad u_n = \frac{2^n}{na^n},$$

де a – параметр ($a > 0$).

- Знаходимо границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot n \cdot a^n}{(n+1)a^{n+1} \cdot 2^n} = \frac{2}{a}.$$

Отже, при $a < 2$ ряд розбігається, а при $a > 2$ ряд збігається.



Дослідимо за ознакою Даламбера розбіжний гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ і збіжний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

- Для першого ряду знаходимо $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1.$

$$\text{Для другого ряду маємо } q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1.$$

Отже, при $q = 1$ ряди можуть розбігатися або збігатися.

5.4.4. Радикальна ознака збіжності Коші.

Теорема 6. Якщо для ряду з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (5.20)$$

починаючи з деякого номера $n \geq N$ виконується нерівність $\sqrt[n]{u_n} \leq q < 1$,

то ряд збігається. Якщо починаючи з деякого номера $n \geq N$ виконується нерівність $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, то ряд розбігається.



Дослідимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (3 + (-1)^n)^{-n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n} + \dots$

- Оскільки виконується нерівність

$$\sqrt[n]{(3 + (-1)^n)^{-n}} \leq \frac{1}{3 + (-1)^n} \leq \frac{1}{2},$$

то ряд, що досліджується, збігається.

Теорема 7 (Радикальна ознака Коші у граничній формі). Якщо для ряду (5.20) з додатними членами існує границя $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$, то при $q < 1$ ряд збігається, при $q > 1$ ряд розбігається, а при $q = 1$ ряди можуть збігатися або розбігатися.



Дослідимо збіжність ряду з параметром a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{a}{1}\right) + \left(1 + \frac{a}{2}\right)^{2^2} + \left(1 + \frac{a}{3}\right)^{3^2} + \dots + \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n^2} + \dots$$

- Знаходимо границю

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

При $a > 0$ ряд розбігається, при $a < 0$ ряд збігається.



Дослідимо за допомогою радикальної ознаки збіжність розбіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ і

збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

- Знаходимо границі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln \frac{1}{n}}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln n}{n}} = e^0 = 1 \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Отже, при $q = 1$ ряд може бути розбіжним або збіжним.



Зауваження. Значення границі q в ознаці Даламбера збігається зі значенням границі q в радикальній ознаці Коші. При $q = 1$ доцільно застосувати наведену далі інтегральну ознаку Коші.

5.4.5. Інтегральна ознака збіжності Коші.

Інтегральна ознака збіжності заснована на порівнянні ряду з невластним інтегралом.

Нехай для ряду з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

вдалося знайти неперервну, монотонно спадну при $x \geq 1$ функцію $y = f(x)$ таку, що $u_n = f(n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) (див. рис.).

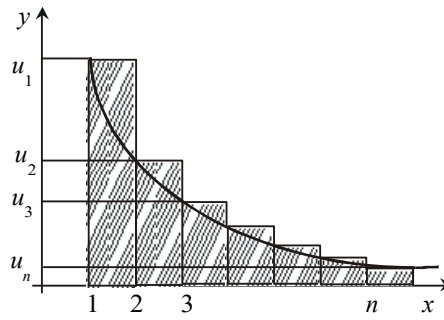


Рис. 5.1

Теорема 8. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна і монотонно спадає при $x \geq 1$, то невластний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збігаються або розбігаються одночасно.

 Дослідимо збіжність гармонійного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

- Оскільки $u_n = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), то можемо скористатися функцію $f(x) = \frac{1}{x}$.

Це неперервна, монотонно спадна при $x \geq 1$ функція. Отже, збіжність гармонійного ряду рівносильна збіжності невластного інтеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln|x| \Big|_{x=1}^{x=b} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln|b| = +\infty.$$

Оскільки невластний інтеграл розбіжний, то ряд також розбіжний.

 Дослідимо збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots \quad (s > 0). \quad (5.21)$$

• Використаємо функцію $y = \frac{1}{x^s}$, яка при $x \geq 1$ неперервна і монотонно спадає. Тому збіжність ряду рівносильна збіжності невластного інтеграла

$$I_s = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \begin{cases} \frac{1}{s-1} & \text{при } s > 1 \\ \infty & \text{при } s \leq 1. \end{cases}$$

Отже, ряд (5.21) збігається при $s > 1$ і розбігається при $s \leq 1$.

Наведемо окремі випадки ряду (5.21).

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

розбігається, бо $s = \frac{1}{2} < 1$.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

збігається, бо $s = 2 > 1$.

5.5. Знакозмінні числові ряди.

5.5.1. Знакопчергові ряди. Ознака збіжності Лейбніца.

Означення. Ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots, \quad (5.22)$$

де $a_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), називається **знакопчерговим** рядом.

Лейбніц указав достатню умову збіжності ряду (5.22).

Теорема 1 (Ознака збіжності Лейбніца). Нехай у знакопчерговому ряду (5.22) послідовність a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) монотонно спадає. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, ряд (5.22) збігається і його сума не перевищує a_1 .



Дослідимо збіжність знакопчергового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$$

- Усі умови теореми 1 виконані, і тому ряд збігається.

5.5.2. Абсолютна й умовна збіжність.

Розглянемо довільний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (5.23)$$

Означення. Ряд (5.23) називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots \quad (5.24)$$

Збіжний ряд (5.23) називається **умовно збіжним**, якщо ряд (5.24) розбіжний.



Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ є умовно збіжним, бо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний.

- Очевидно, що із збіжності ряду (5.24) випливає збіжність ряду (5.23), бо члени ряду (5.23) можуть мати різні знаки.

Теорема 2. Абсолютно збіжний ряд збігається.

Теорема 3. Якщо для знакопчергового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

існують границі

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|, \quad q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|},$$

то при $q < 1$ ряд абсолютно збіжний, а при $q > 1$ — розбіжний.



Дослідимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}} + \dots$

- Знаходимо границю

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n-1}}} \right| = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, ряд, що розглядається, збігається абсолютно.

Раніше відмічалось, що в довільному ряді не можна переставляти члени ряду. Наведемо без доведення такі твердження.

Теорема 4. Якщо ряд збігається абсолютно, то за будь-якої перестановки членів ряд буде збігатися і сума його не змінюватиметься.

Теорема 5 (Теорема Рімана). Якщо ряд збігається умовно і s — будь-яке наперед задане число, то завжди можна переставити члени ряду так, щоб сума отриманого ряду дорівнювала s .

Дамо пояснення до теореми Рімана. Умовна збіжність ряду виконується завдяки тому, що додатні і від'ємні члени взаємно знищуються. Якщо скласти ряд лише із додатних членів і ряд лише із від'ємних членів, то ці ряди розбігаються. Отже, можна по чергово обирати лише додатні або від'ємні числа так, щоб значення частинних сум було як можна ближче до значення s . При цьому сума ряду дорівнюватиме s .



Розглянемо ряд Лейбніца: $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$, $\frac{1}{2} < S < 1$.

- Переставимо члени ряду так, щоб після додатного члена стояли два від'ємні.

При цьому дістанемо ряд

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \right) = \frac{1}{2} S. \end{aligned}$$

За такого переставлення членів ряду сума ряду зменшилась удвічі.

5.6. Функціональні ряди.

5.6.1. Поняття функціонального ряду.

Означення. Ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (5.25)$$

де членами ряду $u_n(x)$ є функції від аргументу x , називається *функціональним рядом*. При $x=x_0$ ряд (5.25) перетворюється на числовий:

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad (5.26)$$

Якщо ряд (5.26) збігається (розбігається), то кажуть, що при $x=x_0$ збігається (розбігається) функціональний ряд (5.25).

Означення. Усі значення аргументу x , при яких функціональний ряд збіжний, називаються областю збіжності функціонального ряду.

В області збіжності існує границя часткових сум функціонального ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x), \quad S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x),$$

де функція $S(x)$ – сума ряду.

Ряд $r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$ називається залишком ряду.

В області збіжності функціонального ряду виконується формула $S(x) = S_n(x) + r_n(x)$, де $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$.

Означення. Ряд (5.25) збіжний для всіх x із області X , називається *рівномірно збіжним* у цій області, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує такий незалежний від x номер N , що при $n > N$ виконується одночасно для всіх $x \in X$ така нерівність:

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Ознака Вейерштрасса. Якщо ряд, складений із абсолютних величин членів функціонального ряду, для всіх $x \in X$ мажорується одним і тим самим збіжним числовим рядом, то функціональний ряд буде *рівномірно збіжним* для $x \in X$.



Дослідити характер збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$.

• Оскільки $u_n = \frac{1}{x^2 + n^2} = \left| \frac{1}{x^2 + n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, тобто члени даного функціонального ряду, для

будь-якого x , мажоруються членами збіжного числового ряду Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, то за ознакою Вейерштрасса даний ряд буде рівномірно збіжним для $x \in (-\infty; +\infty)$.

5.6.2. Властивості рівномірно збіжних рядів.

1. Сума рівномірно збіжного ряду неперервних функцій є неперервна функція.

2. Якщо ряд (5.25) рівномірно збіжний на інтервалі $(a; b)$ та існують границі $\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = A_n$ ($n = 1, 2, \dots$), то виконується рівність

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_n(x).$$

3. Якщо члени збіжного ряду (5.25) мають неперервні похідні для $x \in (a; b)$ та ряд складений із похідних членів ряду (5.25) $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ рівномірно збіжний для $x \in (a; b)$, то

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), \quad x \in (a; b).$$

4. Якщо члени ряду (5.25) неперервні, а сам ряд рівномірно збіжний для $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

У загальному випадку, при дослідженні на збіжність функціонального ряду використовується та сама методика, що і для знакозмінного ряду.



Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n} = \frac{\sqrt{1}}{x-2} + \frac{\sqrt{2}}{(x-2)^2} + \frac{\sqrt{3}}{(x-2)^3} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n} + \dots$$

- Побудуємо ряд із абсолютних величин членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n}$. Цей ряд буде

знакододатний. Отже, маємо право застосовувати до нього ознаку Даламбера, при цьому x вважатимемо деяким параметром:

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &= \frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n}; |u_{n+1}(x)| = \frac{\sqrt{n+1}}{|x-2|^{n+1}}; \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x-2|} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{|x-2|}. \end{aligned}$$

За ознакою Даламбера ряд буде збігатись, якщо

$$\frac{1}{|x-2|} < 1 \Leftrightarrow |x-2| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 1 \\ x-2 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 1 \end{cases},$$

і розбігатись, якщо $\frac{1}{|x-2|} > 1 \Leftrightarrow |x-2| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 < 1 \\ x-2 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3$.

Залишається дослідити ряд на збіжність у точках $x=1$ і $x=3$. При $x=1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}$

, а при $x=3$ – ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$. Ці ряди розбігаються, бо, очевидно, для них не виконується необхідна

умова збіжності. Таким чином, область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$ буде

$x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. У цій області ряд збігається абсолютно.

5.7. Степеневі ряди.

Означення. Функціональний ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (5.27)$$

називається *степеневим рядом*, його загальний член $u_n(x) = a_n x^n$; числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ називаються *коефіцієнтами степеневого ряду*.

Розглядають і більш загальний вигляд степеневого ряду

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots + a_n(x-c)^n + \dots \quad (5.28)$$

Якщо в (5.28) візьмемо $x-c=u$, то дістанемо ряд типу (5.27), тому властивості ряду (5.27) неважко перефразувати і для ряду (5.28).

Теорема 6 (Абеля). Якщо степеневий ряд (5.27):

1) збігається при $x = x_0$, то він абсолютно збігається для будь-якого x , що задовольняє нерівність $|x| < |x_0|$;

2) якщо ряд (5.27) розбігається при $x=x_1$, то він розбігається при всіх x , що задовольняють нерівність $|x| > |x_1|$.

Ілюстрацію до теореми Абеля наведено на рис.

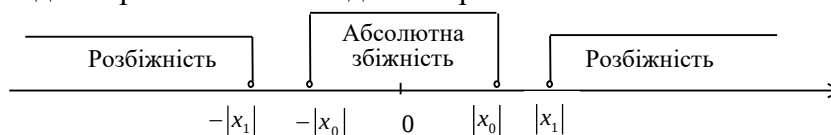


Рис. 5.2

5.7.1. Інтервал і радіус збіжності степеневого ряду.

Як наслідок із теореми Абеля для степеневого ряду (5.27) існує інтервал збіжності з центром у точці $x = 0$ (рис.).

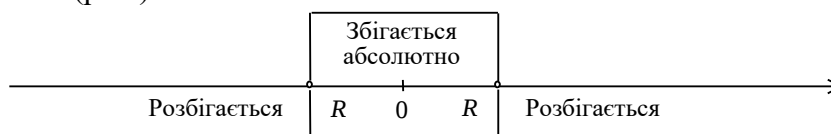


Рис. 5.3

Означення. Інтервалом збіжності степеневого ряду називається такий інтервал, у всіх внутрішніх точках якого ряд збігається абсолютно, а для всіх точок $|x| > R$ ряд є розбіжним; при цьому число $R > 0$ називається радіусом збіжності степеневого ряду.

Для узагальненого степеневого ряду (5.27) інтервал збіжності $(c - R; c + R)$ має центр симетрії в точці $x = c$.



Зауваження. На кінцях інтервалу збіжності, тобто в точках $x = -R$, $x = R$ ряд може як збігатись, так і розбігатись. Це питання потребує спеціального дослідження в кожному випадку.

Виведемо формулу для знаходження радіуса збіжності ряду (5.27). Для цього побудуємо ряд із абсолютних величин членів ряду (5.27):

$$|a_0| + |a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x|^2 + \dots + |a_n| \cdot |x|^n + \dots \quad (5.29)$$

Нехай існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$. Тоді, застосовуючи ознаку Даламбера до ряду (5.29), дістаємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| \cdot |x|^{n+1}}{|a_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \cdot l.$$

При $|x| \cdot l < 1$ ряд (5.29) збігається, а отже, ряд (3) збігається абсолютно; при $|x| \cdot l > 1$ ряд (5.29) розбігається. Розбіжність ряду, установлена за ознакою Даламбера, означає, що для цього ряду не виконується необхідна умова збіжності: $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(x)| \neq 0$, а тому не виконується необхідна умова збіжності і для ряду (5.27) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) \neq 0$, і ряд (5.27) при $|x| \cdot l > 1$ буде також

розбіжним. Отже, нерівність $|x| \cdot l < 1$ визначає інтервал збіжності ряду (5.27):

$$|x| \cdot l < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{l} \Leftrightarrow -\frac{1}{l} < x < \frac{1}{l}. \text{ Радіус збіжності визначається за формулою}$$

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (5.30)$$

Аналогічно, використовуючи радикальну ознаку Коші, можна дістати формулу для радіуса збіжності, степеневому ряду у вигляді: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

 Знайти інтервал і радіус збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{3^n + 7^n}$.

• Порівнюючи загальні члени ряду (5.27) і досліджуваного ряду, знайдемо коефіцієнт степеневому ряду $a_n : u_n(x) = \frac{2^n x^n}{3^n + 7^n} = a_n x^n \Rightarrow a_n = \frac{2^n}{3^n + 7^n}$. За формулою радіуса збіжності (5.30) маємо:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n (3^{n+1} + 7^{n+1})}{2^{n+1} (3^n + 7^n)} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^n + 7}{\left(\frac{3}{7}\right)^n + 1} = \frac{7}{2}.$$

Тоді інтервал збіжності буде $\left(-\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

 Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n \cdot 2^n} = \frac{x^3}{1 \cdot 2} + \frac{x^6}{2 \cdot 4} + \frac{x^9}{3 \cdot 8} + \dots + \frac{x^{3n}}{n \cdot 2^n} + \dots$$

• Загальний член ряду можна записати так $u_n(x) = \frac{x^{3n}}{n \cdot 2^n}$. Цей ряд містить не всі степені x , коефіцієнти a_{3n-2}, a_{3n-1} ($n = 1, 2, 3, \dots$) дорівнюють нулю. Скористатися формулами для радіуса збіжності в даному випадку неможливо. Отже, будемо досліджувати ряд за загальною методикою дослідження функціональних рядів. Побудуємо ряд із абсолютних величин членів

даного ряду $|u_n(x)| = \left| \frac{x^{3n}}{n \cdot 2^n} \right| = \frac{|x|^{3n}}{n \cdot 2^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{3n}}{n \cdot 2^n}$, до якого застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 2^n |x|^{3(n+1)}}{(n+1) \cdot 2^{n+1} |x|^{3n}} = \frac{|x|^3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x|^3}{2}.$$

Знайдемо інтервал збіжності ряду (на цьому інтервалі ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n \cdot 2^n}$ збігатиметься абсолютно):

$$\frac{|x|^3}{2} < 1 \Leftrightarrow |x|^3 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{2} < x < \sqrt[3]{2}. \text{ Радіус збіжності буде: } R = \sqrt[3]{2}.$$

Проведемо дослідження збіжності ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\text{При } x = -\sqrt[3]{2} : u_n(-\sqrt[3]{2}) = \frac{(-\sqrt[3]{2})^{3n}}{n \cdot 2^n} = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}. \text{ Одержали ряд Лейбніца, який}$$

умовно збігається.

При $x = \sqrt[3]{2}$, $u_n(\sqrt[3]{2}) = \frac{(\sqrt[3]{2})}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Маємо гармонічний ряд, який, як відомо, розбігається. Таким чином, $x \in [-\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{2})$ буде областю збіжності ряду.

5.7.2. Диференціювання та інтегрування степеневих рядів.

Степеневий ряд $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ буде рівномірно збіжним на будь-якому відрізку із його інтервалу збіжності $(-R; R)$, а тому на такому відрізку його можна почленно диференціювати та інтегрувати, при цьому мають місце рівності:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + n \cdot a_nx^{n-1} + \dots;$$

$$\int_0^x f(x)dx = a_0x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

 Знайти суму ряду $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$

• Позначимо суму ряду через $f(x)$ і знайдемо похідну $f'(x)$:
 $f'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$. Одержали ряд геометричної прогресії зі знаменником $q=x$ і першим членом $u_1 = 1$. Цей ряд буде збіжним при $|x| < 1$, а його сума має

вигляд: $S(x) = \frac{1}{1-x} = f'(x)$. Розв'язуючи це диференціальне рівняння, дістаємо

$$f(x) = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = \left(-\ln|1-x| \right) \Big|_0^x = -\ln(1-x), \quad |x| < 1. \quad \text{Зауважимо, що формула}$$

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \text{справджується на інтервалі збіжності } x \in (-1; 1).$$

5.7.3. Зображення функцій степеневими рядами. Ряди Тейлора і Маклорена.

Формули, що подають функцію $f(x)$ у вигляді степеневих рядів, мають вигляд:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (5.31)$$

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dots \quad (5.32)$$

Кажуть, що ряд Маклорена (5.31) дає розвинення функції в ряд поблизу точки $x = 0$, а ряд Тейлора (5.32) – поблизу точки $x=c$. Справді, як далі буде показано, чим ближче x до точки розвинення функції $f(x)$ у ряд, тим меншою кількістю членів ряду буде досягнуто більшої точності при обчисленні $f(x)$.

Теорема (достатня умова розвинення функції в ряд Маклорена). Якщо на проміжку $[-R; R]$ похідні будь-якого порядку для функції $f(x)$ обмежені одним і тим самим числом

$|f^{(n)}(x)| \leq M$, то на інтервалі $(-R; R)$ функція $f(x)$ може бути розвинена в ряд Маклорена). Іншими словами, ряд Маклорена для $f(x)$ у кожній точці із $x \in (-R; R)$ збігається абсолютно.



Розвинути в ряд за степенями x функцію $f(x) = 2^x$.

- Знайдемо значення функції та її похідних при $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^x, & f(0) &= 2^0 = 1, \\ f'(x) &= 2^x \ln 2, & f'(0) &= \ln 2, \\ f''(x) &= 2^x (\ln 2)^2, & f''(0) &= (\ln 2)^2, \\ &\dots & &\dots \\ f^n(x) &= 2^x (\ln 2)^n, & f^n(0) &= \ln^n 2, \\ &\dots & &\dots \end{aligned}$$

Оскільки $0 < \ln 2 < 1$, то для будь-якого фіксованого x маємо $|f^{(n)}(x)| = 2^x \ln^n 2 < 2^x$, тобто достатня умова розвинення функції $f(x) = 2^x$ у ряд Маклорена виконується і ряд Маклорена для неї $2^x = 1 + x \ln 2 + \frac{x^2 \ln^2 2}{2!} + \dots + \frac{x^n \ln^n 2}{n!} + \dots$ буде абсолютно збіжним для $x \in (-\infty; +\infty)$.



Зауваження. Залишок ряду Маклорена $r_n(x)$ можна замінити одним залишковим членом $\bar{r}_n(x)$, який у формі Лагранжа такий:

$$\bar{r}_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad -R < \xi < R. \quad (5.33)$$

Тоді ряд Маклорена (5.31) набирає вигляду формули Маклорена

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \bar{r}_n(x). \quad (5.34)$$

Теорема. Для того щоб функцію $f(x)$ можна було розвинути в ряд Маклорена на інтервалі $x \in (-R; R)$, необхідно і достатньо, щоб на цьому інтервалі $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{r}_n(x) = 0$.

5.7.4. Ряд Маклорена для деяких елементарних функцій.

$$\left[\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \\ \sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right.$$

Область збіжності: $(-\infty; +\infty)$.

$$\left[(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n + \dots \right. \quad \text{Інтервал збіжності: } (-1; 1).$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Область збіжності $(-1; 1)$.

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Область збіжності $[-1; 1]$.

Використовуючи ці формули, можна у ряді випадків записати розвинення функції в ряд Маклорена без обчислення коефіцієнтів цього ряду (без обчислення похідних функцій).



Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = \sin^2 x$ і знайти область збіжності ряду.

• Перетворимо функцію так: $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. Скористаємось формулою розвинення в ряд Маклорена функції $\cos x$, тоді дістанемо:

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) = \\ &= \frac{(2x)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{(2x)^4}{2 \cdot 4!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{(2x)^{2n}}{2 \cdot (2n)!} + \dots = \frac{2}{2!} x - \frac{2^3}{4!} x^4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \dots \end{aligned}$$

Область збіжності новоутвореного ряду для $f(x) = \sin^2 x$ буде така ж, як і для $\cos x$, тобто $x \in (-\infty; +\infty)$.

5.8. Застосування рядів для наближених обчислень.

Розвинення функцій у степеневі ряди використовується для наближеного обчислення значень функцій, визначених інтегралів, наближеного розв'язування рівнянь і т. ін. При цьому в ряді Маклорена чи Тейлора для даної функції залишають кілька перших членів (як правило, не більше трьох), а решту відкидають. Похибка при наближених обчисленнях являє собою суму відкинутих членів ряду – залишок ряду. Для оцінки похибки, якщо ряд знакосталий, залишок ряду порівнюють із рядом нескінченно спадної геометричної прогресії. Якщо ряд знакопечерговий, то за наслідком теореми Лейбніца похибка за абсолютною величиною не перевищує першого із відкинутих членів ряду.



Обчислити з точністю до 0,001: $\sqrt[3]{9}$.

• Зробимо такі перетворення: $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8+1} = 2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}$. Скористаємось рядом

Маклорена для функції $(1+x)^m$, узявши $x = \frac{1}{8}$, $m = \frac{1}{3}$. Тоді дістанемо:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{9} &= 2 \left(1 + \frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{3}} = 2 \left(1 + 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{8} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right) \left(\frac{1}{8} \right)^3 + \dots \right) = 2 + \frac{1}{12} - \frac{2}{3^2 \cdot 64} + \frac{10}{3^4 \cdot 512} - \dots \end{aligned}$$

За винятком першого члена дістали знакопечерговий ряд, він буде збіжним, бо $\frac{1}{8} \in (-1; 1)$. Похибка r_n за абсолютною величиною буде меншою від першого із відкинутих

членів. Послідовно обчислюємо: $|r_1| < \frac{1}{12}$; $|r_2| < \frac{1}{288}$; $|r_3| = \frac{2 \cdot 5}{81 \cdot 512} < 0,001$. Отже, щоб обчислити $\sqrt[3]{9}$ з точністю до 0,001, достатньо залишити три перші члени: $\sqrt[3]{9} \approx 2 + \frac{1}{12} - \frac{2}{9 \cdot 64} = 2 \frac{23}{288} \approx 2,0798 \approx 2,080$.

 Розв'язати рівняння $\cos x = \frac{x}{2}$, обмежуючись двома членами ряду Маклорена для $\cos x$.

• Візьмемо $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, тоді дістанемо квадратне рівняння $1 - \frac{x^2}{2} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$, яке має розв'язки $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

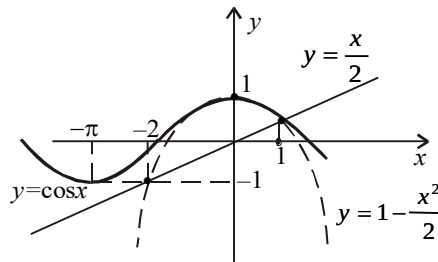


Рис. 5.4

Із рис. 5.2 видно, що $x_2 = -2$ не буде розв'язком початкового рівняння. Отже, рівняння має єдиний розв'язок, наближене значення якого $x = 1$.

 Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x} = \left| \frac{0}{0} \right|$.

• Замінімо e^x і $\sin x$ відповідними рядами Маклорена

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) - 2 - 2x - x^2}{x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{x^3}{3!} + 2 \cdot \frac{x^4}{4!} + \dots}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3!} + 2 \cdot \frac{2x}{4!} + \dots}{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots} = 2. \end{aligned}$$

 Обчислити $\sqrt{e}$ з точністю до 0,001.

• Оцінимо похибку наближеної рівності

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad \text{при } x > 0.$$

Ця похибка визначиться залишком ряду

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots = \frac{x^n}{n!} \left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \dots \right) < \\ &< \frac{x^n}{n!} \left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{x^3}{(n+1)^3} + \dots \right). \end{aligned}$$

Якщо $\left| \frac{x}{n+1} \right| < 1$, то $\frac{x}{n+1} + \left(\frac{x}{n+1} \right)^2 + \dots = \frac{\frac{x}{n+1}}{1 - \frac{x}{n+1}} = \frac{x}{n+1-x}$ за формулою суми

нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом $u_1 = \frac{x}{n+1}$ і знаменником

$q = \frac{x}{n+1}$. Отже, маємо таку оцінку залишку ряду

$$r_n(x) < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x}.$$

Отже:
$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{2^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

5.9. Ряд Фур'є.

На практиці часто доводиться мати справу з періодичними процесами, що описуються кусково-гладкими функціями. Такі функції подають не степеневими, а тригонометричними рядами.

Означення. Функція $f(x)$ називається такою, що задовольняє умови Діріхле на відрізку $[a; b]$, якщо на цьому відрізку виконуються такі умови:

1. $f(x)$ має скінченне число розривів першого роду;
2. $f(x)$ має скінченне число екстремумів;
3. $f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ для $x \in (a; b)$.

Теорема. Функція $f(x)$, що задовольняє умови Діріхле на відрізку $[-l; l]$ на інтервалі $(-l; l)$, може бути визначена тригонометричним рядом Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (5.35)$$

де коефіцієнти Фур'є a_n та b_n обчислюються за такими формулами:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$



Зауваження. Якщо функція $f(x)$ – парна, то в (5.35) $b_n = 0$, а якщо $f(x)$ – непарна, то $a_n = 0$.

Теорема (ознака Діріхле). Якщо $f(x)$ – періодична функція з періодом 2π задовольняє умови Діріхле на відрізку $[-\pi; \pi]$, то її ряд Фур'є збіжний, а його сума в точці x_0 дорівнює:

1. $f(x_0)$, якщо $f(x)$ – неперервна в точці x_0 ;
2. $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$, якщо x_0 – точка розриву для $f(x)$.



Розкласти функцію $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ у ряд Фур'є на проміжку $(0; 2\pi)$.

• Ця функція на відрізку $[0; 2\pi]$ задовольняє умови Діріхле, а тому ряд Фур'є на інтервалі $(0; 2\pi)$ для неї існує. Обчислимо коефіцієнти Фур'є, узявши $l = \pi$ в (5.35):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\pi x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx dx = \frac{1}{2\pi} (\pi - x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \sin nx dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx = -\frac{1}{2\pi} (\pi - x) \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n}.$$

Отже, $f(x) = \frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $x \in (0; 2\pi)$.

Термінологічний словник ключових понять.

Функціональний ряд:

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Степеневий ряд:

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots + a_n(x-c)^n + \dots$$

Інтервал збіжності $(-R; R)$, такий що $x \in (-R; R)$ – ряд збіжний абсолютно і $x \in (-\infty; -R) \cup (R; +\infty)$ – ряд розбіжний.

Ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n.$$

Ряд Маклорена:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

$$\text{де } a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Приклади розв'язування задач.

1. Знайти область збіжності функціонального ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$.

• Загальний член ряду $u_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$. Маємо право застосувати ознаку Даламбера, бо

$u_n > 0$:

$$u_{n+1}(x) = \frac{1}{1+x^{2n+2}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}(x^{-2n}+1)}{x^{2n}(x^{-2n}+x^2)} = A.$$

Розглянемо можливі випадки.

1) Якщо $|x| < 1$, тоді не виконується необхідна умова збіжності ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 1 \neq 0.$$

2) Якщо $|x| = 1$, дістаємо ряд $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots$, який також є розбіжним, бо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

3) Якщо $|x| > 1$, необхідна умова збіжності ряду виконується $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 0$, а

за ознакою Даламбера $A = \frac{1}{x^2} < 1$. Отже, ряд збіжний. Таким чином, область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} \text{ визначається нерівністю } |x| > 1.$$

2. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

$$\bullet \text{ Маємо, що } u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = a_n x^n \Rightarrow a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}, a_{n+1} = (-1)^n \frac{1}{n+1}.$$

Знаходимо радіус збіжності степеневому ряду:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n \cdot (-1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1. \text{ Отже, інтервал збіжності ряду } (-1; 1).$$

Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу. Підставляючи значення $x=1$ в даний ряд, дістаємо: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$. Цей знакочерговий ряд умовно збіжний, бо є

рядом Лейбніца. Якщо $x=-1$, дістаємо: $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Це розбіжний гармонічний ряд.

Таким чином, область збіжності ряду визначається нерівністю $-1 < x \leq 1$.

3. Дослідити збіжність ряду:

$$(x-2) + \frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(x-2)^3}{3^2} + \dots + \frac{(x-2)^n}{n^2} + \dots$$

$\bullet$ Візьмемо $x-2=y$ і одержимо ряд $y + \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^3}{3^2} + \dots + \frac{y^n}{n^2} + \dots$. Знайдемо радіус збіжності цього ряду, беручи до уваги, що $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$, тоді

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1. \text{ Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу } (-1; 1).$$

1) Якщо $y=1$, дістаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Це ряд Діріхле з показником $p=2 > 1$. Він збіжний.

2) Якщо $y = -1$, дістаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, який є абсолютно збіжним. Тоді область збіжності

ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} y^n$ така: $-1 \leq y \leq 1$.

Замінюючи змінну y на змінну x , дістаємо шукану область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \cdot (x-2)^n$: $-1 \leq x-2 \leq 1$ або $1 \leq x \leq 3$.

4. Розкласти функцію $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x + 1$ в ряд за степенями $x-2$.

• Маємо $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x + 1$, $f(2) = 21$;

$$f'(x) = 3x^2 + 10x - 4, \quad f'(2) = 28;$$

$$f''(x) = 6x + 10, \quad f''(2) = 22;$$

$$f'''(x) = 6, \quad f'''(2) = 6;$$

$$f^{(4)}(x) = 0, \quad f^{(4)}(2) = 0.$$

Похідні вище третього порядку дорівнюють нулеві. Ряд Тейлора для заданої функції має вигляд

$$\begin{aligned} f(x) &= 21 + \frac{28}{1!}(x-2) + \frac{22}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3 = \\ &= 21 + 28(x-2) + 11(x-2)^2 + (x-2)^3. \end{aligned}$$

5. Обчислити $1 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot (0,3)^2 + 4 \cdot (0,3)^3 + \dots$

• Зіставимо із заданим числовим рядом степеневий ряд $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + n \cdot x^{n-1} + \dots$. Очевидно, що цей ряд збігається, якщо $|x| < 1$.

Розглянемо ряд геометричної прогресії при $|x| < 1$. Маємо $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Продиференціюємо цей ряд

$$\begin{aligned} (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots)' &= \left(\frac{1}{1-x} \right)' \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + n \cdot x^{n-1} + \dots &= \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Тоді, узявши $x = 0,3$, дістанемо:

$$1 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot (0,3)^2 + \dots + n \cdot (0,3)^{n-1} + \dots = \frac{1}{(1-0,3)^2} = \frac{100}{49}.$$

6. Обчислити $\int_0^1 e^{-t^2} dt$.

• Розклавши в ряд функції e^x і беручи $x = -t^2$, дістаємо: $e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} + \dots$. Цей степеневий ряд має нескінченний радіус збіжності. Почленно інтегруючи ряд, маємо:

$$I = \int_0^1 e^{-t^2} dt = \left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{t^5}{5} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{t^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \cdot \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right) \Big|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - \frac{1}{75600} + \dots$$

Для обчислення I візьмемо перші сім членів ряду, допускаючи похибку, яка за абсолютною величиною менша від модуля восьмого члена, тобто менша за $\frac{1}{75600} < 1,4 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$. Проводячи обчислення суми перших семи членів, знайдемо, що $I \approx 0,7468$.

7. Розкласти в ряд Фур'є функцію:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } -\pi < x < 0; \\ x, & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

• Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x dx = \frac{x^2}{2\pi} \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx = \frac{x \sin(nx)}{\pi n} \Big|_0^\pi - \frac{1}{\pi n} \int_0^\pi \sin(nx) dx = \frac{\cos(\pi n) - 1}{n^2 \pi} = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2k; \\ -\frac{2}{(2k-1)^2 \pi} & \text{при } n = 2k-1, \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx = -\frac{x \cos(nx)}{\pi n} \Big|_0^\pi + \frac{1}{\pi n} \int_0^\pi \cos(nx) dx = \frac{1}{n} = -\frac{\cos(\pi n)}{n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Отже, розклад функції має вигляд:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cos x + \sin x - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{2}{9\pi} \cos 3x + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} - \dots$$

$$x \in (-\pi; \pi).$$

Теми рефератів.

1. Ознаки Абеля та Діріхле рівномірної збіжності функціональних рядів.
2. Повторні та подвійні ряди.
3. Нескінченні добутки.
4. Формула Стірлінга.
5. Біноміальний ряд.
6. Перетворення рядів.
7. Підсумовування розбіжних рядів.
8. Асимптотичні ряди.
9. Комплексний ряд Фур'є.
10. Інтеграл Фур'є.

Вправи для самостійного розв'язування.

Дослідити збіжність числових рядів.

- | | | | |
|-----|---|---|--|
| 1. | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n+1)}{n!};$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n;$ | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}.$ |
| 2. | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)}{n!};$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n;$ | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}.$ |
| 3. | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n-1)}{n!};$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n}\right)^n;$ | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n}}.$ |
| 4. | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n-2)}{n!};$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{3n}\right)^n;$ | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2}}.$ |
| 5. | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n-3)}{n!};$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{4n}\right)^n;$ | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n^3}}.$ |
| 6. | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n (n-4)}{n!};$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{4n}\right)^n;$ | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n^2}}.$ |
| 7. | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n (n+3)}{n!};$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-4}{2n}\right)^n;$ | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n^3}}.$ |
| 8. | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n (n+4)}{n!};$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{3n}\right)^n;$ | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n^4}}.$ |
| 9. | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n (n-5)}{n!};$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-5}{4n}\right)^n;$ | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[6]{n}}.$ |
| 10. | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{11^n (n+5)}{n!};$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{5n}\right)^n;$ | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[6]{n^5}}.$ |

Розвинути функцію $y = f(x)$ в ряд Маклорена і знайти радіус збіжності одержаного ряду.

- | | | |
|--------------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| 1. $f(x) = e^{-2x}.$ | 2. $f(x) = e^{\frac{x}{2}}.$ | 3. $f(x) = e^{\frac{x}{5}}.$ |
| 4. $f(x) = \sin 2x.$ | 5. $f(x) = \sin \frac{x}{3}.$ | 6. $f(x) = \cos 3x.$ |
| 7. $f(x) = \cos \frac{x}{4}.$ | 8. $f(x) = \sqrt{1-x^2}.$ | 9. $f(x) = \sqrt[3]{1+x^3}.$ |
| 10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$ | | |

Знайти область збіжності функціонального ряду.

- | | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} x^n.$ | 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n.$ | 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} x^n.$ | 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+3} x^n.$ |
|---|---|---|---|

$$\begin{array}{llll}
5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+4} x^n & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+4} x^n & 7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+5} x^n & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n+5} x^n \\
9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n+6} x^n & 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n+6} x^n & &
\end{array}$$

Розвинути підінтегральну функцію в ряд і обчислити з точністю до 0,001 визначений інтеграл.

$$\begin{array}{llll}
1. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}} & 2. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}} & 3. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} & 4. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x^3)^5}} \\
5. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^3}} & 6. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[5]{(1+x^3)^2}} & 7. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[6]{1+x^3}} & 8. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[6]{1+x^5}} \\
9. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[7]{1+x^3}} & 10. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[7]{1+x^4}} & &
\end{array}$$

6.1. Основні поняття диференціальних рівнянь.

6.1.1. Попередній аналіз задач, що приводять до диференціальних рівнянь. Основні означення.

Розв'язування різних геометричних, фізичних та інженерних задач часто приводять до рівнянь, які пов'язують незалежні змінні, що характеризують ту чи іншу задачу, з будь-якою функцією цих змінних і похідними цієї функції різних порядків.

У якості прикладу можна розглянути простий випадок рівноприскореного руху матеріальної точки.

Відомо, що переміщення матеріальної точки при рівноприскореному русі є функцією часу і виражається формулою:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

В свою чергу, прискорення a є похідною по часу t від швидкості V , яка також є похідною по часу t від переміщення S . Тобто

$$V = \frac{dS}{dt}; \quad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2};$$

Тоді отримуємо: $S = f(t) = V_0 t + \frac{f''(t) \cdot t}{2}$ – рівняння пов'язує функцію $f(t)$ з незалежною змінною t і похідною другого порядку функції $f(t)$.

Означення. Диференціальним рівнянням називається рівняння, що пов'язує незалежні змінні, їх функції і похідні (або диференціали) цієї функції.

Означення. Якщо диференціальне рівняння має одну незалежну змінну, то воно називається звичайним диференціальним рівнянням, якщо ж незалежних змінних дві або більше, то таке диференціальне рівняння називається диференціальним рівнянням у частинних похідних.

Означення. Найвищий порядок похідних, що входять у рівняння, називається порядком диференціального рівняння.



$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ – звичайне диференціальне рівняння 1-го порядку. У загальному вигляді записується: $F(x, y, y') = 0$.

• $x \frac{d^2 y}{dx^2} + xy \frac{dy}{dx} + x^2 = y$ – звичайне диференціальне рівняння 2-го порядку. У загальному вигляді записується: $F(x, y, y', y'') = 0$.

$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ – диференціальне рівняння в частинних похідних 1-го порядку.

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння називається така диференційована функція $y = \varphi(x, C)$, яка при підстановці у початкове рівняння замість невідомої функції перетворює рівняння у тотожність.

6.1.2. Властивості загального розв'язку.

1) Так як стала C – довільна величина, то, взагалі кажучи, диференціальне рівняння має нескінченну кількість розв'язків.

2) При будь-яких початкових умовах $x=x_0, y(x_0)=y_0$ існує таке значення $C=C_0$, при якому розв'язком диференціального рівняння є функція $y=\varphi(x, C_0)$.

Означення. Розв'язок виду $y=\varphi(x, C_0)$ називається *частинним розв'язком* диференціального рівняння.

Означення. *Задачею Коші* (Огюстен Луї Коші (1789–1857) – французький математик) називається знаходження будь-якого частинного розв'язку диференціального рівняння виду $y=\varphi(x, C_0)$, що задовольняє початковим умовам $y(x_0)=y_0$.

Теорема Коші (теорема про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння 1-го порядку). Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в деякій області D площини XOY і має в цій області неперервну частинну похідну $y' = f(x, y)$, то яка б не була точка (x_0, y_0) в області D , існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння $y' = f(x, y)$, визначений в деякому інтервалі, що містить точку x_0 , і приймає при $x=x_0$ значення $\varphi(x_0)=y_0$, тобто існує єдиний розв'язок диференціального рівняння.

Означення. Інтегралом (розв'язком) диференціального рівняння називається будь-яке рівняння, що не містить похідних, для якого дане диференціальне рівняння є наслідком.



Знайти загальний розв'язок ДР: $xy' + y = 0$.

• Загальний розв'язок ДР шукається за допомогою інтегрування лівої і правої частини рівняння, яке попередньо перетворене наступним чином:

$$x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$x dy = -y dx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Тепер інтегруємо:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + C_0$$

$$\ln y + \ln x = C_0$$

$$\ln xy = C_0$$

$$xy = e^{C_0} = C$$

$y = \frac{C}{x}$ – це загальний розв'язок початкового ДР.

Припустимо, задані деякі початкові умови: $x_0=1$; $y_0=2$, тоді маємо

$$2 = \frac{C}{1}; \quad C = 2;$$

При підстановці отриманого значення сталої у загальний розв'язок отримаємо частинний розв'язок при заданих початкових умовах (розв'язок задачі Коші).

$$y = \frac{2}{x}.$$

Означення. Інтегральною кривою називається графік $y = \varphi(x)$ розв'язку ДР на площині XOY .

Означення. Особливим розв'язком ДР називається такий розв'язок, в усіх точках якого умова єдиності Коші не виконується, тобто в околі деякої точки (x, y) існує не менше двох інтегральних кривих.

Особливі розв'язки не залежать від сталої C .

Особливі розв'язки не можна отримати із загального розв'язку ні при яких значеннях сталої C . Якщо побудувати сімейство інтегральних кривих ДР, то особливий розв'язок буде зображуватися лінією, яка у кожній своїй точці дотикається хоча б до однієї інтегральної кривої.

Відмітимо, що не кожне ДР має особливі розв'язки..



Знайти загальний розв'язок ДР: $y' + y = 0$. Знайти особливий розв'язок (якщо він є).

$$\bullet \quad \frac{dy}{dx} = -y \quad \frac{dy}{y} = -dx \quad \int \frac{dy}{y} = -\int dx \quad \ln y = -x + C \quad y = e^{-x} \cdot e^C \quad y = C_1 \cdot e^{-x}$$

Дане ДР має також особливий розв'язок $y = 0$. Цей розв'язок неможливо отримати із загального, однак при підстановці у початкове рівняння отримаємо тотожність.

6.1.3. Звичайні диференціальні рівняння 1-го порядку.

Як слідує з означення, звичайним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння

$$F(x, y, y') = 0, \quad (6.1)$$

де x – незалежна змінна, $y(x)$ – невідома функція. У формі, що дозволена відносно похідної, рівняння 1-го порядку записується так:

$$y' = f(x, y). \quad (6.2)$$

Якщо користуватися іншим позначенням похідної, то можна записати (6.2), як

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (6.3)$$

Загальний розв'язок рівняння при $n = 1$ має вигляд: $\Phi(x, y, C) = 0$ або $y = \varphi(x, C)$.

6.1.4. Геометричний зміст диференціального рівняння 1-го порядку.

Рівняння (6.2) у кожній точці (x, y) області D , у якій задана функція $f(x, y)$, визначає $y'(x)$ – кутовий коефіцієнт дотичної до розв'язку, що проходить через точку (x, y) , тобто напрямок, по якому проходить розв'язок через цю точку. Кажуть, що рівняння (6.2) задає в D поле напрямків. Графік будь-якого розв'язку диференціального рівняння (*інтегральна крива*) в будь-якій її точці дотикається цього поля, тобто проходить в напрямку, що визначається полем.

Інтегрування ДР геометрично означає знаходження кривих, у яких напрямок дотичної у кожній точці співпадає з напрямком поля.

На рисунку справа зображено поле напрямків, що визначається рівнянням $y' = y - x + 1$, в три інтегральні криві (три частинні розв'язки) цього рівняння. Розв'язок можна провести через будь-яку точку області D ; єдиний розв'язок можна виділити, якщо задати точку, через яку проходить інтегральна крива: $y|_{x=x_0} = y_0$.

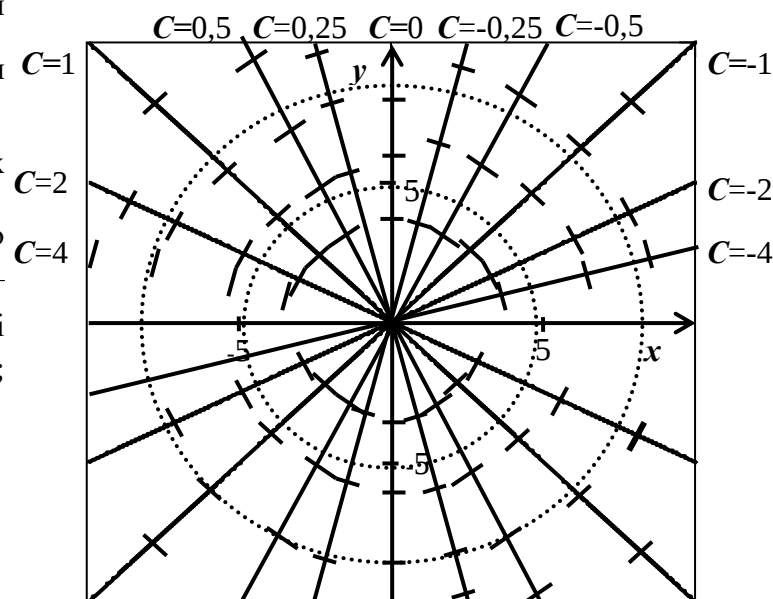
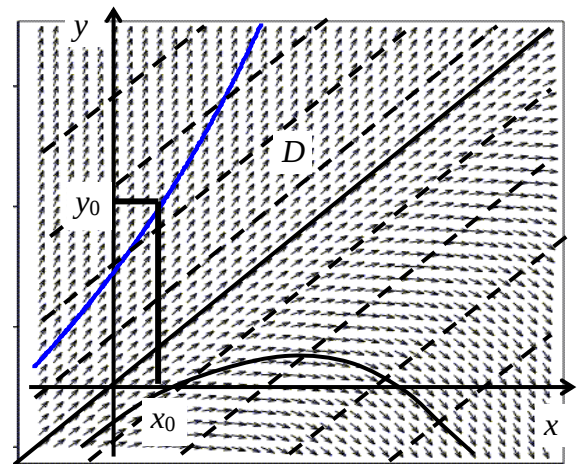
Для зображення поля напрямків, що задається диференціальним рівнянням, розглядають лінії рівня функції $f(x, y)$, тобто геометричні місця точок, у яких дотичні до інтегральних кривих зберігають сталий напрямок. Такі лінії називаються *ізоклінами*. За допомогою ізоклін можна наближено зобразити інтегральні криві.

Для прикладу побудуємо ізокліни рівняння $y' = -\frac{x}{y}$. Перебираємо різні значення сталої C , будуємо лінії рівня функції $f(x, y) = -\frac{x}{y}$, що відповідають цим

значенням C (тобто прями $-\frac{x}{y} = C$), і на цих лініях ставим рисочки у напрямку, що визначається значенням C ($\operatorname{tg} \alpha = C$, де α – кут між рисочкою і додатнім напрямком осі Ox): $C = 0 \Rightarrow x = 0$ – вісь Oy ;

$$C = 1 \Rightarrow -\frac{x}{y} = 1 \Rightarrow y = -x;$$

$$C = -1 \Rightarrow -\frac{x}{y} = -1 \Rightarrow y = x;$$



$$C = \pm 2 \Rightarrow -\frac{x}{y} = \pm 2 \Rightarrow y = \mp \frac{x}{2} \text{ і т.д.}$$

Інформації про напрямок інтегральних кривих, що отримана з рисунка, достатньо, щоб зробити якісний висновок про їх поведінку: криві повинні огинати початок координат. Це можуть бути кола або спіралі.

6.2. Найпростіші диференціальні рівняння 1-го порядку.

6.2.1. Рівняння з відокремлюваними змінними.

I. Рівняння з відокремленими змінними. Так називаються рівняння виду:

$$f(x)dx + g(y)dy = 0. \quad (6.4)$$

Нехай $y(x)$ – розв'язок цього рівняння. Інтегруючи цю тотожність, отримаємо:
 $\int f(x)dx + \int g(y)dy = 0$ – загальний розв'язок цього рівняння.

 Розв'язати задачу Коші $\begin{cases} 2(x-1)dx + 3y^2 dy = 0; \\ y(2) = 1. \end{cases}$

- Початкове рівняння – з відокремленими змінними, інтегруючи його, отримаємо:

$$\int 2(x-1)dx + \int 3y^2 dy = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^3 = C.$$

Співвідношення $(x-1)^2 + y^3 = C$ – загальний розв'язок рівняння.

Для того, щоб знайти частинний розв'язок, що задовольняє початковим умовам, потрібно підставити у загальний розв'язок дані значення x_0 і y_0 , і знайти значення сталої C :

$$(2-1)^2 + 1^3 = 2 \Rightarrow C = 2.$$

Таким чином, розв'язок: $(x-1)^2 + y^3 = 2$.

II. Рівняння з відокремлюваними змінними.

Так називаються рівняння виду:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad (6.5)$$

або

$$f_1(x) g_1(y) dx + f_2(x) g_2(y) dy = 0 \quad (6.6)$$

Ці рівняння легко зводяться до рівнянь з відокремленими змінними:

Записуємо рівняння (6.5) у формі $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$, потім ділимо на $g(y)$ і	Рівняння (6.6) ділимо на $f_2(x) g_1(y)$: $\frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} + \frac{g_2(y)dy}{g_1(y)} = 0.$
---	--

множимо на dx : $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$.		
Ці рівняння – з відокремленими змінними. Інтегруючи, отримаємо загальний розв'язок:		
$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$.		$\int \frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} + \int \frac{g_2(y)dy}{g_1(y)} = C$.
В обох випадках можлива втрата розв'язків: ділення на функцію може призвести до рівняння, яке нееквівалентне даному.		



Знайти розв'язок задачі Коші:

$$(xy^2 - x)dx = (x^2y - y)dy;$$

$$y|_{x=1} = 5.$$

• Розв'язуємо рівняння:

$$x(y^2 - 1)dx = y(x^2 - 1)dy \Rightarrow \frac{ydy}{y^2 - 1} = \frac{xdx}{x^2 - 1} \Rightarrow \int \frac{ydy}{y^2 - 1} = \int \frac{xdx}{x^2 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln |y^2 - 1| = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + \frac{1}{2} \ln |C|$$

$$\text{Далі, } \ln |y^2 - 1| = \ln |C(x^2 - 1)| \Rightarrow y^2 - 1 = C(x^2 - 1). \text{ Загальний розв'язок рівняння:}$$

$$y^2 = C(x^2 - 1) + 1.$$

III. Рівняння з однорідною правою частиною.

Так називаються рівняння із спеціальним видом залежності функції $f(x, y)$ від своїх аргументів:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (6.7)$$

Це рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними відносно нової невідомої функції $u(x)$ заміною $\frac{y(x)}{x} = u(x)$, або $y(x) = x \cdot u(x)$. Підставляючи в (6.7) $y = x u$,

$$y' = u + xu', \text{ отримаємо } u + xu' = f(u), x \frac{du}{dx} = f(u) - u, \text{ (це рівняння з відокремлюваними}$$

змінними), $\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}, \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$ – загальний розв'язок рівняння відносно змінних x , u .



$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}.$$

$$\bullet u = \frac{y}{x}, y = ux, y' = u + u'x, u + u'x = u + \frac{1}{u}, x \frac{du}{dx} = \frac{1}{u}, udu = \frac{dx}{x},$$

$$\int udu = \int \frac{dx}{x}, \frac{u^2}{2} = \ln |x| + \frac{C}{2}, u^2 = 2 \ln |x| + C,$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \ln x^2 + C, y^2 = x^2(C + \ln x^2)$$

– загальний розв'язок рівняння.



$$(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0.$$

• Тут коефіцієнти при диференціалах – однорідні функції другого степеня, тобто рівняння повинно приводитись до виду (6.4). Розв'яжемо рівняння відносно похідної:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2}{x^2}, \text{ ділимо чисельник і знаменник правої частини на } x^2: \frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \text{це}$$

рівняння з однорідною правою частиною:

$$u = \frac{y}{x}, \quad y = ux, \quad y' = u + u'x, \quad u + u'x = 2u - u^2,$$

$$x \frac{du}{dx} = u - u^2, \quad \frac{du}{u - u^2} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{u(1-u)} = \int \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{(1-u)+u}{u(1-u)} du = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln |u| - \ln |1-u| = \ln |x| + \ln |C|,$$

$$\frac{u}{u-1} = Cx, \quad \frac{y/x}{y/x-1} = Cx, \quad \frac{y}{y-x} = Cx.$$

Це загальний розв'язок рівняння.

6.2.2. Лінійні рівняння.

Означення. ДР 1-го порядку називається *лінійним*, якщо невідома функція $y(x)$ і її похідна $y'(x)$ входять у рівняння в першому степені:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad (6.8)$$

Тут $p(x), q(x)$ – неперервні функції.

Для розв'язку рівняння (6.8) представимо $y(x)$ у вигляді добутку двох нових невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$: $y(x) = u(x)v(x)$. Тоді $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. І рівняння приводиться до виду $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$, або $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$.

Це рівняння розв'яжемо у два етапи: спочатку знаходимо функцію $v(x)$ як частинний розв'язок рівняння з відокремлюваними змінними $v' + p(x)v = 0$; потім знаходимо $u(x)$ з рівняння $u'v = q(x)$.

Отже,

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx \Rightarrow \ln |v| = -\int p(x)dx \Rightarrow v = e^{-\int p(x)dx} \text{ Тепер}$$

$$\text{рівняння для } u(x) \text{ запишеться як } e^{-\int p(x)dx} \cdot u'(x) = q(x) \Rightarrow u'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C. \quad \text{Загальний розв'язок рівняння} \quad (6.8)$$

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right).$$



$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 1.$$

$$\bullet \quad y = uv, \quad y' = u'v + uv', \quad u'v + uv' - \operatorname{tg} x \cdot uv = \frac{1}{\cos x}, \quad u'v + u(v' - v \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x},$$

$$v' - v \operatorname{tg} x = 0, \quad \frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} x \cdot v,$$

Тепер для $u(x)$ отримаємо: $\frac{u'}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$, $u(x) = x + C$, і загальний розв'язок рівняння

$$y(x) = \frac{x + C}{\cos x}.$$

Для знаходження частинного розв'язку, що відповідає початковим умовам задачі Коші,

$$\text{підставимо у загальний розв'язок } x = 0, \quad y = 1:1 = \frac{0 + C}{\cos 0} \Rightarrow C = 1.$$

$$\text{Розв'язок задачі: } y(x) = \frac{x + 1}{\cos x}.$$

6.3. Однорідні диференціальні рівняння 1-го порядку.

Означення. Функція $f(x, y)$ називається *однорідною n -го виміру* відносно своїх аргументів x і y , якщо для будь-якого значення параметра t (крім нуля) виконується тотожність:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$



Чи є однорідною функція $f(x, y) = x^3 + 3x^2y$?

$$\bullet \quad f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2ty = t^3x^3 + 3t^3x^2y = t^3(x^3 + 3x^2y) = t^3 f(x, y).$$

Таким чином, функція $f(x, y)$ є однорідною 3-го порядку.

Означення. Диференціальне рівняння виду $y' = f(x, y)$ називається *однорідним*, якщо його права частина $f(x, y)$ є однорідна функція нульового виміру відносно своїх аргументів.

Будь-яке рівняння виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ є однорідним, якщо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – однорідні функції однакового виміру.

Розв'язок будь-якого однорідного рівняння ґрунтується на приведенні цього рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними.

Розглянемо однорідне рівняння $y' = f(x, y)$.

Так як функція $f(x, y)$ – однорідна нульового виміру, то можна записати:

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Так як параметр t – довільний, покладемо, що $t = \frac{1}{x}$. Отримаємо:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Права частина отриманої рівності залежить фактично тільки від одного аргумента $u = \frac{y}{x}$, тобто

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(u);$$

Отже, початкове диференціальне рівняння можна записати у вигляді:

$$y' = \varphi(u).$$

Заміняємо $y = ux$, $y' = u'x + ux'$.

$$u'x + ux' = \varphi(u); \quad u'x + u = \varphi(u); \quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$$

таким чином отримали рівняння з відокремлюваними змінними відносно невідомої функції u .

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

Далі, замінивши допоміжну функцію u на її вираз через x і y , знайшовши інтеграли, отримаємо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння.

 Розв'язати рівняння: $y' = \frac{y}{x} \left(\ln \frac{y}{x} + 1 \right)$.

• Введемо допоміжну функцію u :

$$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u.$$

Відмітимо, що введена нами функція u завжди додатна, так як у протилежному випадку втрачає зміст початкове ДР, що містить $\ln u = \ln \frac{y}{x}$.

Підставляємо у початкове рівняння:

$$u'x + u = u(\ln u + 1); \quad u'x + u = u \ln u + u; \quad u'x = u \ln u;$$

Відокремлюємо змінні: $\frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{dx}{x}.$

Інтегруючи, отримаємо: $\ln|\ln u| = \ln|x| + C; \quad \ln u = Cx; \quad u = e^{Cx};$

Переходячи від допоміжної функції назад до функції, отримаємо загальний розв'язок:

6.4. Лінійні рівняння.

Означення. Диференціальне рівняння називається *лінійним* відносно невідомої функції і її похідної, якщо воно може бути записане у вигляді:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{6.9}$$

при цьому, якщо права частина $Q(x)$ рівна нулю, то таке рівняння називається *лінійним однорідним* диференціальним рівнянням, якщо ж права частина $Q(x)$ не рівна нулю, то таке рівняння називається *лінійним неоднорідним* диференціальним рівнянням.

$P(x)$ і $Q(x)$ – функції, неперервні на деякому проміжку $a < x < b$.

Для розв'язування (6.9) представимо $y(x)$ у вигляді добутку двох нових невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$: $y(x) = u(x) v(x)$. Тоді $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, і рівняння зводиться до виду: $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$ або $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$. Це рівняння розв'язуємо у два етапи: спочатку знаходимо функцію $v(x)$ як частинний розв'язок рівняння з відокремлюваними змінними $v' + p(x)v = 0$; потім знаходимо $u(x)$ з рівняння $u'v = q(x)$. Отже

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx \Rightarrow \ln |v| = -\int p(x)dx \Rightarrow v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Тепер рівняння для $u(x)$ запишеться як $e^{-\int p(x)dx} \cdot u'(x) = q(x) \Rightarrow u'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow$
 $\Rightarrow u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C.$

$$\text{Загальний розв'язок (6.9): } y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right).$$



$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \frac{1}{\cos x}, y(0) = 1.$$

$$y = uv, y' = u'v + uv', u'v + uv' - \operatorname{tg} x \cdot uv = \frac{1}{\cos x}, u'v + u(v' - v \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}, v' - v \operatorname{tg} x = 0, \frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} x \cdot v,$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x}, \ln |v| = -\ln |\cos x|, v = \frac{1}{\cos x}. \text{ Тепер для } u(x) \text{ отримаємо:}$$

$$\frac{u'}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}, u(x) = x + C,$$

и загальний розв'язок рівняння $y(x) = \frac{x+C}{\cos x}$. Для знаходження частинного розв'язку, що відповідає початковим умовам задачі Коші, підставимо у загальний розв'язок $x = 0, y = 1: 1 = \frac{0+C}{\cos 0} \Rightarrow C = 1$. Розв'язок задачі: $y(x) = \frac{x+1}{\cos x}$.

Цей метод розв'язування лінійних рівнянь часто реалізується інакше – у формі варіації довільної сталої.

Рівняння (6.9) називається *однорідним*, якщо $q(x) = 0$.

Нехай дане неоднорідне рівняння (6.9) $y' + p(x)y = q(x)$. Воно також розв'язується у два етапи. Обнулимо праву частину і отримане рівняння називатимемо однорідним рівнянням, що відповідає рівнянню (6.9): $y' + p(x)y = 0$. Розв'язуємо це рівняння:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \Rightarrow \ln |y| = -\int p(x)dx + \ln |C| \Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Тепер знаходимо загальний розв'язок рівняння (6.9) у вигляді $y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}$, де $C(x)$ – нова невідома функція; знаходимо похідну $y'(x) = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}$ і підставляємо у (6.9) y і y' : $C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$, або $C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_0$, де $C_0 = \text{const}$. Тепер $y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx} = C_0e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx$.

Зрозуміло, що обидві реалізації розв'язку мають один зміст (розв'язок однорідного рівняння грає роль функції $v(x)$, варійована стала $C(x)$ – роль функції $u(x)$).

Відмітимо ще одну важливу обставину. Змінні x і y , що входять у рівняння, рівноправні, тому при визначенні типу рівняння потрібно мати на увазі, що може виявитись переважніше шукати розв'язок у вигляді $x = x(y)$, а не у вигляді $y = y(x)$.



$$(x + y^2)dy = ydx.$$

• Якщо ми представимо це рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^2}$, то розв'язати його не зможемо, так як воно не належить жодному з розглядуваних типів. Якщо ж його представити у вигляді $\frac{dx}{dy} = \frac{x+y^2}{y} = \frac{x}{y} + y$, то відносно функції $x = x(y)$ воно лінійне. Розв'язуємо його

методом варіації сталої. Відповідне однорідне рівняння: $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$. Його розв'язок:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln |x| = \ln |y| + \ln |C| \Rightarrow x = Cy. \quad \text{Шукаємо розв'язок даного рівняння у формі } x = C(y) \quad \text{Тоді:}$$

$$x' = C'(y)y + C(y) \Rightarrow C'(y)y + C(y) = \frac{C(y)y}{y} + y \Rightarrow C'(y) = 1 \Rightarrow C(y) = y + C_0 \Rightarrow x = y(y + C)$$

6.4.1. Рівняння Бернуллі.

Означення. Рівнянням Бернуллі називається рівняння виду:

$$y' + Py = Q \cdot y^n, \quad (6.10)$$

де P і Q – функції від x або сталі числа, n – стале число, не рівне 1.

Для розв'язування рівняння Бернуллі використовують підстановку $z = \frac{1}{y^{n-1}}$, за допомогою якої це рівняння зводиться до лінійного.

Для цього розділимо вихідне рівняння на y^n .

$$\frac{y'}{y^n} + P \frac{1}{y^{n-1}} = Q;$$

Використаємо підстановку, врахувавши, що $z' = -\frac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}} \cdot y' = -\frac{(n-1)y'}{y^n}$.

$$-\frac{z'}{n-1} + Pz = Q$$

$$z' - (n-1)Pz = -(n-1)Q$$

Тобто отримали лінійне рівняння відносно невідомої функції z .

Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді:

$$z = e^{-\int P dx} \left(\int Q_1 e^{\int P dx} dx + C \right)$$

$$Q_1 = -(n-1)Q; \quad P_1 = -(n-1)P.$$



Розв'язати рівняння $xy' + y = xy^2 \ln x$.

• Розділимо рівняння на xy^2 : $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \ln x$.

Покладемо $z = \frac{1}{y}$; $z' = -\frac{y'}{y^2}$. $-z' + \frac{1}{x}z = \ln x$; $z' - \frac{1}{x}z = -\ln x$.

Нехай $P = -\frac{1}{x}$, $Q = -\ln x$.

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}} \left(\int -\ln x e^{-\int \frac{dx}{x}} dx + C \right); \quad z = e^{\ln x} \left(\int -\ln x e^{-\ln x} dx + C \right);$$

$$z = x \left(\int -\ln x \cdot \frac{dx}{x} + C \right); \quad z = x \left(-\int \ln x d(\ln x) + C \right);$$

$$z = x \left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C \right)$$

Провівши обернену підстановку, матимемо:

$$\frac{1}{y} = x \left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C \right).$$



Розв'язати рівняння $xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}$.

• Розділимо обидві частини рівняння на $x\sqrt{y}$: $\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} \sqrt{y} = x$.

Нехай $z = \sqrt{y}$; $z' = \frac{1}{2\sqrt{y}} y'$; $y' = 2\sqrt{y} z'$;

$$\frac{1}{\sqrt{y}} 2\sqrt{y} z' - \frac{4}{x} z = x; \quad \frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2};$$

Отримали лінійне неоднорідне ДР. Розглянемо відповідне йому лінійне однорідне рівняння:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = 0; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x}; \quad \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x};$$

$$\int \frac{dz}{z} = 2 \int \frac{dx}{x} + C_1; \quad \ln z = 2 \ln x + \ln C; \quad z = Cx^2;$$

Нехай $C = C(x)$ і підставимо отриманий результат у лінійне неоднорідне рівняння з урахуванням того, що:

$$\frac{dz}{dx} = 2xC(x) + x^2 \frac{dC(x)}{dx};$$

$$2xC(x) + x^2 \frac{dC(x)}{dx} - \frac{2x^2 C(x)}{x} = \frac{x}{2};$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{2x}; \quad C(x) = \frac{1}{2} \ln x + C_2;$$

Маємо: $z = x^2 \left(C_2 + \frac{1}{2} \ln x \right)$;

Використовуючи обернену підстановку, отримаємо кінцеву відповідь:

$$y = x^4 \left(C_2 + \frac{1}{2} \ln x \right)^2.$$

6.5. Диференціальні рівняння у повних диференціалах.

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку виду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (6.11)$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо ліва частина цього рівняння представляє собою повний диференціал деякої функції $u = F(x, y)$.

Інтегрування такого рівняння зводиться до знаходження функції, після чого розв'язок легко знаходиться у вигляді: $du = 0$; $u = C$.

Таким чином, для розв'язку потрібно визначити:

- 1) в якому випадку ліва частина рівняння представляє собою повний диференціал функції;
- 2) як знайти цю функцію.

Якщо диференціальна форма $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ є повним диференціалом деякої функції u , то можна записати:

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

$$\text{Тобто } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \end{cases}.$$

Знайдемо мішані похідні 2-го порядку, про диференціювавши перше рівняння по y , а друге – по x :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \end{cases}.$$

Прирівнюючи ліві частини рівнянь, отримаємо *необхідну і достатню умову* того, що ліва частина ДР є повним диференціалом. Ця умова називається *умовою тотальності*.

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Тепер розглянемо питання про знаходження власне функції u .

Проінтегруємо рівність $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$:

$$u = \int M(x, y)dx + C(y).$$

Внаслідок інтегрування отримаємо не сталу величину C , а деяку функцію $C(y)$, так як при інтегруванні змінна y покладається сталим параметром.

Визначимо функцію $C(y)$.

Продиференціюємо отриману рівність по y .

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx + C'(y).$$

Звідки отримаємо: $C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx$.

Для знаходження функції $C(y)$ необхідно проінтегрувати наведену вище рівність. Однак, перед інтегруванням потрібно довести, що функція $C(y)$ не залежить від x . Цю умову буде виконано, якщо похідна цієї функції по x рівна нулю.

$$\begin{aligned} [C'(y)]'_x &= \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int M(x, y) dx \right) = \\ &= \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Тепер визначаємо функцію $C(y)$:

$$C(y) = \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy + C$$

Підставляючи цей результат у вираз для функції u , отримуємо:

$$u = \int M(x, y) dx + \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy + C.$$

Тоді загальний інтеграл вихідного ДР буде мати вигляд:

$$\int M(x, y) dx + \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy = C.$$

Слід відмітити, що при розв'язуванні рівнянь у повних диференціалах не обов'язково використовувати отриману формулу. Розв'язок можна отримати більш компактним, якщо просто використовувати сам метод, яким формула була отримана.



Розв'язати рівняння $(3x^2 + 10xy)dx + (5x^2 - 1)dy = 0$.

- Перевіримо умову тотальності: $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2 + 10xy)}{\partial y} = 10x$;

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(5x^2 - 1)}{\partial x} = 10x.$$

Умова тотальності виконується, отже, вихідне ДР є рівнянням у повних диференціалах. Визначимо функцію u .

$$u = \int M(x, y) dx + C(y) = \int (3x^2 + 10xy) dx + C(y) = x^3 + 5x^2 y + C(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^2 + C'(y) = N(x, y) = 5x^2 - 1;$$

$$C'(y) = -1; \quad C(y) = \int (-1) dy = -y + C_1;$$

Отже, $u = x^3 + 5x^2 y - y + C_1$.

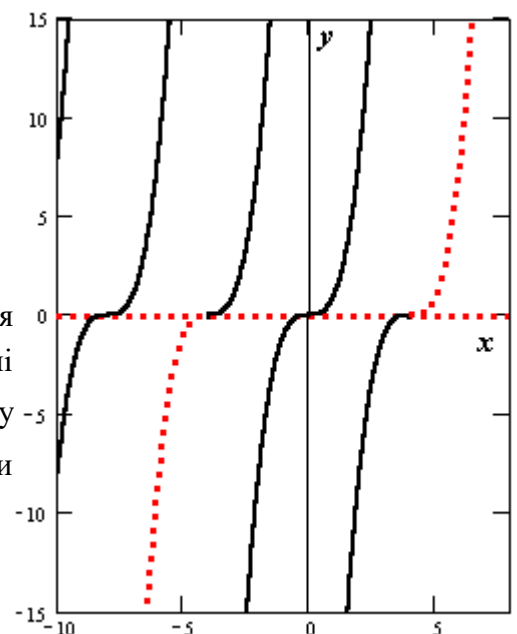
Знаходимо загальний інтеграл вихідного ДР:

$$u = x^3 + 5x^2 y - y + C_1 = C_2;$$

$$x^3 + 5x^2 y - y = C.$$

6.6. Особливі точки та особливі розв'язки рівняння першого порядку.

Якщо в околі точки (x_0, y_0) площин для рівняння $y' = f(x, y)$ виконуються умови існування і єдності задачі Коші (неперервність $f(x, y)$ і $f'_y(x, y)$), то через цю точку проходить єдина інтегральна крива. Якщо ці умови



порушуються, то точку (x_0, y_0) називають *особливою точкою* диференціального рівняння. Через особливу точку може не проходити жодної інтегральної кривої (тобто задача $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ не має розв'язку); може проходити одна інтегральна крива; може проходити декілька інтегральних кривих. Особливі точки можуть утворювати криву, яка сама є інтегральною кривою рівняння.

Розв'язок рівняння, у кожній точці якого порушується його єдність, називають *особливим розв'язком*. Для прикладу розглянемо рівняння $y' = 3y^{2/3}$. Тут $f(x, y) = 3y^{2/3}$ – неперервна у будь-якій точці (x, y) , але $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{y^{1/3}}$ – не має скінченної границі при $y \rightarrow 0$,

тобто в будь-якій точці (x, y) при $y=0$ порушується умова існування неперервної похідної $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Отже, будь-яка точка $(x, 0)$ є особливою точкою рівняння. Пряма $y=0$, очевидно, інтегральна крива рівняння (функція $y=0$ задовольняє рівняння). Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння. Декілька таких функцій наведено на рисунку справа зверху разом із розв'язком $y=0$. В будь-якій точці $(x, 0)$ порушується єдність розв'язку, таким чином, розв'язок $y=0$ – особливий. Насправді, через будь-яку точку $(x, 0)$ проходить нескінченна кількість інтегральних кривих, так як будь-яка крива, складена з частин особливого і неособливого розв'язків (червоний пунктир), також є інтегральною кривою.

6.7. Найпростіші ДР вищих порядків.

6.7.1. Основні поняття.

Означення. Диференціальним рівнянням порядку n називається рівняння виду:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

В деяких випадках це рівняння можна розв'язати відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Означення. Розв'язок $y = \varphi(x)$ задовольняє початковим умовам $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, якщо $\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Означення. Знаходження розв'язку $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, що задовольняє початковим умовам $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, називається *розв'язком задачі Коші*.

Теорема Коші (Теорема про необхідні і достатні умови існування розв'язку задачі Коші).

Якщо функція $(n-1)$ -ї змінних виду $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ в деякій області D $(n-1)$ -мірного простору неперервна і має неперервні частинні похідні по $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, то яка б не була точка $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ в цій області, існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, визначеного у деякому інтервалі, що містить точку x_0 і задовольняє початковим умовам $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$.

ДР вищих порядків, розв'язок яких може бути знайдений аналітично, можна розділити на декілька основних типів

6.7.2. Рівняння, що допускають послідовне інтегрування.

Рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$.

Якщо $f(x)$ – функція, неперервна на деякому проміжку $a < x < b$, то розв'язок може бути знайдений послідовним інтегруванням:

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= \int f(x) dx + C_1; \\ y^{(n-2)} &= \int \left(\int f(x) dx + C_1 \right) dx + C_2 = \int dx \int f(x) dx + C_1 x + C_2; \\ &\dots\dots\dots \\ y &= \int dx \int dx \dots \int f(x) dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n; \end{aligned}$$



Розв'язати рівняння $y''' = e^{2x}$ з початковими умовами:

$$x_0 = 0; y_0 = 1; y'_0 = -1; y''_0 = 0.$$

$$\bullet y'' = \int e^{2x} dx + C_1 = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1;$$

$$y' = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C_1 \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3;$$

Підставимо початкові умови:

$$1 = \frac{1}{8} + C_3; \quad -1 = \frac{1}{4} + C_2; \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1;$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}; \quad C_2 = -\frac{5}{4}; \quad C_3 = \frac{7}{8}.$$

Отримаємо частинний розв'язок (розв'язок задачі Коші): $y = \frac{1}{8} e^{2x} - \frac{1}{4} x^2 - \frac{5}{4} x + \frac{7}{8}$.

6.7.3. Рівняння, що допускають пониження порядку.

Це рівняння виду: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$.

У рівняннях такого типу можливе пониження порядку на одиниць. Для цього проводять заміну змінної:

$$y^{(k)} = z; \quad y^{(k+1)} = z'; \quad \dots \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тоді отримаємо: $F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$.

Тепер припустимо, що отримане ДР про інтегроване і сукупність його розв'язків виражається співвідношенням:

$$z = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}).$$

Роблячи обернену підстановку, маємо:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$$

Інтегруючи отримане співвідношення послідовнокразів, отримуємо кінцеву відповідь:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$



Знайти загальний розв'язок рівняння: $y''' = \frac{y''}{x}$.

- Використовуємо підстановку: $z = y''$; $z' = y'''$;

$$z' = \frac{z}{x}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1; \quad z = C_1 x;$$

Роблячи обернену заміну, маємо:

$$y'' = C_1 x; \quad y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{2} x^2 + C_2 \right) dx = \frac{C_1}{6} x^3 + C_2 x + C_3;$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y = Cx^3 + C_2 x + C_3;$$

Відмітимо, що це співвідношення є розв'язком для усіх значень змінної x крім значення $x=0$.

I. Рівняння, що не містять явно незалежної змінної.

Це рівняння виду $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Порядок таких рівнянь може бути понижений на одиницю за допомогою заміни змінних: $y' = p$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy} p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy} p\right)}{dy} p = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p; \text{ і т.д.}$$

Підставляючи ці значення у вихідне ДР, отримуємо:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

Якщо це рівняння проінтегрувати, і $\Phi(y, p, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0$ – сукупність його розв'язків, то для розв'язку даного ДР залишається розв'язати рівняння 1-го порядку:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0.$$



Знайти загальний розв'язок рівняння: $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0$.

- Заміна змінної: $p = y'$; $y'' = \frac{dp}{dy} p$;

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 - 4yp = 0; \quad p \left(y \frac{dp}{dy} - p - 4y \right) = 0;$$

$$1) y \frac{dp}{dy} - p - 4y = 0; \quad \frac{dp}{dy} = 4 + \frac{p}{y};$$

Для розв'язку отриманого ДР проведемо заміну змінної: $u = \frac{p}{y}$.

$$u + \frac{du}{dy} y = 4 + u; \quad du = 4 \frac{dy}{y}; \quad \int du = 4 \int \frac{dy}{y}; \quad u = 4 \ln|y| + 4 \ln C_1; \quad u = 4 \ln|C_1 y|;$$

$$p = 4y \ln|C_1 y|;$$

З урахуванням того, що $p = \frac{dy}{dx}$, отримуємо:

$$\frac{dy}{dx} = 4y \ln|C_1 y|; \quad \int \frac{dy}{4y \ln|C_1 y|} = \int dx; \quad x = \frac{1}{4} \int \frac{d(\ln|C_1 y|)}{\ln|C_1 y|} = \frac{1}{4} \ln|\ln|C_1 y|| + C_2;$$

Загальний розв'язок має вигляд: $\ln|\ln|C_1 y|| = 4x + C;$

$$2) \quad p = 0; \quad y' = 0; \quad y = C.$$

Таким чином, отримали два загальних розв'язки.

6.8. Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

6.8.1. Лінійні однорідні рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами.

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку:

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (6.12)$$

де p, q – дійсні числа.

Частинні розв'язки цього рівняння знаходимо у вигляді:

$$y = e^{kx} \quad (6.13)$$

де k – стала (дійсна чи комплексна), яку треба знайти. Підставивши функцію (6.13) в рівняння (6.12), дістанемо: $e^{kx} (k^2 + pk - q) = 0$.

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (6.14)$$

Отже, якщо k буде коренем рівняння (6.14), то функція (6.13) буде розв'язком рівняння (6.12). Квадратне рівняння (6.14) називається *характеристичним рівнянням* диференціального рівняння (6.12).

Позначимо корені характеристичного рівняння через k_1 і k_2 . Можливі три випадки:

- I. k_1 і k_2 – дійсні і різні числа ($k_1 \neq k_2$);
- II. k_1 і k_2 – комплексні числа ($k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$);
- III. k_1 і k_2 – дійсні і рівні числа ($k_1 = k_2$).

Розглянемо кожен випадок окремо.

I. Корені характеристичного рівняння дійсні і різні: $k_1 \neq k_2$.

Загальний розв'язок рівняння (6.12):

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \quad (6.15)$$

II. Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені:

$$k_1 = \alpha \pm \beta i, \quad k_2 = \alpha - \beta i$$

Загальний розв'язок рівняння (6.11) запишеться у вигляді

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) \quad (6.16)$$

III. Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні: $k_1 = k_2 = k$.

Загальний розв'язок рівняння (6.11):

$$y = x e^{kx} (C_1 + C_2 x) \quad (6.17)$$

Приклади розв'язування.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Складемо характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0$ і знайдемо його корені $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. За формулою (6.15) шуканий розв'язок має вигляд: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

2. Розв'язати рівняння $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Характеристичне рівняння $k^2 + 4k + 13 = 0$ має комплексні корені: $k_{1,2} = -2 \pm 3i$. Загальний розв'язок дістанемо за формулою (6.16):

$$y = e^{-2x} (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x).$$

6.8.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Рівняння із спеціальною правою частиною.

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (6.18)$$

де p, q – задані дійсні числа, $f(x) \neq 0$ – задана функція, неперервна на деякому проміжку (a, b) .

Загальний розв'язок такого рівняння являє собою суму частинного розв'язку рівняння (6.18) і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння ми вже знаходимо вміємо, тому розглянемо детальніше питання про знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Розглянемо деякі з таких рівнянь.

I. Нехай права частина в рівнянні (6.18) має вигляд:

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \quad (6.19)$$

де α – дійсне число, $P_n(x)$ – многочлен степеня n .

Можливі такі випадки:

a) число α не є коренем характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$.

Тоді диференціальне рівняння (6.18) має частинний розв'язок виду:

$$y^* = Q_n(x)e^{\alpha x} = (A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n)e^{\alpha x} \quad (6.20)$$

де $A_0, A_1, \dots, A_n$ – невизначені коефіцієнти.

б) якщо число α збігається з одним коренем характеристичного рівняння, тобто є простим коренем цього рівняння, то частинний розв'язок рівняння (6.18) треба шукати у вигляді:

$$y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x} \quad (6.21)$$

в) якщо число α є двократним коренем рівняння, то частинний розв'язок рівняння (6.18) шукають у вигляді:

$$y^* = x^2Q_n(x)e^{\alpha x} \quad (6.22)$$

Об'єднаємо випадки а) – в): якщо права частина рівняння (6.18) має вигляд (6.19), то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати у вигляді:

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x) \quad (6.23)$$

де $Q_n(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами того самого степеня, що й многочлен $P_n(x)$, а r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють α . Якщо α не є коренем характеристичного рівняння, то приймаємо $r=0$.

II. Нехай права частина в рівнянні (6.18) має вигляд:

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x) \quad (6.24)$$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n , $R_m(x)$ – многочлен степеня m ; α та β – дійсні числа.

Частинний розв'язок рівняння (6.18) треба шукати у вигляді:

$$y^* = x^r e^{\alpha x} (Q_s(x) \cos \beta x + L_s(x) \sin \beta x) \quad (6.25)$$

де $Q_s(x)$ та $L_s(x)$ – многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами;

s – найвищий степінь многочленів $R_m(x)$ та $P_n(x)$, тобто $s = \max(n, m)$; r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють $\alpha + \beta i$.

Зокрема, якщо права частина рівняння (6.18) має вигляд:

$$f(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x, \quad (6.26)$$

де A, B – відомі дійсні числа, то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати у вигляді:

$$y^* = x^r (a \cos \beta x + b \sin \beta x). \quad (6.27)$$

де a, b – невідомі коефіцієнти; r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють βi .

Приклади розв'язування.

1. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + y = 2x + 3$.

Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 1$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\bar{y}(x) = e^x (C_1 + C_2 x)$. Оскільки правою частиною даного рівняння є функція виду $P_1(x)e^{0 \cdot x}$, причому $\alpha = 0$, $\alpha \neq k_1$, $\alpha \neq k_2$, то за формулою (6.20)

частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y^* = Q_1(x)e^{0 \cdot x}$, тобто $y^* = A + Bx$, де A і B – невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $y^{*'} = B$, $y^{*''} = 0$ і підставивши їх у рівняння, дістанемо: $2B + A + Bx = 2x + 3$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} B = 2; \\ -2B + A = 3, \end{cases} \quad \text{звідки } B = 2, A = 7.$$

Отже, частинний розв'язок даного рівняння має вигляд $y^* = 7 + 2x$, тому

$y = \bar{y}(x) + y^*(x) = e^x(C_1 + C_2x) + 2x + 7$ – шуканий загальний розв'язок.

2. Розв'язати рівняння $y'' - 3y' + 2y = 8e^{3x}$.

Характеристичне рівняння $k^2 - 3k + 2 = 0$ має корені $k_1 = 1$ і $k_2 = 2$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$. Оскільки правою частиною даного рівняння є функція виду $P_0(x)e^{3x}$, причому $\alpha = 3$, $\alpha \neq k_1$, $\alpha \neq k_2$, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y^* = Q_0(x)e^{3x}$, тобто $y^* = Ae^{3x}$, де A – невідомий коефіцієнт.

Знайшовши похідні $(y^*)' = 3Ae^{3x}$, $(y^*)'' = 9Ae^{3x}$ і підставивши їх у рівняння, дістанемо $9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = 8e^{3x}$, звідки $A = 4$, тому $y^* = 4e^{3x}$ – частинний розв'язок даного рівняння, а y – його загальний розв'язок.

6.9. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами.

Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку зі змінними коефіцієнтами, які зводяться до рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

I. Рівняння Ейлера.

Це рівняння вигляду:

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \quad (6.28)$$

Таке рівняння зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною

$$x = e^t, \quad x > 0, \quad x = -e^{-t}, \quad x < 0 \quad (6.29)$$

Дійсно
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} e^{-t} \right) = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) e^{-2t} \quad (6.30)$$

.....

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \left(\frac{d^n y}{dt^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_{n-1} \frac{dy}{dt} \right) e^{-nt}.$$

Підставляючи (6.29) і (6.30) у диференціальне рівняння (6.28), ми отримаємо диференціальне рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_n y = 0 \quad (6.31)$$

Частинні розв'язки диференціального рівняння (6.31) знаходять у вигляді $y = e^{rt}$. Враховуючи (6.29), частинні розв'язки диференціального рівняння (6.28) можна зразу шукати у вигляді (6.29):

$$y = x^r. \quad (6.32)$$

II. Рівняння Лагранжа має вигляд:

$$(ax+b)^n y^n + (ax+b)^{n-1} a_1 y^{n-1} + \dots + (ax+b) a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (6.33)$$

Це рівняння заміною $ax+b = e^t$ також зводиться до диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

III. Рівняння

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0 \quad (6.34)$$

називається *рівнянням Чебишова* і після заміни $x = \cos t$ при $|x| < 1$ воно набуває вигляду:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + n^2 y = 0 \quad (6.35)$$

Дійсно

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt} \right) \left(-\frac{1}{\sin t} \right) = \frac{1}{\sin^2 t} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t} \frac{dy}{dt}.$$

Отже

$$\sin^2 t \left(\frac{1}{\sin^2 t} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t} \frac{dy}{dt} \right) + \frac{\cos t}{\sin t} \frac{dy}{dt} + n^2 y = 0,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + n^2 y = 0.$$

Тобто отримали (6.35).



Розв'язати диференціальне рівняння $x^3 y''' + xy' - y = 0$.

- Випишемо і розв'яжемо характеристичне рівняння

$$r(r-1)(r-2) + r - 1 = 0,$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = 1.$$

Тому фундаментальна система розв'язків буде наступною

$$y_1 = x, y_2 = x \ln x, y_3 = x \ln^2 x.$$

Отже $y = x(c_1 + c_2 \ln x + c_3 \ln^2 x)$ – загальний розв'язок.

6.10. Системи диференціальних рівнянь.

6.10.1. Нормальні системи диференціальних рівнянь.

Означення. Сукупність співвідношень виду

[illegible]

де x – незалежна змінна, $y_1, y_2, \dots, y_n$ – шукані функції, називається *системою ДР 1-го порядку*.

Означення. Система диференціальних рівнянь 1-го порядку, розв’язуваних відносно похідних від невідомих функцій називається *нормальною системою ДР*.

Така система має вигляд:

[illegible]

Теорема (Теорема Коші). Якщо у деякій області $(n-1)$ -мірного простору функції $f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, ..., $f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні по $y_1, y_2, \dots, y_n$, то для будь-якої точки $(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ цієї області існує єдиний розв'язок

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad \dots \quad y_n = \varphi_n(x)$$

системи диференціальних рівнянь виду (6.36), визначене в деякому околі точки x_0 і задовольняє початковим умовам $x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$.

Означення. Загальним розв'язком системи ДР виду (6.) буде сукупність функцій $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, ..., $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, які при підстановці в систему (6.36) обертають її в тотожність.

6.10.2. Нормальні системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

При розгляді систем диференціальних рівнянь обмежимося випадком системи трьох рівнянь ($n=3$), що буде справедливим для систем довільного порядку.

Означення. Нормальна система ДР зі сталими коефіцієнтами називається *лінійною однорідною*, якщо її можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u \\ \frac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u \\ \frac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u \end{cases} \quad (6.37)$$

Розв'язки системи (6.37) мають такі властивості:

- 1) Якщо y, z, u – розв'язки системи, то Cy, Cz, Cu , де $C = \text{const}$ – теж є розв'язками цієї системи.
- 2) Якщо y_1, z_1, u_1 і y_2, z_2, u_2 – розв'язки системи, то $y_1 + y_2, z_1 + z_2, u_1 + u_2$ – теж є розв'язками системи.

Розв'язки системи знаходяться у вигляді:
 $y = \alpha e^{kx}; \quad z = \beta e^{kx}; \quad u = \gamma e^{kx}, \quad \alpha, \beta, \gamma, k = \text{const}.$

Підставляючи ці значення в систему (6.37) і переносячи усі члени в одну сторону і скоротивши на e^{kx} , отримуємо:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{cases}$$

Для того, щоб отримана система мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб визначник системи був рівний нулю, тобто:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

В результаті обчислення визначника отримуємо рівняння 3-го степеня відносно k . Це рівняння називається *характеристичним* і має три корені k_1, k_2, k_3 . Кожному з цих коренів відповідає ненульовий розв'язок системи (6.37):

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 e^{k_1 x}, & z_1 &= \beta_1 e^{k_1 x}, & u_1 &= \gamma_1 e^{k_1 x}, \\ y_2 &= \alpha_2 e^{k_2 x}, & z_2 &= \beta_2 e^{k_2 x}, & u_2 &= \gamma_2 e^{k_2 x}, \\ y_3 &= \alpha_3 e^{k_3 x}, & z_3 &= \beta_3 e^{k_3 x}, & u_3 &= \gamma_3 e^{k_3 x}. \end{aligned}$$

Лінійна комбінація цих розв'язків з довільними коефіцієнтами буде розв'язком системи (6.37):

$$\begin{aligned} y &= C_1 \alpha_1 e^{k_1 x} + C_2 \alpha_2 e^{k_2 x} + C_3 \alpha_3 e^{k_3 x}; \\ z &= C_1 \beta_1 e^{k_1 x} + C_2 \beta_2 e^{k_2 x} + C_3 \beta_3 e^{k_3 x}; \\ u &= C_1 \gamma_1 e^{k_1 x} + C_2 \gamma_2 e^{k_2 x} + C_3 \gamma_3 e^{k_3 x}. \end{aligned}$$



Знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

- Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 5 - k & 2 \\ 2 & 2 - k \end{vmatrix} = 0; \quad (5 - k)(2 - k) - 4 = 0; \quad 10 - 5k - 2k + k^2 - 4 = 0;$$

$$k^2 - 7k + 6 = 0; \quad k_1 = 1; \quad k_2 = 6;$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0 \end{cases}$$

$$\text{Для } k_1: \begin{cases} (5-1)\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + (2-1)\beta_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$$

Покладаючи $\alpha_1 = 1$ (приймається будь-яке значення), отримаємо: $\beta_1 = -2$.

$$\text{Для } k_2: \begin{cases} (5-6)\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 + (2-6)\beta_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -1\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\beta_2 = 0 \end{cases}$$

Покладаючи $\alpha_2 = 2$ (приймається будь-яке значення), отримаємо: $\beta_2 = 1$.

$$\text{Загальний розв'язок системи: } \begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases}$$



Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = y + z + x \end{cases}$$

• Ця система не відноситься до розглянутого вище типу, так як не є однорідною (у рівняння входить незалежна змінна x).

Для розв'язування про диференціюємо перше рівняння по x . Отримаємо:

$$y'' = y' + z'.$$

Замінюючи значення z' з другого рівняння отримаємо: $y'' = y' + y + z + x$.

З урахуванням першого рівняння, отримаємо: $y'' = 2y' + x$.

Розв'язуємо отримане ДР 2-го порядку.

$$y'' - 2y' = x; \quad y'' - 2y' = 0; \quad k^2 - 2k = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 2.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння: $y = C_1 + C_2 e^{2x}$.

Тепер знаходимо частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння по формулі $y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$; $\alpha = 0$; $r = 1$; $Q(x) = Ax + B$;

$$y = Ax^2 + Bx; \quad y' = 2Ax + B; \quad y'' = 2A;$$

$$2A - 4Ax - 2B = x; \quad A = -\frac{1}{4}; \quad B = -\frac{1}{4};$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x(x+1).$$

Підставивши отримане значення в перше рівняння системи, маємо:

$$z = -C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}(x^2 - x - 1).$$



Знайти розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} y' = z + w \\ z' = 3y + w \\ w' = 3y + z \end{cases}$$

• Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 3 & -k & 1 \\ 3 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0; \quad -k \begin{vmatrix} -k & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -k \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-k(k^2 - 1) + 3k + 3 + 3 + 3k = 0; \quad k^3 - 7k - 6 = 0; \quad k_1 = -1; \quad k_2 = -2; \quad k_3 = 3;$$

1) $k_1 = -1$.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0; & \alpha = 0; \quad \beta = -\gamma; \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Якщо прийняти $\gamma = 1$, то розв'язки будуть:

$$y_1 = 0; \quad z_1 = -e^{-x}; \quad w_1 = e^{-x};$$

2) $k_2 = -2$.

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0; & \alpha = -\gamma; \quad \beta = \gamma; \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

Якщо прийняти $\gamma = 1$, то:

$$y_2 = -e^{-2x}; \quad z_2 = e^{-2x}; \quad w_2 = e^{-2x};$$

3) $k_3 = 3$.

$$\begin{cases} -3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - 3\beta + \gamma = 0; & \alpha = \frac{2}{3}\gamma; \quad \beta = \gamma; \\ 3\alpha + \beta - 3\gamma = 0 \end{cases}$$

Якщо прийняти $\gamma = 3$, то:

$$y_3 = 2e^{3x}; \quad z_3 = 3e^{3x}; \quad w_3 = 3e^{3x};$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$\begin{cases} y = -C_2 e^{-2x} + 2C_3 e^{3x} \\ z = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 3C_3 e^{3x} \\ w = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 3C_3 e^{3x} \end{cases}$$

Вправи для самостійного розв'язування.

Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь.

1. а) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$; б) $(xy + x^2)y' = y^2$.

2. а) $x^2 y^2 y' = y + 3$; б) $xy' + y = x + 1$.

3. а) $(x^2 + 2)y' + 2xy^2 = 0$; б) $(2xy + y^2)y' = y^2$.

4. а) $(3x + xy^2)y' = 4$; б) $2xyu' = x^2 - y^2$.

5. а) $(x^2 + 2)y' = 2x - xy^2$; б) $xy' + 4y = x^4$.

- | | | |
|-----|---------------------------------|----------------------------|
| 6. | а) $y^2 + 4 = (x^2 y - 4y)y'$; | б) $xy' + 2y = x^2$. |
| 7. | а) $(4 + x^2)y' = 3x + 3y^2$; | б) $x^2 y' = xy - y^2$. |
| 8. | а) $(2 + x^2)y' = x + 3xy$; | б) $y' - y = e^x$. |
| 9. | а) $(1 + x^2)y' = x + 2xy$; | б) $xy^2 y' = x^3 + y^3$. |
| 10. | а) $(x^2 + 2)y' = -2xy^2$; | б) $xy' + y = x + 1$. |

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам.

1. $y'' + 3y' + 2y = 8x^2 + 4$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
2. $y'' - 3y' + 2y = 18xe^{-x}$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.
3. $y'' - 4y' + 4y = 8\cos x$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.
4. $y'' + 4y' + 4y = x^2 + x + 2$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$.
5. $y'' - 2y' + 5y = 3xe^{2x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
6. $y'' - 2y' + 15y = -45x^2 + 7,2$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$.
7. $y'' + y' - 6y = 39\sin 3x$; $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.
8. $y'' - y' - 6y = 27\cos 2x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
9. $y'' + 10y' + 25y = -25x^2 + 25$; $y(0) = 4$, $y'(0) = 3$.
10. $y'' + 4y' + 8y = 8x^2 + 16x + 6$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

Ми будемо вивчати операційне числення як один з методів розв'язування звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і систем таких рівнянь. Якихось переваг цей метод перед іншими не має, в той же час його простота зробила його основним інструментом при розв'язуванні задачі Коші у ряді прикладних наук (механіці, радіотехніці, електротехніці і т. і.).

Ідея операційного числення полягає у наступному. Простір функцій, що задовольняє деяким достатньо загальним умовам (простір функцій-оригіналів) взаємно однозначно відображається в інший простір функцій (простір функцій-зображень) так, що операціям диференціювання та інтегрування у просторі функцій-оригіналів відповідають більш прості операції (множення та ділення) у просторі функцій-зображень. У результаті диференціальне рівняння у просторі функцій-оригіналів перетворюється у лінійне алгебраїчне рівняння у просторі функцій-зображень, розв'язок якого знаходиться без проблем. Остання дія – відновлення розв'язку рівняння по його зображенню.

Таким чином, ми повинні вивчити питання:

1. Які функції можуть бути функціями-оригіналами і які властивості функцій-зображень;
2. Які правила переведу оригіналів у зображення і навпаки;
3. Які зображення мають основні елементарні функції (таблиця стандартних зображень). $\longrightarrow$

7.1. Означення функції-оригінала та її зображення по Лапласу.

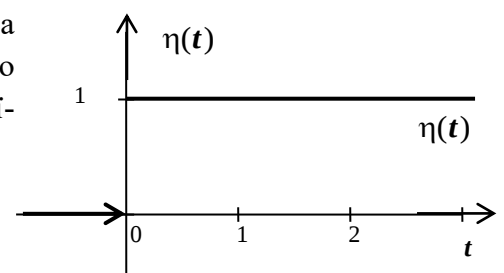
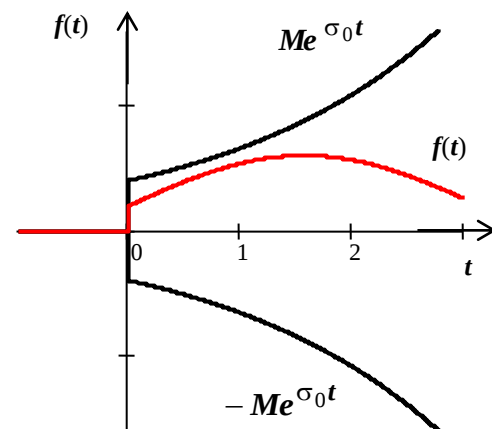
Означення. Функцією-оригіналом називається дійснозначна або комплекснозначна функція $f(t)$ дійсної змінної t , що задовольняє умовам:

1. $f(t) = 0$ при $t < 0$;
2. Існують такі сталі $M > 0$ і $\sigma_0 \geq 0$, що $|f(t)| \leq M \cdot e^{\sigma_0 t}$;
3. На будь-якому відрізку $[a, b]$ ($0 \leq a < b < \infty$) функція задовольняє умовам Діріхле (неперервна або має скінченну кількість усувних розривів і розривів першого роду; монотонна або має скінченну кількість екстремумів).

Зміст цих умов такий.

1. Так як одне з основних застосувань операційного числення – розв'язування задач з початковими умовами, то поведінка функції до початкового моменту $t = 0$ несуттєва;

2. Параметр σ_0 у другій умові прийнято називати показником росту функції $f(t)$. Сама друга умова означає, що швидкість росту функції-оригінала не може бути експоненціальною. У сукупності з третьою умовою це забезпечує існування і певні властивості функції-зображення.



Наведемо приклади функцій-оригіналів. Перша і третя властивості для них очевидні, тому перевірять лише другу.

1. Одиначна функція Хевісайда.

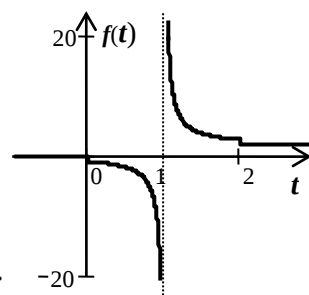
Так називається функція $\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$ Це – функція-оригінал ($\eta(t) \leq e^t$).

$$2. \quad f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ t^\alpha, & t \geq 0; \end{cases} \quad (\alpha \geq 0).$$

Відмітимо, що за допомогою одиначної функції Хевісайда $\eta(t)$ визначення цієї функції можна записати коротше: $f(t) = t^\alpha \cdot \eta(t)$ ($\alpha \geq 0$), так як функція $\eta(t)$ в якості множника обнуляє будь-яку другу функцію при $t < 0$. Далі ми будемо писати просто $f(t) = t^\alpha$, $f(t) = e^{\alpha t}$, $f(t) = \sin t$, $f(t) = \cos t$ і т.д., маючи на увазі, що усі функції починаються у момент $t = 0$, і при $t < 0$ тотожно рівні нулю.

Для функції $f(t) = t^\alpha$ отримуємо: $t < e^t$ при $t \geq 0$, тому $t^\alpha < e^{\alpha t}$.

$$3. \quad f(t) = \sin t. \quad |\sin t| \leq 1 = 1 \cdot e^{0t} \text{ і т.д.}$$



Приклади функцій, які не є оригіналами:

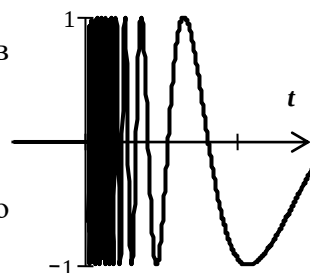
$$1. \quad f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \frac{1}{t-1}, & t \geq 0. \end{cases} \quad \text{Ця функція має розрив другого роду в точці } t=1.$$

$$2. \quad f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \sin\left(\frac{1}{t}\right), & t \geq 0. \end{cases} \quad \text{Функція має нескінченну кількість екстремумів}$$

на відріжку $[0,1]$.

$$3. \quad f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ (t+1) \cdot e^{t^2}, & t \geq 0. \end{cases} \quad \text{Не існує таких констант } M \text{ і } \sigma_0, \text{ що}$$

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{\sigma_0 t}.$$



Означення. Зображенням по Лапласу функції-оригінала $f(t)$ (або перетворенням Лапласа функції $f(t)$) називається функція комплексної змінної p , що визначається рівністю

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot f(t) dt.$$

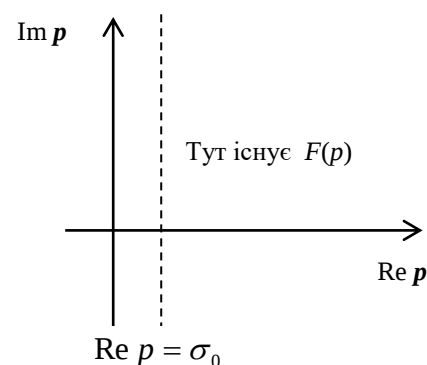
Інтеграл в правій частині цього означення збіжний абсолютно в будь-якій точці p , що задовольняє нерівність $\operatorname{Re} p \geq \sigma_1$, де σ_1 – довільне число, таке, що $\sigma_1 > \sigma_0$. Дійсно,

$$|e^{-pt} \cdot f(t)| = |e^{-pt}| \cdot |f(t)| \leq e^{-(\operatorname{Re} p + i \operatorname{Im} p)t} \cdot M e^{\sigma_0 t} = M |e^{-\operatorname{Re} p t}| \cdot |e^{-i \operatorname{Im} p t}| \cdot e^{\sigma_0 t} = \quad (\text{так як}$$

$$|e^{-i \operatorname{Im} p t}| = |\cos(\operatorname{Im} p \cdot t) - i \sin(\operatorname{Im} p \cdot t)| = 1) = M |e^{-\operatorname{Re} p t}| \cdot e^{\sigma_0 t} = M e^{-(\operatorname{Re} p - \sigma_0)t} \leq M e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t}, \text{ а інтеграл}$$

$$\int_0^{+\infty} M e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} dt = -\frac{M}{\sigma_1 - \sigma_0} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{M}{\sigma_1 - \sigma_0} \quad \text{збігається.}$$

Таким чином, ми довели, що зображення $F(p)$ визначене в будь-якій точці p , такий що $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, тобто у півплощині справа від прямої $\operatorname{Re} p = \sigma_0$. Як наслідок, показник



швидкості росту оригінала число σ_0 називають *абсцисою збіжності*.

Відмітимо, що ми довели також, що $F(p) \xrightarrow{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} 0$: так як $|e^{-pt} \cdot f(t)| \leq M e^{-(\operatorname{Re} p - \sigma_0)t}$, то

$$|F(p)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot f(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |e^{-pt} \cdot f(t)| dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re} p - \sigma_0)t} dt = \frac{M}{\operatorname{Re} p - \sigma_0} \xrightarrow{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} 0. \text{ Як і в теорії}$$

степеневих рядів, цього достатньо, щоб збіжність інтеграла була рівномірною по змінній p , тому функцію $F(p)$ можна диференціювати і інтегрувати по цій змінній.

7.2. Зображення найпростіших функцій.

1. Одинична функція Хевісайда $\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$

Її зображення: $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot 1 \cdot dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$, так як $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} = 0$. Відповідність між функцією-оригіналом і зображенням будемо позначати так: $f(t) \xrightarrow{\rightarrow} F(p)$ і $f(t) \xleftarrow{\leftarrow} F(p)$. Отже, доведено: $\eta(t) \xrightarrow{\rightarrow} \frac{1}{p}$.

2. $f(t) = e^{\alpha t}$.

$$e^{\alpha t} \xrightarrow{\rightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot e^{\alpha t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = -\frac{1}{p-\alpha} \cdot e^{-(p-\alpha)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-\alpha}.$$

3. $f(t) = \sin \omega t$.

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin \omega t dt = -\frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \sin \omega t de^{-pt} = -\frac{1}{p} \sin \omega t \cdot e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} d \sin \omega t = \frac{\omega}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot \cos \omega t dt = \\ &= -\frac{\omega}{p^2} \int_0^{+\infty} \cos \omega t de^{-pt} = -\frac{\omega}{p^2} e^{-pt} \cdot \cos \omega t \Big|_0^{+\infty} + \frac{\omega}{p^2} \int_0^{+\infty} e^{-pt} d \cos \omega t = \frac{\omega}{p^2} - \frac{\omega^2}{p^2} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot \sin \omega t dt. \end{aligned}$$

Для $F(p)$ отримали рівняння:

$$F(p) = \frac{\omega}{p^2} - \frac{\omega^2}{p^2} F(p) \Rightarrow (p^2 + \omega^2) F(p) = \omega \Rightarrow F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \text{ Отже, } \sin \omega t \xrightarrow{\rightarrow} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

4. $f(t) = \cos \omega t$. Аналогічно попередньому доводиться, що $\cos \omega t \xrightarrow{\rightarrow} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$.

5. Степенева функція $f(t) = t^n$. При $n = 1$ знаходимо

$$t \xrightarrow{\rightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot t \cdot dt = -\frac{1}{p} \int_0^{+\infty} t \cdot de^{-pt} = -\frac{1}{p} \left(t \cdot e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot dt \right) = \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot dt = \frac{1}{p^2}, \text{ так як}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \cdot e^{-pt} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{pt}} = (\text{по правилу Лопіталя}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{p \cdot e^{pt}} = 0. \text{ Отже, } t \xrightarrow{\rightarrow} \frac{1}{p^2}. \text{ Аналогічно}$$

можна довести, що $t^2 \rightarrow \frac{2}{p^3}$, $t^3 \rightarrow \frac{3 \cdot 2}{p^4}$, і, взагалі, при цілому n $t^n \rightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$. Далі ми отримаємо більш просте виведення цих формул за допомогою теореми про диференціювання зображень.

7.3. Властивості перетворення Лапласа.

7.3.1. Лінійність перетворення Лапласа.

Якщо $f(t)$, $g(t)$ – функції-оригінали, які мають зображення $F(p)$, $G(p)$, то їх лінійна комбінація $\alpha f(t) + \beta g(t)$ ($\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$) – теж функція-оригінал, і $\alpha f(t) + \beta g(t) \rightarrow \alpha F(p) + \beta G(p)$.

Ця властивість слідує із властивості лінійності невластного визначеного інтеграла. З його допомогою можна простіше вивести зображення функцій $f(t) = \sin \omega t$, $f(t) = \cos \omega t$,

виходячи з зображення $e^{\alpha t} \rightarrow \frac{1}{p - \alpha}$:

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \rightarrow \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{(p + i\omega) - (p - i\omega)}{(p - i\omega)(p + i\omega)} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2};$$

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(p + i\omega) + (p - i\omega)}{(p - i\omega)(p + i\omega)} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Далі,

$$\text{sh } \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - \omega} - \frac{1}{p + \omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2};$$

$$\text{ch } \omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - \omega} + \frac{1}{p + \omega} \right) = \frac{p}{p^2 - \omega^2}.$$

Теорема подібності. Якщо $f(t)$ – функція-оригінал і $f(t) \rightarrow F(p)$, то для будь-якого $\lambda > 0$: $f(\lambda t) \rightarrow \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$.

Доведення.

$$f(\lambda t) \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(\lambda t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{p}{\lambda}\right)(\lambda t)} f(\lambda t) \frac{1}{\lambda} d\lambda t = \left| t_1 = \lambda t \right| = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{p}{\lambda}\right)t_1} f(t_1) dt_1 = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \quad \text{Якщо}$$

$$e^t \rightarrow \frac{1}{p-1}, \text{ то } e^{\alpha t} \rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\frac{p}{\alpha}-1} = \frac{1}{p-\alpha}; \text{ якщо } \text{sh } t \rightarrow \frac{1}{p^2-1}, \text{ то } \text{sh } \omega t \rightarrow \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2-1} = \frac{\omega}{p^2-\omega^2} \text{ і}$$

т.д.

Теорема зміщення. Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, то $e^{\alpha t} f(t) \rightarrow F(p - \alpha)$. Тут α – довільне комплексне число.

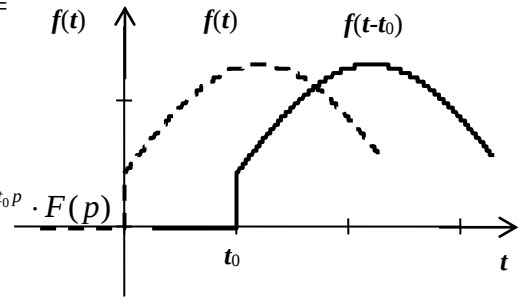
$$\text{Доведення. } e^{\alpha t} f(t) \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t} f(t) dt = F(p - \alpha).$$

Якщо $\eta(t) \rightarrow \frac{1}{p}$, то $e^{\alpha t} = e^{\alpha t} \cdot \eta(t) \rightarrow \frac{1}{p - \alpha}$; якщо $\cos \omega t \rightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}$, то $e^{\alpha t} \cdot \cos \omega t \rightarrow \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \omega^2} = \frac{p - \alpha}{p^2 - 2p\alpha + (\alpha^2 + \omega^2)}$ і т.д.

Теорема запізнення. Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ (тобто $f(t) \cdot \eta(t) \rightarrow F(p)$), то $f(t - t_0) \cdot \eta(t - t_0) \rightarrow e^{-t_0 p} \cdot F(p)$ для будь-якого $t_0 \geq 0$.

Доведення.

$$\begin{aligned} f(t - t_0) \cdot \eta(t - t_0) &\rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-tp} f(t - t_0) dt = \\ &= \int_{t_0}^{+\infty} e^{-tp} f(t - t_0) dt = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-(t-t_0)p} \cdot e^{-t_0 p} \cdot f(t - t_0) dt = \\ &= e^{-t_0 p} \int_{t_0}^{+\infty} e^{-(t-t_0)p} \cdot f(t - t_0) dt = \left| \begin{array}{l} t_1 = t - t_0 \\ dt = dt_1 \end{array} \right| = e^{-t_0 p} \int_0^{+\infty} e^{-t_1 p} \cdot f(t_1) dt_1 = e^{-t_0 p} \cdot F(p) \\ &= e^{-t_0 p} \int_0^{+\infty} e^{-t_1 p} \cdot f(t_1) dt_1 = e^{-t_0 p} \cdot F(p). \end{aligned}$$

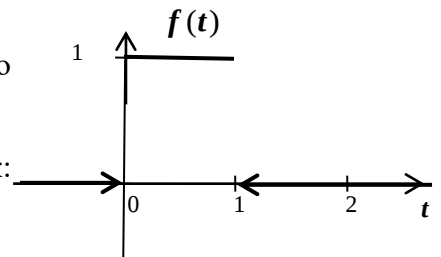


Ця теорема використовується для зображення функцій **імпульсних, складних, періодичних**. Розглянемо їх докладніше.

7.3.2. Імпульсні функції.

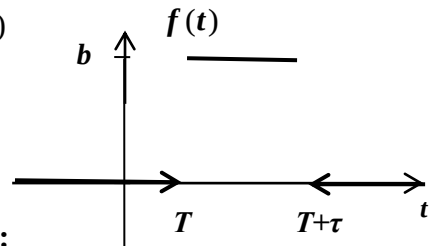
Одиничний імпульс: $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & 0 \leq t \leq 1; \\ 0, & t > 1. \end{cases}$ За допомогою

функції Хевісайда ця функція записується так:



$f(t) = \eta(t) - \eta(t - 1)$. $\eta(t) \rightarrow \frac{1}{p}$; по теоремі запізнення ($t_0 = 1$)

$\eta(t - 1) \rightarrow \frac{e^{-p}}{p}$, тому $f(t) \rightarrow \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p} = \frac{1 - e^{-p}}{p}$.



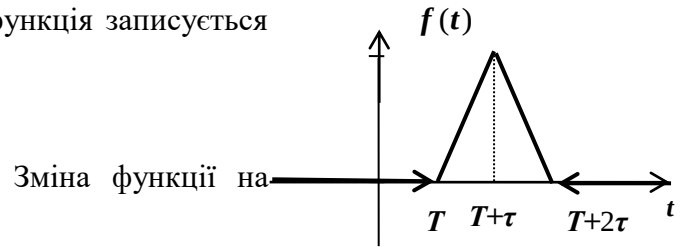
Запізнений прямокутний імпульс:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < T; \\ b, & T \leq t \leq T + \tau; \\ 0, & t > T + \tau; \end{cases}$$

Тут $f(t) = b \cdot (\eta(t - T) - \eta(t - (T + \tau))) \rightarrow b \cdot \left(\frac{e^{-pT}}{p} - \frac{e^{-p(T + \tau)}}{p} \right) = \frac{b \cdot e^{-pT} \cdot (1 - e^{-p\tau})}{p}$.

Трикутний імпульс: Аналітично ця функція записується

$$\text{так: } f(t) = \begin{cases} 0, t < T; \\ \frac{b}{\tau}(t-T), T \leq t < T+\tau; \\ -\frac{b}{\tau}(t-T-2\tau), T+\tau \leq t < T+2\tau; \\ 0, t > T+2\tau. \end{cases}$$



переході від ділянки $T \leq t \leq T+\tau$ до ділянки $T+\tau < t \leq T+2\tau$ рівна

$$-\frac{b}{\tau}(t-T-2\tau) - \frac{b}{\tau}(t-T) = -\frac{2b}{\tau}(t-T-\tau); \text{ при переході до ділянки}$$

$$t > T+2\tau \text{ зміна функції рівна } 0 - \left[-\frac{b}{\tau}(t-T-2\tau) \right] = \frac{b}{\tau}(t-T-2\tau),$$

тому

можна

переписати

$$f(t) = \frac{b}{\tau}(t-T) \cdot \eta(t-T) - \frac{2b}{\tau}(t-T-\tau) \cdot \eta(t-T-\tau) + \frac{b}{\tau}(t-T-2\tau) \cdot \eta(t-T-2\tau)$$

$$\text{, і, так як } t \rightarrow \frac{1}{p^2}, \frac{b}{\tau}(t-T) \cdot \eta(t-T) \rightarrow \frac{b}{\tau} \cdot \frac{e^{-Tp}}{p^2}, \text{ то } f(t) \rightarrow \frac{b}{\tau} \cdot \frac{e^{-Tp}}{p^2} - \frac{2b}{\tau} \cdot \frac{e^{-(T+\tau)p}}{p^2} + \frac{b}{\tau} \cdot \frac{e^{-(T+2\tau)p}}{p^2} =$$

$$= \frac{b}{\tau} \cdot e^{-Tp} \cdot \frac{1-2e^{-\tau p} + e^{-2\tau p}}{p^2} = \frac{b}{\tau} \cdot e^{-Tp} \cdot \frac{(1-e^{-\tau p})^2}{p^2}.$$

Синусоїдальний

імпульс:

$$f(t) = \begin{cases} 0, t < 0; \\ \sin t, 0 \leq t \leq \pi; \\ 0, t > \pi. \end{cases}$$

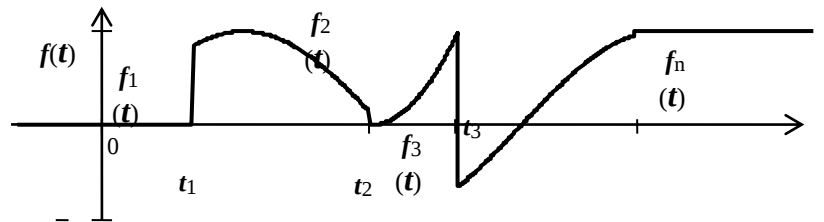
Тут

$$f(t) = \sin t \cdot \eta(t) + \sin(t-\pi) \cdot \eta(t-\pi), \text{ тому } f(t) \rightarrow \frac{1}{p^2+1} + \frac{e^{-\pi p}}{p^2+1} = \frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}.$$

7.3.3. Складені функції.

Нехай $f(t)$ задається різними виразами на різних ділянках області визначення:

$$f(t) = \begin{cases} 0, t < t_0 = 0; \\ f_1, 0 \leq t < t_1; \\ f_2, t_1 \leq t < t_2; \\ \dots\dots\dots \\ f_{n-1}, t_{n-2} \leq t < t_{n-1}; \\ f_n, t \geq t_{n-1}. \end{cases}$$



За допомогою функції Хевісайда $f(t)$

записується так:

$$f(t) = f_1(t) \cdot \eta(t) + [f_2(t) - f_1(t)] \cdot \eta(t-t_1) + [f_3(t) - f_2(t)] \cdot \eta(t-t_2) + \dots + [f_n(t) - f_{n-1}(t)] \cdot \eta(t-t_{n-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} f_k(t) \cdot [\eta(t-t_{k-1}) - \eta(t-t_k)] + f_n(t) \cdot \eta(t-t_{n-1}), \text{ і теорема запізнення дозволяє}$$

отримувати зображення цієї функції.

7.3.4. Періодичні функції.

Нехай $f(t)$ – періодична при $t > 0$ функція з основним періодом, рівним T . Позначимо $f_1(t)$ функцію, що описує перший період функції $f(t)$:

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } 0 \leq t \leq T; \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и при } t \geq T. \end{cases}$$

Тепер $f(t) = f_1(t) \cdot \eta(t) + f_1(t-T) \cdot \eta(t-T) + f_1(t-2T) \cdot \eta(t-2T) + \dots + f_1(t-nT) \cdot \eta(t-nT) + \dots =$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} f_1(t-nT) \cdot \eta(t-nT)$ (кожен доданок описує відповідний період). Нехай

$$F_1(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot f_1(t) dt = \int_0^T e^{-pt} \cdot f_1(t) dt \quad - \quad \text{зображення функції } f_1(t). \quad \text{Тоді}$$

$$f(t) \rightarrow F_1(p) + F_1(p) \cdot e^{-pT} + F_1(p) \cdot e^{-2pT} + F_1(p) \cdot e^{-3pT} + \dots + F_1(p) \cdot e^{-npT} + \dots =$$

$$= F_1(p) \cdot (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + e^{-3pT} + \dots + e^{-npT} + \dots) = \frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT}}.$$

Знайдемо в якості прикладу зображення функції $\{t\}$ – дробової частини числа t . Ця функція визначається так: $\{t\} = t - n$ при $n \leq t < n+1$, n – ціле число. Для неї

$$f_1(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq 1; \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и при } t \geq 1, \end{cases} \quad \text{або} \quad f_1(t) = t \cdot [\eta(t) - \eta(t-1)] = t \cdot \eta(t) - (t-1) \cdot \eta(t-1) - 1 \cdot \eta(t-1),$$

$$\text{тому } F_1(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p} = \frac{1 - e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p}, \text{ і } F(p) = \frac{F_1(p)}{1 - e^{-p}} = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p(1 - e^{-p})}.$$

7.3.5. Інтегрування оригінала.

Якщо $f(t)$ – функція-оригінал, і $f(t) \rightarrow F(p)$, то $\int_0^t f(\tau) d\tau$ – теж функція-оригінал, і

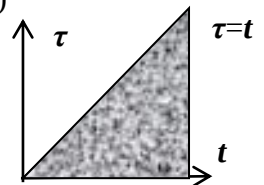
$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p}.$$

Доведення. $\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right) dt =$ (це повторний інтеграл, що обчислюється

по області $\{0 \leq t < +\infty, 0 \leq \tau \leq t\}$; змінюємо порядок інтегрування, це можна зробити, так як невласний подвійний інтеграл збіжний абсолютно)

$$\int_0^{+\infty} d\tau \int_{\tau}^{+\infty} e^{-pt} f(\tau) dt = \int_0^{+\infty} f(\tau) d\tau \int_{\tau}^{+\infty} e^{-pt} dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(\tau) d\tau \cdot \left. \frac{-e^{-pt}}{p} \right|_{\tau}^{+\infty} = \int_0^{+\infty} f(\tau) d\tau \cdot \frac{e^{-p\tau}}{p} = \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = \frac{F(p)}{p}.$$



7.3.6. Диференціювання оригінала.

Якщо функція-оригінал $f(t)$ має похідну $f'(t)$, що теж є оригіналом, і $f(t) \rightarrow F(p)$, то $f'(t) \rightarrow pF(p) - f(+0)$.

Доведення.
$$f'(t) \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot d f(t) = e^{-pt} \cdot f(t) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t) \cdot d e^{-pt} =$$

$$= -f(+0) + p \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot f(t) dt = pF(p) - f(+0).$$
 Пишемо тут $f(+0)$, а не $f(0)$, так як оригінал може мати розрив (першого роду) в точці $t = 0$.

Формула диференціювання оригінала може використовуватись неодноразово. Якщо функція-оригінал $f(t)$ має похідні $f'(t)$, $f''(t)$, $f'''(t)$, $f^{(4)}(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$, і всі вони теж є оригіналами, що мають зображення $F_1(p)$, $F_2(p)$, $F_3(p)$, ..., $F_n(p)$, то, як тільки що доведено, $f'(t) \rightarrow F_1(p) = pF(p) - f(+0)$.

Тоді
$$f''(t) \rightarrow F_2(p) = pF_1(p) - f'(+0) = p^2 F(p) - pf(+0) - f'(+0),$$

$$f'''(t) \rightarrow F_3(p) = pF_2(p) - f''(+0) = p^3 F(p) - p^2 f(+0) - pf'(+0) - f''(+0), \quad \dots,$$

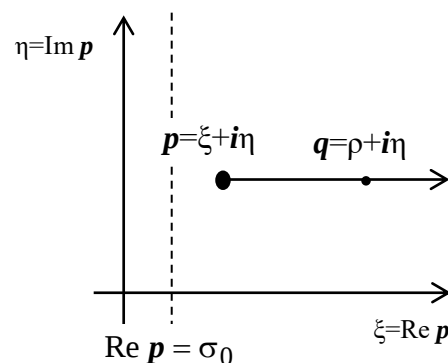
$$f^{(n)}(t) \rightarrow F_n(p) = p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - p^{n-3} f''(+0) - \dots - pf^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0).$$

7.3.7. Інтегрування зображення.

Нехай $f(t)$ – функція-оригінал, $f(t) \rightarrow F(p)$ і функція $\frac{f(t)}{t}$ обмежена в околі точки $t=0$. Тоді $\frac{f(t)}{t}$ теж є оригіналом і $\frac{f(t)}{t} \rightarrow \int_p^\infty F(q) dq$.

Доведення. Проінтегруємо рівність $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-qt} dt = F(q)$ по змінній $q = \rho + i\eta$ по горизонтальному променю, проведеному з точки $p = \xi + i\eta$, де $\xi \leq \rho = \operatorname{Re} q < +\infty$:

$$\begin{aligned} \int_p^\infty F(q) dq &= \int_p^\infty dq \int_0^{+\infty} f(t) e^{-qt} dt = \int_\xi^\infty d\rho \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(\rho+i\eta)t} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} dt \int_\xi^\infty f(t) e^{-(\rho+i\eta)t} d\rho = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-i\eta t} dt \int_\xi^\infty e^{-\rho t} d\rho = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-i\eta t} dt \cdot \left(-\frac{e^{-\rho t}}{t} \right) \Big|_\xi^{+\infty} = \int_0^{+\infty} f(t) \frac{e^{-\xi t}}{t} e^{-i\eta t} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-\xi t - i\eta t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-(\xi+i\eta)t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt \leftarrow \frac{f(t)}{t}. \end{aligned}$$



Знайти зображення інтегрального синуса $\operatorname{Si} t = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$.

$$\bullet \sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1} \Rightarrow \frac{\sin t}{t} \rightarrow \int_p^\infty \frac{dq}{q^2 + 1} = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{q}\right)\Big|_p^\infty = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow$$

$$\text{Si } t = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \rightarrow \frac{1}{p} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{p}\right).$$

 Знайти зображення функції $\int_0^t \frac{\cos \alpha \tau - \cos \beta \tau}{\tau} d\tau$.

$$\begin{aligned} \bullet \cos \alpha \tau - \cos \beta \tau &\rightarrow \frac{p}{p^2 + \alpha^2} - \frac{p}{p^2 + \beta^2} \Rightarrow \frac{\cos \alpha \tau - \cos \beta \tau}{\tau} \rightarrow \int_p^\infty \left(\frac{q}{q^2 + \alpha^2} - \frac{q}{q^2 + \beta^2} \right) dq = \\ &= \frac{1}{2} (\ln(q^2 + \alpha^2) - \ln(q^2 + \beta^2)) \Big|_p^\infty = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{q^2 + \alpha^2}{q^2 + \beta^2} \right) \Big|_p^\infty = -\frac{1}{2} \left(\ln \frac{p^2 + \alpha^2}{p^2 + \beta^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{p^2 + \beta^2}{p^2 + \alpha^2} \right) \Rightarrow \\ \int_0^t \frac{\cos \alpha \tau - \cos \beta \tau}{\tau} d\tau &= \frac{1}{2p} \left(\ln \frac{p^2 + \beta^2}{p^2 + \alpha^2} \right). \end{aligned}$$

7.3.8. Диференціювання зображення.

Якщо $f(t)$ – функція-оригінал, і $f(t) \rightarrow F(p)$, то $-t \cdot f(t) \rightarrow F'(p)$.

Доведення. $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot f(t) dt \leftarrow f(t)$. Диференціюючи це співвідношення по параметру p , отримаємо

$$F'(p) = \int_0^{+\infty} \frac{d(e^{-pt})}{dp} \cdot f(t) dt = \int_0^{+\infty} (-t) e^{-pt} \cdot f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot (-t \cdot f(t)) dt \leftarrow -t \cdot f(t).$$

З його допомогою отримуються зображення степеневих функцій:

$$1 \rightarrow \frac{1}{p} \Rightarrow -t \rightarrow \left(\frac{1}{p} \right)' = -\frac{1}{p^2}, \text{ або } t \rightarrow \frac{1}{p^2};$$

$$-t \cdot t \rightarrow \left(\frac{1}{p^2} \right)' = -\frac{2}{p^3}, \text{ або } t^2 \rightarrow \frac{2}{p^3},$$

$$-t \cdot t \rightarrow \left(\frac{1}{p^2} \right)' = -\frac{2}{p^3}, \text{ або } t^2 \rightarrow \frac{2}{p^3};$$

$$-t \cdot t^2 \rightarrow \left(\frac{2}{p^3} \right)' = -\frac{2 \cdot 3}{p^4}, \text{ або } t^3 \rightarrow \frac{3!}{p^4}, \text{ і } t^n \rightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

$$e^{\alpha t} \rightarrow \frac{1}{p - \alpha} \Rightarrow t \cdot e^{\alpha t} \rightarrow \left(\frac{1}{p - \alpha} \right)' = \frac{1}{(p - \alpha)^2},$$

$$t^2 \cdot e^{\alpha t} \rightarrow \left(\frac{1}{(p - \alpha)^2} \right)' = \frac{2}{(p - \alpha)^3}, \dots, t^n \cdot e^{\alpha t} \rightarrow \left(\frac{1}{(p - \alpha)^2} \right)' = \frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}.$$

$$\text{sh}t \dot{\rightarrow} \frac{1}{p^2-1} \Rightarrow t \cdot \text{sh}t \dot{\rightarrow} -\left(\frac{1}{p^2-1}\right)' = \frac{2p}{(p^2-1)^2}; t^2 \cdot \text{sh}t \dot{\rightarrow} -\left(\frac{2p}{(p^2-1)^2}\right)' = -\frac{2(3p^2+1)}{(p^2-1)^3}$$

7.4. Таблиця стандартних зображень.

Зведемо у таблицю отримані раніше зображення елементарних функцій.

	$f(t)$	$F(p)$			$f(t)$	$F(p)$
1.	1	$\frac{1}{p}$		9.	$e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2 + \beta^2}$
2.	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$		10.	$e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2 + \beta^2}$
3.	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$		11.	$e^{\alpha t} \cdot \operatorname{sh} \beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2 - \beta^2}$
4.	$e^{\alpha t} \cdot t^n$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$		12.	$e^{\alpha t} \cdot \operatorname{ch} \beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2 - \beta^2}$
5.	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$		13.	$t \cdot \sin \beta t$	$-\left(\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}\right)' = \frac{2p\beta}{(p^2 + \beta^2)^2}$
6.	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$		14.	$t \cdot \cos \beta t$	$-\left(\frac{p}{p^2 + \beta^2}\right)' = \frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}$
7.	$\operatorname{sh} \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$		15.	$t \cdot \operatorname{sh} \beta t$	$-\left(\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}\right)' = \frac{2p\beta}{(p^2 - \beta^2)^2}$
8.	$\operatorname{ch} \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$		16.	$t \cdot \operatorname{ch} \beta t$	$-\left(\frac{p}{p^2 - \beta^2}\right)' = \frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 - \beta^2)^2}$

Вправи для самостійного розв'язування.

Знайти початкову функцію, зображення якої:

$$F(p) = \frac{5}{p^2 + 4} + \frac{20p}{p^2 + 9}$$

$$F(p) = \frac{7}{p^2 + 2p + 10}$$

$$F(p) = \frac{7}{p^2 + 10p + 41}$$

8.1. Основні поняття.

Означення. Подією називається факт, який може відбутися або не відбутися в результаті дослідів.

При цьому той чи інший результат дослідів може бути отриманий з різним ступенем можливості. Тобто в деяких випадках можна сказати, що одна подія відбудеться практично завжди, інша – практично ніколи.

Події також мають особливості по відношенню однієї до іншої, тобто в одному випадку подія A може відбутись сумісно з подією B , в іншому – ні.

Означення. Події називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу інших.

Класичним прикладом несумісних подій є результат підкидання монети – випадання лицьової сторони монети виключає випадання зворотної сторони (в одному і тому ж досліді).

Означення. Повною групою подій називається сукупність усіх можливих результатів дослідів.

Означення. Достовірною подією називається подія, яка відбудеться в результаті дослідів. Подія називається *неможливою*, якщо воно ніколи не відбудеться у результаті дослідів.

Наприклад, якщо з коробки, що містить лише червоні і зелені кульки, навмання виймають одну кульку, то поява серед вийнятих кульок білої – неможлива. Поява червоної і поява зеленої кульок утворюють повну групу подій.

Означення. Події називають *рівноможливими*, якщо немає підстав вважати, що одна з них з'явиться в результаті дослідів з більшою ймовірністю.

У наведеному прикладі поява червоної і зеленої кульок – рівноможливі події, якщо у коробці знаходиться однакова кількість червоних і зелених кульок.

Якщо ж у коробці червоних кульок більше, ніж зелених, то поява зеленої кульки – подія менш імовірна, ніж поява червоної.

Виходячи з цих загальних понять можна дати означення ймовірності.

Означення. Ймовірністю події A називається математична оцінка можливості появи цієї події у результаті дослідів. Ймовірність події A рівна відношенню кількості сприятливих подій результатів дослідів до загальної кількості попарно несумісних результатів дослідів, що утворюють повну групу подій:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (8.1)$$

Результат випробування є сприятливим події A , якщо поява в досліді цього результату тягне за собою появу події A .

Очевидно, що ймовірність достовірної події рівна одиниці, а ймовірність неможливої – рівна нулю. Таким чином, значення ймовірності будь-якої події – є додатне число, що міститься між нулем і одиницею:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$



У коробці знаходяться 10 кульок. 3 з них червоні, 2 – зелені, інші білі. Знайти ймовірність того, що вийнята навмання кулька буде червоною, зеленою або білою.

• Поява червоної, зеленої і білої кульок складають повну групу подій. Позначимо появу червоної кульки – подія A , поява зеленої – подія B , поява білої – подія C .

У відповідності до вищевказаних формул, отримаємо:

$$P(A) = \frac{3}{10}; \quad P(B) = \frac{2}{10}; \quad P(C) = \frac{5}{10}.$$

Відмітимо, що ймовірність настання однієї з двох попано несумісних подій рівна сумі ймовірностей цих подій.

Означення. Відносною частотою події A називається відношення кількості дослідів, у результаті яких відбулась подія A , до загальної кількості дослідів.

Відмінність відносної частоти від ймовірності полягає в тому, що ймовірність обчислюється без безпосереднього добутку дослідів, а відносна частота – після досліду.

Так в розглянутому вище прикладі, якщо з коробки навмання вилучено 5 кульок і 2 з них виявилися червоними, то відносна частота появи червоної кульки дорівнює :

$$W(A) = \frac{2}{5}.$$

Як видно, ця величина не збігається зі знайденою ймовірністю.

При досить великій кількості проведених дослідів відносна частота змінюється мало, коливаючись близько одного числа. Це число може бути прийнято за ймовірність події.

Взагалі кажучи, класичне визначення ймовірності – досить відносне. Це обумовлено тим, що на практиці складно уявити результат досліду у вигляді сукупності елементарних подій, довести, що події рівноімовірні.

Наприклад, при проведенні досліду з підкиданням монети на результат досліду можуть впливати такі фактори як несиметричність монети, вплив її форми на аеродинамічні характеристики польоту, атмосферні умови і т.і.

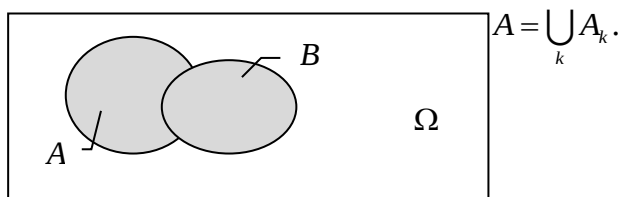
Класичне визначення ймовірності не застосовується до випробувань з нескінченним числом результатів. Щоб подолати цей недолік вводиться поняття *геометричної ймовірності*, тобто ймовірності попадання точки в будь-який відрізок або частину площини (простору).

Так, якщо на відрізку довжиною L виділений відрізок довжини l , то ймовірність попадання навмання взятої точки у відрізок l дорівнює відношенню l/L .

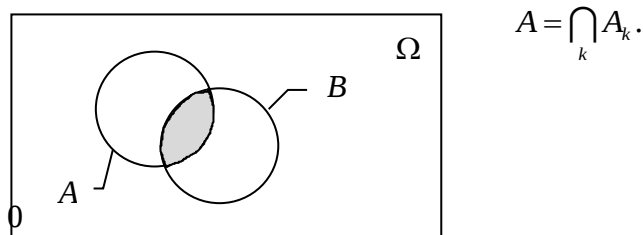
8.2. Операції над подіями.

Означення. Події A і B називаються *рівними*, якщо здійснення події A тягне за собою здійснення події B , і навпаки.

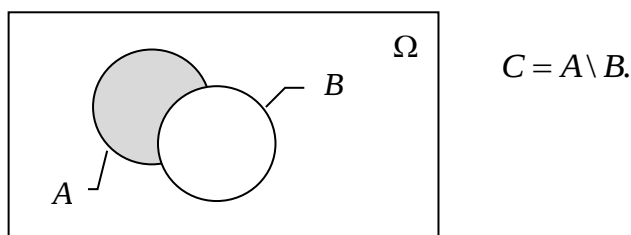
Означення. Об'єднанням або сумою подій A_k називається подія A , яке означає появу хоча б однієї з подій A_k .



Означення. Перетином або добутком подій A_k називається подія A , яка полягає у здійсненні усіх подій A_k :



Означення. Різницею подій A і B називається подія C , яка означає, що відбудеться подія A , але не відбувається подія B :



Означення. Додатковою до події A називається подія $\bar{A}$, яка означає, що подія A не відбувається.

Означення. Елементарними результатами випробування називаються такі результати випробування, які взаємно виключають одне одного і в результаті випробування відбувається одна з цих подій.

Сукупність усіх елементарних результатів випробування називається *простором елементарних подій*.

Теорема (додавання імовірностей). Імовірність суми двох несумісних подій рівна сумі імовірностей цих подій:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (8.2)$$

Наслідок. Якщо події $A_1, A_2, \dots, A_n$ утворюють повну групу несумісних подій, то сума їх імовірностей рівна одиниці:

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1.$$

Означення. Протилежними називаються дві несумісні події, які утворюють повну групу.

Теорема. Імовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій рівна сумі імовірностей цих подій без імовірності їх сумісної появи:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (8.3)$$

Наслідок. Сума імовірностей протилежних подій рівна одиниці:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Означення. Подія A називається незалежною від події B , якщо імовірність події A не залежить від того, відбулась подія B чи ні. Подія A називається залежною від події B , якщо імовірність події A змінюється в залежності від того, відбулась подія B чи ні.

Означення. Імовірність події B , обчислена при умові, що мала місце подія A , називається умовною імовірністю події B :

$$P_A(B) = P(B / A) = P(AB) / P(A).$$

Теорема (множення імовірностей). Імовірність добутку двох подій (сумісної їх появи) рівна добутку імовірності однієї з них на умовну імовірність і другої, обчислену при умові, що перша подія уже настала:

$$P(AB) = P(A)P(B / A) = P(A)P_A(B).$$

Також можна записати: $P(AB) = P(A)P(B / A) = P(B)P(A / B) = P(B)P_B(A)$.

Доведення цієї теореми безпосередньо випливає з означення умовної імовірності.

Якщо події незалежні, то $P(B / A) = P(B)$, і теорема множення імовірностей матиме вигляд:

$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (8.4)$$

У разі добутку кількох залежних подій ймовірність дорівнює добутку одного з них на умовні ймовірності всіх інших за умови, що ймовірність кожного наступного обчислюється в припущенні, що всі інші події вже відбулися.

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 A_2) \dots P(A_n / A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

З теореми добутку ймовірностей можна зробити висновок про ймовірність появи хоча б однієї події.

Якщо в результаті випробування може з'явитися n подій, незалежних в сукупності, то ймовірність появи хоча б однієї з них дорівнює:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n.$$

Тут подія A означає настання хоча б однієї з подій A_i , а q_i – імовірність протилежних подій $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$.



З повної колоди карт (52 шт.) одночасно дістають чотири карти. Знайти імовірність того, що серед цих чотирьох карт буде хоча б одна бубнова або чирвова карта.

• Позначимо появу хоча б однієї бубнової карти – подія A , поява хоча б однієї чирвової карти – подія B . Таким чином, потрібно визначити імовірність події $C = A + B$.

Крім того, події A і B – сумісні, тобто поява однієї з них не виключає появи іншої.

Всього в колоді 13 чирвових і 13 бубнових карт.

При витягування першої карти імовірність того, що не з'явиться ні чирвова ні бубнова карта рівна $\frac{26}{52}$, при витягуванні другої карти – $\frac{25}{51}$, третьої – $\frac{24}{50}$, четвертої – $\frac{23}{49}$.

Тоді імовірність того, що серед вийнятих карт не буде ні бубнових, ні чирвових рівна $P(\bar{C}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49}$.

Тоді $P(C) = 1 - P(\bar{C}) \approx 0,945$.



Чому рівна імовірність того, при підкиданні трьох гральних кісток 6 очок з'явиться хоча б на одній з кісток?

- Імовірність випадання 6 очок при одному кидку рівна $\frac{1}{6}$. Імовірність того, що не випаде 6 очок – $\frac{5}{6}$. Ймовірність того, що при кидку трьох кісток не випаде жодного разу 6 очок рівна $p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.

Тоді імовірність того, що хоча б один раз випаде 6 очок рівна $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.



У барабані револьвера знаходяться 4 патрони з шести у довільному порядку. Барабан розкручують, після чого натискають на спусковий гачок двічі. Знайти ймовірності хоча б одного пострілу; двох пострілів; двох осічок.

- Імовірність пострілу при першому натисканні на курок (подія A) рівна $P(A) = \frac{4}{6}$, імовірність осічки – $P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$. Ймовірність пострілу при другому натисканні на курок залежить від результату першого натискання.

Так, якщо у першому випадку відбувся постріл, то у барабані залишилось лише 3 патрони, причому вони розподілені по 5 гніздам, так як при другому натисканні на курок навпроти ствола не може опинитися гніздо, у якому був патрон при першому натисканні на курок.

Умовна ймовірність пострілу при другій спробі – $P(B/A) = \frac{3}{5}$, якщо першого разу був постріл, $P(B/\bar{A}) = \frac{4}{5}$ – якщо першого разу була осічка.

Умовна ймовірність осічки другого разу – $P(\bar{B}/A) = \frac{2}{5}$, якщо першого разу був постріл, $P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{1}{5}$ – якщо першого разу була осічка.

Розглянемо імовірності того, що у другому випадку буде постріл (подія B) або відбудеться осічка (подія $\bar{B}$) при умові, що першого разу був постріл (подія A) або осічка (подія $\bar{A}$).

$P(B) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = 0,4$ – два постріли поспіль;

$$P(B) = P(\bar{A})P(B/\bar{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} \approx 0,267 \text{ – перша осічка, другий постріл;}$$

$$P(\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \approx 0,267 \text{ – перший постріл, друга осічка;}$$

$$P(\bar{\bar{B}}) = P(\bar{A})P(\bar{\bar{B}}/\bar{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \approx 0,067 \text{ – дві осічки поспіль.}$$

Ці чотири випадки утворюють повну групу подій (сума їх імовірностей рівна одиниці).

Аналізуючи отримані результати, бачимо, що імовірність хоча б одного пострілу рівна сумі $P_1 = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{14}{15} \approx 0,933$.

Тепер розглянемо інший випадок. Представимо, що після першого натискання на курок барабан розкрутили і знову натиснули на курок.

Ймовірності першого пострілу і першої осічки не змінилися – $P(A) = \frac{4}{6}$, $P(\bar{A}) = \frac{2}{6}$.

Умовні імовірності другого пострілу і осічки обчислюються з умови, що навпроти ствола може опинитись те ж гніздо, що й першого разу.

Умовна імовірність пострілу при другій спробі – $P(B/A) = \frac{3}{6}$, якщо першого разу був постріл, $P(B/\bar{A}) = \frac{4}{6}$ – якщо першого разу була осічка.

Умовна імовірність осічки другого разу – $P(\bar{B}/A) = \frac{3}{6}$, якщо першого разу був постріл, $P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{2}{6}$ – якщо була осічка.

Тоді:

$$P(B) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{9} \approx 0,333 \text{ – два постріли поспіль;}$$

$$P(B) = P(\bar{A})P(B/\bar{A}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{9} \approx 0,222 \text{ – перша осічка, другий постріл;}$$

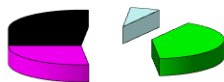
$$P(\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{9} \approx 0,333 \text{ – перший постріл, друга осічка;}$$

$$P(\bar{\bar{B}}) = P(\bar{A})P(\bar{\bar{B}}/\bar{A}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9} \approx 0,111 \text{ – дві осічки поспіль.}$$

В цьому випадку імовірність того, що відбудеться хоча б один постріл, рівна:

$$P_2 = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9} \approx 0,889.$$

Нижче показані діаграми імовірностей для першого і другого випадків.



■ 2 вистрела
■ осечка -
вистрел
■ вистрел -
осечка
□ 2 осечки



■ 2 вистрела
■ осечка -
вистрел
■ вистрел -
осечка
□ 2 осечки



Два стрілки стріляють по мішені. Імовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрілка рівна 0,7, а для другого – 0,8. Знайти імовірність того, що при одном залпі в мішень влучить тільки один із стрілків.

• Позначимо попадання в ціль першим стрілком – подія A , другим – подія B , промах першого стрілка – подія $\bar{A}$, промах другого – подія $\bar{B}$.

$$P(A) = 0,7; \quad P(\bar{A}) = 0,3; \quad P(B) = 0,8; \quad P(\bar{B}) = 0,2.$$

Імовірність того, що перший стрілок влучить у мішень, а другий – ні, рівна:

$$P(A)P(\bar{B}) = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14.$$

Імовірність того, що другий стрілок влучить у мішень, а перший – ні, рівна:

$$P(\bar{A})P(B) = 0,3 \cdot 0,8 = 0,24.$$

Тоді імовірність влучення в ціль лише одним стрілком рівна:

$$P = 0,14 + 0,24 = 0,38.$$

Той же результат можна отримати іншим способом: знаходимо імовірності того, що обидва стрілки влучили в ціль і обидва промахнулись. Ці імовірності відповідно рівні:

$$P(A)P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56; \quad P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06.$$

Тоді імовірності того, що в ціль влучить лише один стрілок, рівна:

$$P = 1 - 0,56 - 0,06 = 0,38.$$



Імовірність того, що навантаження узята деталь з деякої партії деталей буде бракованою, рівна 0,2. Знайти імовірність того, що з трьох узятих деталей 2 виявляться не бракованими.

• Позначимо браковану деталь – подія A , не браковану – подія $\bar{A}$.

$$P(A) = 0,2; \quad P(\bar{A}) = 0,8.$$

Якщо серед трьох деталей буде тільки одна бракована, то це можливо в одному з трьох випадків: бракована деталь буде першою, другою або третьою.

$$P = P(A)P(\bar{A})P(\bar{A}) + P(\bar{A})P(A)P(\bar{A}) + P(\bar{A})P(\bar{A})P(A);$$

$$P = 3 \cdot 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,384.$$



Імовірності того, що потрібна деталь знаходиться у першому, другому, третьому або четвертому ящику. Знайти імовірності того, що ця деталь знаходиться: а) не більш, ніж у трьох ящиках; б) не менш, ніж у двох ящиках.

• а) Імовірність того, що дана деталь знаходиться у всіх чотирьох ящиках, рівна:

$$P = P_1 P_2 P_3 P_4 = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,3024.$$

Імовірність того, що потрібна деталь знаходиться не більш, ніж у трьох ящиках, рівна імовірності того, що вона не знаходиться в усіх чотирьох ящиках:

$$P(A) = 1 - P = 1 - 0,3024 = 0,6976.$$

б) Імовірність того, що потрібна деталь знаходиться не менш, ніж у двох ящиках, складається з імовірностей того, що деталь знаходиться тільки у двох ящиках, тільки у трьох ящиках, тільки у чотирьох ящиках. Звичайно, ці ймовірності можна порахувати, а потім додати, поднак, простіше зробити інакше. Та ж імовірність рівна імовірності того, що деталь не знаходиться лише в одному ящику і мається взагалі.

Імовірність того, що деталь знаходиться тільки в одному ящику, рівна:

$$P = P_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 P_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 P_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 P_4;$$

$$P = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = \\ = 0,0036 + 0,0056 + 0,0096 + 0,0216 = 0,0404.$$

$$Q = 1 - 0,0404 = 0,9596.$$

Імовірність того, що потрібної деталі немає в жодному ящику, рівна:

$$P_0 = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,0024;$$

$$Q_0 = 1 - 0,0024 = 0,9976.$$

Шукана імовірність рівна: $P(B) = Q \cdot Q_0 = 0,9596 \cdot 0,9976 = 0,9573$.

8.3. Формула повної імовірності.

Нехай деяка подія A може відбутися з однією з несумісних подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, які складають повну групу подій. Нехай відомі імовірності цих подій $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ та умовні імовірності настання події A при настанні події H_i $P(A/H_1), P(A/H_2), \dots, P(A/H_n)$.

Теорема. Імовірність події A , яка може відбутися разом з однією з подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, рівна сумі парних добутків імовірностей кожної з цих подій на відповідні їм умовні імовірності настання події A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P(A/H_i) \quad (8.5)$$

Доведення. Так як події $H_1, H_2, \dots, H_n$ утворюють повну групу подій, то подію A можна представити у вигляді суми:

$$A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n = \sum_{i=1}^n AH_i.$$

Так як події $H_1, H_2, \dots, H_n$ несумісні, то і події AH_i теж несумісні. Тоді можна використати теорему про додавання несумісних подій:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(AH_i).$$

При цьому $P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i)$.

У результаті отримаємо: $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)$.

Теорему доведено.



Один з трьох стрільків робить два постріли. Імовірність влучення в ціль при

одному пострілі для першого стрілка рівна 0,4, для другого – 0,6, для третього – 0,8. Знайти імовірність того, що в ціль влучать двічі.

- Імовірність того, що постріли робить перший, другий або третій стрілок рівна $\frac{1}{3}$.

Імовірності того, що один із стрілків двічі влучить в ціль, рівні:

– для першого стрілка: $p_1^2 = 0,4^2 = 0,16$;

– для другого стрілка: $p_2^2 = 0,6^2 = 0,36$;

– для третього стрілка: $p_3^2 = 0,8^2 = 0,64$.

Шукана імовірність рівна:

$$p = \frac{1}{3} p_1^2 + \frac{1}{3} p_2^2 + \frac{1}{3} p_3^2 = \frac{1}{3} (0,16 + 0,36 + 0,64) = \frac{29}{75}.$$

8.4. Формула Байєса (формула гіпотез).

Нехай маємо повна група несумісних гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$ з відомими ймовірностями їх настання $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$. Нехай у результаті дослідження настала подія A , умовні імовірності якої по кожній з гіпотез відомі, тобто відомі імовірності $P(A/H_1), P(A/H_2), \dots, P(A/H_n)$.

Потрібно визначити, які імовірності мають гіпотези $H_1, H_2, \dots, H_n$ відносно події A , тобто умовні імовірності $P(H_i/A)$.

Теорема. Імовірність гіпотези після випробування рівна добутку імовірності гіпотези до випробування на відповідну їй умовну імовірність події, яка відбулася при випробуванні, поділену на повну імовірність цієї події:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)} \quad (8.6)$$

Ця формула називається *формулою Байєса*.

Доведення. По Теоремі множення імовірностей маємо:

$$P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i).$$

Тоді, якщо $P(A) \neq 0$,
$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}.$$

Для знаходження імовірності $P(A)$ використаємо формулу повної імовірності:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i).$$

Якщо до випробування усі гіпотези рівноімовірні з імовірністю $P(H_i) = p$, то формула Байєса матиме вигляд::

$$P(H_i / A) = \frac{P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^n P(A / H_i)}.$$

8.5. Повторення випробувань. Формула Бернуллі.

Якщо проводиться кілька випробувань, в результаті яких може відбутися або не відбутися подія A , і ймовірність появи цієї події в кожному з випробувань не залежить від результатів інших випробувань, то такі випробування називаються *незалежними* відносно події A .

Припустимо, що подія A настає в кожному випробуванні з ймовірністю $P(A)=p$. Визначимо ймовірність $P_{m,n}$ того, що в результаті n випробувань подія A настала рівно m разів.

Цю ймовірність можна порахувати, використовуючи теореми додавання і множення ймовірностей, як це робилося у розглянутих вище прикладах. Однак, при досить великій кількості випробувань це призводить до дуже великих обчислень. Таким чином, виникає необхідність розробити спільний підхід до вирішення поставленого завдання. Цей підхід реалізований у *формулі Бернуллі* (Якоб Бернуллі (1654–1705) – швейцарський математик).

Нехай у результаті n незалежних випробувань, проведених в однакових умовах, подія A настає з ймовірністю $P(A)=p$, а протилежна йому подія $\bar{A}$ з ймовірністю $P(\bar{A})=1-p$.

Позначимо A_i – настання події A у випробуванні з номером i . Оскільки умови проведення випробувань однакові, то ці ймовірності рівні.

Якщо в результаті n дослідів подія A настає рівно m разів, то інші $n-m$ раз ця подія не настає. Подія A може з'явитися m раз в n випробуваннях в різних комбінаціях, число яких дорівнює кількості сполучень з n елементів по m . Ця *кількість сполучень* знаходиться за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (8.7)$$

Ймовірність кожної комбінації дорівнює добутку ймовірностей: $p^m (1-p)^{n-m}$.

Застосовуючи теорему додавання ймовірностей несумісних подій, отримуємо *формулу Бернуллі*:

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}. \quad (8.7)$$

Формула Бернуллі важлива тим, що справедлива для будь-якої кількості незалежних випробувань, тобто того самого випадку, в якому найбільш чітко проявляються закони теорії ймовірностей.



По цілі проводиться 5 пострілів. Ймовірність влучення для кожного пострілу дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що в ціль влучили не менше трьох разів.

- Ймовірність не менше трьох влучень складається з ймовірності п'яти влучень, чотирьох влучень і трьох влучень. Оскільки постріли незалежні, то можна застосувати

формулу Бернуллі ймовірності того, що в m випробуваннях подія в ймовірністю p настає рівно n раз.

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}.$$

У разі п'яти влучень з п'яти можливих: $P_{5,5} = p^5 = 0,4^5 = 0,01024$

Чотири влучення з п'яти пострілів: $P_{4,5} = \frac{5!}{4!1!} p^4 (1-p) = 0,0768$.

Три влучення з п'яти: $P_{3,5} = \frac{5!}{3!2!} p^3 (1-p)^2 = 0,2304$.

Остаточно, отримуємо ймовірність не менше трьох влучень з п'яти пострілів:

$$P = 0,01204 + 0,0768 + 0,2304 = 0,31744$$

8.6. Випадкові величини.

Вище розглядалися випадкові події, які є якісною характеристикою випадкового результату досліду. Для отримання кількісної характеристики вводиться поняття випадкової величини.

Означення. *Випадковою величиною* називається величина, яка в результаті досліду може приймати те чи інше значення, причому заздалегідь відомо яке саме.

Випадкові величини можна розділити на дві категорії.

Означення. *Дискретною випадковою величиною* називається така величина, яка в результаті досліду може приймати певні значення з певною ймовірністю, що утворюють нумеровану множину.

Ця множина може бути як скінченною, так і нескінченною.

Наприклад, кількість пострілів до першого влучання в ціль є дискретною випадковою величиною, тому що ця величина може приймати і нескінченне, хоча і обраховану кількість значень.

Означення. *Неперервною випадковою величиною* називається така величина, яка може приймати будь-які значення з деякого скінченного або нескінченного проміжку.

Очевидно, що число можливих значень неперервної випадкової величини нескінченне.

Для задання випадкової величини недостатньо просто вказати її значення, необхідно також вказати ймовірність цього значення.

8.7. Закон розподілу дискретної випадкової величини.

Означення. Співвідношення між можливими значеннями випадкової величини та їх ймовірностями називається *законом розподілу дискретної випадкової величини*.

Закон розподілу може бути заданий аналітично, у вигляді таблиці або графічно.

Таблиця відповідностей значень випадкової величини та їх імовірностей називається *рядом розподілу*.

Графічне представлення цієї таблиці називається *многокутником розподілу*.

При цьому сума усіх ординат многокутника розподілу представляє собою ймовірність усіх можливих значень випадкової величини, а, отже, рівна одиниці.



По цілі проводиться 5 пострілів. Імовірність влучення для кожного пострілу рівна 0,4. Знайти імовірність числа влучень і побудувати многокутник розподілу.

• Імовірності п'яти влучень з п'яти можливих, чотирьох з п'яти і трьох з п'яти були знайдені вище по формулі Бернуллі і рівні відповідно:

$$P_{5,5} = 0,01024, \quad P_{4,5} = 0,0768, \quad P_{3,5} = 0,2304.$$

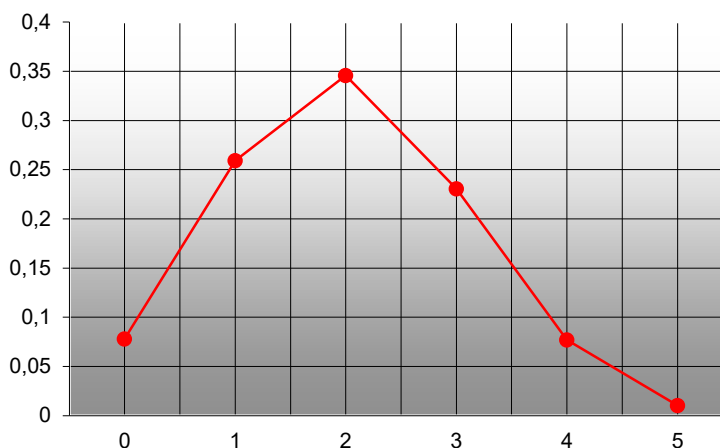
Аналогічно знайдемо:

$$P_{2,5} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} 0,4^2 \cdot 0,6^3 = 0,3456$$

$$P_{1,5} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} 0,4^1 \cdot 0,6^4 = 0,2592$$

$$P_{0,5} = \frac{5!}{0! \cdot 5!} 0,4^0 \cdot 0,6^5 = 0,6^5 = 0,0778.$$

Представимо графічно залежність числа влучень від їх імовірностей.



При побудові многокутника розподілу потрібно пам'ятати, що з'єднання отриманих точок носить умовний характер. У проміжках між значеннями випадкової величини імовірність не приймає ніякого значення. Точки є'єднані лише для наочності.



Імовірність хоча б одного влучення у мішень стрільком при трьох пострілах рівна 0,875. Знайти імовірність влучення в мішень при одному пострілі.

• Якщо позначити p – імовірність влучання стрільком у мішень при одному пострілі, то імовірність промаху при одному пострілі рівна $(1 - p)$.

Імовірність трьох промахів з трьох пострілів рівна $(1 - p)^3$. Ця імовірність рівна $1 - 0,875 = 0,125$, тобто в цілі не влучають жодного разу.

$$\text{Отримаємо: } (1 - p)^3 = 0,125; \quad 1 - p = 0,5; \quad p = 0,5.$$



У першій коробці 10 кульок, з них 8 білих; у другій коробці 20 кульок, з них 4 білі. З кожної коробки навмання дістали по одній кульці, а потім з цих двох кульок вибирають одну. Знайти імовірність того, що ця кулька біла.

• Імовірність того, що узята з першої коробки кулька біла – $P_1(B) = 0,8$, що не біла – $P_1(HB) = 0,2$.

Імовірність того, що узята з другої коробки кулька біла – $P_2(B) = 0,2$, що не біла – $P_2(HB) = 0,8$.

Імовірність того, що повторно вибрана кулька, вийнята з першої коробки і імовірність того, що повторно вибрана кулька, вийнята з другої коробки, рівні 0,5.

Імовірність того, що повторно вибрана кулька, вийнята з першої коробки і вона біла – $p_1 = 0,5 \cdot P_1(B) = 0,5 \cdot 0,8 = 0,4$.

Імовірність того, що повторно вибрана кулька, вийнята з другої коробки і вона біла – $p_2 = 0,5 \cdot P_2(B) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$.

Імовірність того, що повторно буде вибрана біла кулька, рівна

$$P = p_1 + p_2 = 0,4 + 0,1 = 0,5.$$

 Є п'ять гвинтівок, три з яких – з оптичним прицілом. Імовірність того, що стрілок влучить у ціль при вистрілі з гвинтівки з «оптикою», рівна 0,95, для гвинтівки без «оптики» ця імовірність рівна 0,7. Знайти імовірність того, що у ціль буде влучено, якщо стрілок зробить один постріл з будь-якої рушниці.

• Імовірність того, що вибрана гвинтівка з оптичним прицілом, позначимо $P_0 = \frac{3}{5}$, а імовірність того, що вибрана гвинтівка без оптичного прицілу, позначимо $P_{BO} = \frac{2}{5}$.

Імовірність, що вибрали гвинтівку з «оптикою», і при цьому у ціль було влучено $P_1 = P_0 \cdot P(\text{ПЦ} / O)$, де $P(\text{ПЦ} / O)$ – імовірність влучення у ціль з гвинтівки з «оптикою».

Аналогічно, імовірність, що вибрали гвинтівку без «оптики», і при цьому у ціль було влучено $P_1 = P_{BO} \cdot P(\text{ПЦ} / BO)$, де $P(\text{ПЦ} / BO)$ – імовірність влучення у ціль з гвинтівки без «оптики».

Імовірність влучення у ціль рівна сумі імовірностей P_1 і P_2 , так як для влучення достатньо, щоб відбулась одна з цих несумісних подій:

$$P = P_1 + P_2 = 0,95 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,4 = 0,57 + 0,28 = 0,85.$$

 Три мисливці одночасно вистрілили по ведмедю, який був убитий однією кулею. Визначити імовірність того, що ведмідь був убитий першим стрілком, якщо імовірності влучень для цих стрілків рівні відповідно 0,3, 0,4, 0,5.

• У цій задачі потрібно визначити імовірність гіпотези уже після того, як подія відбулася. Для визначення шуканої імовірності скористаємось формулою Байєса:

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A / H_1)}{P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2) + P(H_3)P(A / H_3)}.$$

У цій формулі H_1, H_2, H_3 – гіпотези, що ведмедя уб'є перший, другий і третій стрілок відповідно. До пострілів ці гіпотези рівноймовірні і їх імовірність рівна $\frac{1}{3}$.

$P(H_1/A)$ – імовірність того, що ведмедя убив перший стрілок при умові, що постріли відбулися (подія A).

Імовірності того, що ведмедя уб'є перший, другий або третій стрілок, обчислені до пострілів, рівні відповідно:

$$P(A/H_1) = p_1 q_2 q_3 = 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,09;$$

$$P(A/H_2) = q_1 p_2 q_3 = 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,14;$$

$$P(A/H_3) = q_1 q_2 p_3 = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,21.$$

Тут $q_1=0,7$; $q_2=0,6$; $q_3=0,5$ – імовірності промаху для кожного з стрілків, розраховані як $q=1-p$, де p – імовірності влучень для кожного стрілка.

Підставимо ці значення у формулу Байєса:

$$P(H_1/A) = \frac{0,09}{0,44} = \frac{9}{44}.$$

 Послідовно послано чотири радіосигнали. Імовірності прийому кожного з них не залежать від того, прийняті інші сигнали чи ні. Імовірності прийому сигналів рівні відповідно 0,2, 0,3, 0,4, 0,5. Визначити імовірність прийому трьох радіосигналів.

- Подія прийому трьох сигналів з чотирьох можлива у чотирьох випадках:

$$P_A = p_1 p_2 p_3 q_4 = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,012;$$

$$P_B = p_1 p_2 q_3 p_4 = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,018;$$

$$P_C = p_1 q_2 p_3 p_4 = 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,028;$$

$$P_D = q_1 p_2 p_3 p_4 = 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,048.$$

Для прийому трьох сигналів необхідно здійснення однієї з подій A , B , C або D . Таким чином, знаходимо шукану імовірність:

$$P = 0,012 + 0,018 + 0,028 + 0,048 = 0,106.$$

 Двадцять екзаменаційних білетів містять по 2 питання, які не повторюються. Курсант знає відповіді лише на 35 питань. Визначити імовірність того, що екзамен буде зданий, якщо для цього достатньо відповісти на два питання одного білета або на одне питання з одного білета і на вказане додаткове питання з іншого білета.

- Загалом є 40 питань. Імовірність того, що випаде питання, на яке відповідь відома, рівна $\frac{35}{40}$.

Для того, щоб здати іспит, потрібно, щоб відбулась одна з трьох подій:

- 1) Подія A – відповіли на перше питання (імовірність $\frac{35}{40}$) і відповіли на друге питання (імовірність $\frac{34}{39}$), так як після успішної відповіді на перше питання залишиться ще 39 питань, на 34 з яких відомі відповіді.

$$P(A) = \frac{35}{40} \cdot \frac{34}{39} = 0,7628.$$

- 2) Подія B – на перше питання відповіли (імовірність $\frac{35}{40}$), на друге – ні (імовірність $\frac{5}{39}$), на третє – відповіли (імовірність $\frac{34}{38}$):

$$P(B) = \frac{35}{40} \cdot \frac{5}{39} \cdot \frac{34}{38} = 0,1004.$$

3) Подія C – на перше питання не відповіли (імовірність $\frac{5}{40}$), на друге – відповіли (імовірність $\frac{35}{39}$), на третє – відповіли (імовірність $\frac{34}{38}$):

$$P(C) = \frac{5}{40} \cdot \frac{35}{39} \cdot \frac{34}{38} = 0,1004.$$

Імовірність того, що при заданих умовах екзамен буде зданий, рівна:

$$P = P(A) + P(B) + P(C) = 0,9636.$$



Є дві партії однорідних деталей. Перша партія складається з 12 деталей, 3 з яких – браковані. Друга партія складається з 15 деталей, 4 з яких – браковані. З кожної партії дістають по 2 деталі. Яка імовірність, що серед них немає бракованих деталей.

- Імовірність опинитись не бракованою для першої деталі з першої партії рівна $p_1 = \frac{9}{12}$, для другої деталі з першої партії при умові, що перша деталь була не бракована, – $p_2 = \frac{8}{11}$.

Імовірність опинитись не бракованою для першої деталі з другої партії рівна $p_3 = \frac{11}{15}$, для другої деталі з другої партії при умові, що перша деталь була не бракована, – $p_4 = \frac{10}{14}$.

Імовірність того, що серед чотирьох вибраних деталей немає бракованих, рівна:

$$P = \frac{9 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 10}{12 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 14} = 0,2857.$$

Розглянемо той же приклад, але з іншою умовою.



Є дві партії однорідних деталей. Перша партія складається з 12 деталей, 3 з яких – браковані. Друга партія складається з 15 деталей, 4 з яких – браковані. З першої партії дістають 5 деталей, з другої – 7 деталей. Ці деталі утворюють нову партію. Яка імовірність дістати з них браковану деталь?

- Для того, щоб вибрана деталь була б бракованою, необхідне виконання однієї з двох несумісних умов:

1) Вибрана деталь була з першої партії (імовірність – $\frac{5}{12}$) і при цьому вона бракована (імовірність – $\frac{3}{12}$). Отже: $p_1 = \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{12} = 0,1041$;

2) Вибрана деталь була з другої партії (імовірність – $\frac{7}{12}$) і при цьому вона – бракована (імовірність – $\frac{4}{15}$). Отже: $p_2 = \frac{7}{12} \cdot \frac{4}{15} = 0,1556$.

Отже, маємо: $p = p_1 + p_2 = 0,2597$.

 В ящику 3 білих і 5 чорних кульок. З ящика виймають дві кульки. Знайти імовірність того, що ці кульки різного кольору.

• Подія, що полягає в тому, що вибрані кульки різного кольору, відбудеться у одному з двох випадків:

1) перша кулька біла (імовірність $-\frac{3}{8}$), а друга – чорна (імовірність $-\frac{5}{7}$);

2) перша кулька чорна (імовірність $-\frac{5}{8}$), а друга – біла (імовірність $-\frac{3}{7}$).

Отже, отримаємо: $p = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{28}$.

8.8. Біноміальний розподіл.

Якщо проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може з'явитись з однаковою імовірністю p у кожному з випробувань, то імовірність того, що подія не з'явиться, рівна $q=1-p$.

Прийmemo число появ подій у кожному випробуванні за деяку випадкову величину X . Щоб знайти закон розподілу цієї випадкової величини, необхідно визначити значення цієї величини та їх імовірності.

Значення знайти досить просто. У результаті n випробувань подія може не з'явитись зовсім, з'явитись один раз, двічі і т.д. до n разів.

Імовірність кожного значення цієї випадкової величини можна знайти по формулі Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8.8)$$

Ця формула аналітично виражає шуканий закон розподілу. Цей закон розподілу називається *біноміальним*.

 У партії 10% нестандартних деталей. Навмання відібрані 4 деталі. Записати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа нестандартних деталей серед чотирьох відібраних і побудувати багатокутник цього розподілу.

• Імовірність появи нестандартної деталі у кожному випадку рівна 0,1. Знайдемо імовірності того, що серед відібраних деталей:

1) взагалі немає нестандартних: $P_4(0) = \frac{4!}{0! \cdot 4!} 0,1^0 \cdot 0,9^4 = 0,6561$.

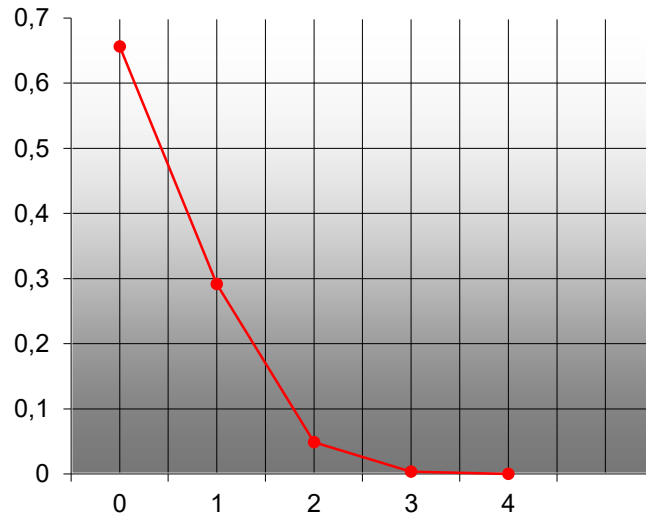
2) одна нестандартна: $P_4(1) = \frac{4!}{1! \cdot 3!} 0,1^1 \cdot 0,9^3 = 0,2916$.

3) дві нестандартні деталі: $P_4(2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} 0,1^2 \cdot 0,9^2 = 0,0486$.

4) три нестандартні деталі: $P_4(3) = \frac{4!}{3! \cdot 1!} 0,1^3 \cdot 0,9^1 = 0,0036$.

5) чотири нестандартні: $P_4(4) = \frac{4!}{4! \cdot 0!} 0,1^4 \cdot 0,9^0 = 0,0001$.

Побудуємо многокутник розподілу:



Дві гральні кістки одночасно кидають двічі. Написати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа випадань парної кількості очок на двох гральних кістках.

- Кожна гральна кістка має три варіанти парних очок – 2, 4 і 6 з шести можливих. Таким, чином, імовірність випадання раного числа очок на одній кістці рівна 0,5.

Імовірність одночасного випадання парних очок на двох кістках рівна 0,25.

Імовірність того, що при двох випробуваннях обидва рази випали парні очки на обох кістках, рівна:

$$P_2(2) = \frac{2!}{0! \cdot 2!} 0,25^2 \cdot 0,75^0 = 0,0625.$$

Імовірність того, що при двох випробуваннях один раз випали парні очки на обох кістках:

$$P_2(1) = \frac{2!}{1! \cdot 1!} 0,25^1 \cdot 0,75^1 = 0,375.$$

Імовірність того, що при двох випробуваннях жодного разу не випаде парного числа очок на обох кістках:

$$P_2(0) = \frac{2!}{0! \cdot 2!} 0,25^0 \cdot 0,75^2 = 0,5625.$$

8.9. Розподіл Пуасона.

(Сімеон Дені Пуасон (1781–1840) – французький математик).

Нехай проводиться n незалежних випробувань, у яких поява події A має імовірність p . Якщо випробувань n достатньо велике, а імовірність появи події A у кожному досліді мале ($p \leq 0,1$), то знаходження імовірності появи події A k разів проводиться таким чином.

Зробимо важливе припущення: добуток np зберігає стале значення:

$$np = \lambda.$$

Практично це припущення означає, що середнє число появи події в різних серіях випробувань (при різному n) є незмінним.

По формулі Бернуллі отримаємо:

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!} p^k (1-p)^{n-k};$$

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Знайдемо границю цієї імовірності при $n \rightarrow \infty$.

$$P_n(k) \cong \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \right] = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Отримаємо формулу розподілу Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \quad (8.9)$$

Якщо відомі числа λ і k , то значення імовірності можна знайти по відповідним таблицям розподілу Пуассона.

8.10. Числові характеристики дискретних випадкових величин.

Закон розподілу повністю характеризує випадкову величину. Однак, коли неможливо знайти закон розподілу, або цього не потрібно, можна обмежитись знаходженням значень, які називаються числовими характеристиками випадкової величини. Ці величини визначають деяке середнє значення, навколо якого групуються значення випадкової величини, і ступінь їх розкиданості навколо цього середнього значення.

Означення. Математичним очікуванням дискретної випадкової величини називається сума добутків усіх можливих значень випадкової величини на їх імовірності:

$$m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (8.10)$$

Математичне очікування існує, якщо ряд, що стоїть у правій частині рівності, збіжний абсолютно.

З точки зору імовірності можна сказати, що математичне очікування наближено рівне середньому арифметичному значень випадкової величини, що розглядається.

8.10.1. Властивості математичного очікування.

- 1) Математичне очікування сталої величини рівне самій сталій: $M(C) = C$.
- 2) Сталий множник можна виносити за знак математичного очікування: $M(Cx) = CM(x)$.

3) Математичне очікування добутку двох незалежних випадкових величин рівний добутку їх математичних очікувань:

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Ця властивість справедлива для довільної кількості випадкових величин.

4) Математичне очікування суми двох випадкових величин рівне сумі математичних очікувань доданків:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Ця властивість також справедлива для довільної кількості випадкових величин.

Нехай проводиться n незалежних випробувань, імовірність появи події A у яких рівна p .

Теорема. Математичне очікування $M(X)$ числа появи події A в n незалежних випробуваннях рівне добутку числа випробувань на імовірність появи події у кожному випробуванні:

$$M(X) = np.$$

Однак, математичне очікування не може повністю характеризувати випадковий процес. Крім математичного очікування потрібно увести величину, яка характеризує відхилення значень випадкової величини від математичного очікування.

Це відхилення рівне різниці між випадковою величиною та її математичним очікуванням. При цьому математичне очікування відхилення рівне нулю. Це пояснюється тим, що одні можливі відхилення додатні, інші від'ємні, і у результаті їх взаємного погашення отримуємо нуль.

Означення. Дисперсією (розсіюванням) дискретної випадкової величини називається математичне очікування квадрата відхилення випадкової величини від її математичного очікування:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \quad (8.11)$$



Для розглянутого вище прикладу закон розподілу випадкової величини має вигляд:

X	0	1	2
P	0,0625	0,375	0,5625

Знайти математичне очікування та дисперсію випадкової величини.

• Маємо: $M(X) = 0 \cdot 0,0625 + 1 \cdot 0,375 + 2 \cdot 0,5625 = 1,5$.

Можливі значення квадрата відхилення:

$$[x_1 - M(X)]^2 = (0 - 1,5)^2 = 2,25;$$

$$[x_2 - M(X)]^2 = (1 - 1,5)^2 = 0,25;$$

$$[x_3 - M(X)]^2 = (2 - 1,5)^2 = 0,25.$$

Тоді

$[X - M(X)]^2$	2,25	0,25	0,25
P	0,0625	0,375	0,5625

Дисперсія рівна: $D(X) = 2,25 \cdot 0,0625 + 0,25 \cdot 0,375 + 0,25 \cdot 0,5625 = 0,375$.

Однак, на практиці подібний спосіб обчислення дисперсії незручний, так як при великій кількості значень випадкової величини до громіздких обчислень.

Тому використовується інший спосіб.

8.10.2. Обчислення дисперсії.

Теорема. Дисперсія рівна різниці між математичним очікуванням квадрата випадкової величини X і квадратом її математичного очікування:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \quad (8.12)$$

Доведення. З урахуванням того, що математичне очікування $M(X)$ і квадрат математичного очікування $M^2(X)$ – величини сталі, то можна записати:

$$\begin{aligned} D(X) &= M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] = \\ &= M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X). \\ D(X) &= M(X^2) - [M(X)]^2. \end{aligned}$$

Застосуємо цю формулу для розглядуваного вище прикладу:

X	0	1	2
X^2	0	1	4
P	0,0625	0,375	0,5625

$$M(X^2) = 0 \cdot 0,0625 + 1 \cdot 0,375 + 4 \cdot 0,5625 = 2,625.$$

$$D(X) = 2,625 - [1,5]^2 = 0,375.$$

8.10.3. Властивості дисперсії.

1) Дисперсія сталої величини рівна нулю: $D(C) = 0$.

2) Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрату:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3) Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин рівна сумі дисперсій цих величин:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

4) Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин рівна сумі дисперсій цих величин:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Справедливість цієї рівності витікає з властивості 2.

Теорема. Дисперсія числа появи події A в n незалежних випробувань, у кожному з яких імовірність p появи події стала, рівна добутку числа випробувань на імовірності появи і не появи події в будь-якому випробуванні:

$$D(X) = npq. \quad (8.13)$$

8.10.4. Середнє квадратичне відхилення.

Означення. Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називається квадратний корінь з дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (8.14)$$

Теорема. Середнє квадратичне відхилення суми скінченної кількості взаємно незалежних випадкових величин рівне квадратному кореню з суми квадратів середніх квадратичних відхилень цих величин:

$$\sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)}.$$



Завод випускає 96% виробів першого сорту та 4% виробів другого сорту. Навмання вибирають 1000 виробів. Нехай X – число виробів першого сорту у даній вибірці. Знайти закон розподілу, математичне очікування та дисперсію випадкової величини X .

- Вибір кожного з 1000 виробів можна вважати незалежним випробуванням, у якому імовірність появи виробів першого сорту однакова і рівна $p=0,96$.

Таким чином, закон розподілу може вважатися біноміальним:

$$m_x = np = 1000 \cdot 0,96 = 960;$$

$$D_x = npq = 1000 \cdot 0,96 \cdot 0,04 = 38,4.$$



Знайти дисперсію дискретної випадкової величини X – число появи події A у двох незалежних випробуваннях, якщо імовірності появи цієї події у кожного випробуванні рівні і відомо, що $M(X)=0,9$.

- Так як випадкова величина X розподілена по біноміальному закону, то

$$M(X) = np = 2p = 0,9; \Rightarrow p = 0,45;$$

$$D(X) = npq = 2p(1-p) = 2 \cdot 0,45 \cdot 0,55 = 0,495.$$



Проводяться незалежні випробування з однаковою ймовірністю появи події A у кожному випробуванні. Знайти імовірність появи події A , якщо дисперсія числа появи події у трьох незалежних випробуваннях рівна 0,63.

- По формулі дисперсії біноміального закону отримуємо:

$$D(X) = npq = 3p(1-p) = 0,63;$$

$$3p^2 - 3p + 0,63 = 0;$$

$$p^2 - p + 0,21 = 0;$$

$$p_1 = 0,7; \quad p_2 = 0,3.$$



Досліджується пристрій, що складається з чотирьох незалежно працюючих приладів. Імовірності відмови кожного приладів рівні відповідно $p_1=0,3$; $p_2=0,4$; $p_3=0,5$; $p_4=0,6$. Знайти математичне очікування і дисперсію кількості приладів, що відмовили.

- Приймаючи за випадкову величину кількість приладів, що відмовили, бачимо, що ця випадкова величина може приймати значення 0, 1, 2, 3 або 4.

Для складання закону розподілу цієї випадкової величини необхідно визначити відповідні імовірності. Прийmemo $q_i = 1 - p_i$.

1) Не відмовив жодний прилад: $p(0) = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,084$.

2) Відмовив один з приладів:

$$p(1) = p_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 p_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 p_4 = 0,302.$$

3) Відмовили два прилади:

$$p(2) = p_1 p_2 q_3 q_4 + p_1 q_2 p_3 q_4 + p_1 q_2 q_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 p_4 + q_1 q_2 p_3 p_4 = 0,38.$$

4) Відмовили три прилади:

$$p(3) = p_1 p_2 p_3 q_4 + p_1 p_2 q_3 p_4 + p_1 q_2 p_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 p_4 = 0,198.$$

5) Відмовили усі прилади:

$$p(4) = p_1 p_2 p_3 p_4 = 0,036.$$

Отримаємо закон розподілу:

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
p	0,084	0,302	0,38	0,198	0,036

Математичне очікування:

$$M(X) = 0,302 + 2 \cdot 0,38 + 3 \cdot 0,198 + 4 \cdot 0,036 = 1,8.$$

$$M(X^2) = 0,302 + 4 \cdot 0,38 + 9 \cdot 0,198 + 16 \cdot 0,036 = 4,18.$$

$$\text{Дисперсія: } D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 4,18 - 3,24 = 0,94.$$

8.11. Функція розподілу.

У всіх розглянутих вище випадках випадкова величина визначалась шляхом задання значень самої величини та імовірностей цих значень.

Однак, такий метод застосовується не завжди. Наприклад, у випадку неперервної випадкової величини, її значення можуть заповнювати деякий довільний інтервал. Очевидно, що в цьому випадку задати усі значення випадкової величини нереально.

Навіть у випадку, коли це зробити можна, задача розв'язується складно. Розглянутий щойно приклад навіть при простій умові приводить до достатньо незручних обчислень, а якщо у задачі буде декілька сотень приладів?

Тому постає задача по можливості відмовитись від індивідуального підходу до кожної задачі і знайти, по можливості, найбільш загальний спосіб задання будь-яких типів випадкових величин.

Нехай x – дійсне число. Імовірність події, що X набуде значення, меншого x , тобто $X < x$, позначимо через $F(x)$.

Означення. Функцією розподілу називають функцію $F(x)$, що визначає імовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування прийме значення, менше за x .

$$F(x) = P(X < x).$$

Функцію розподілу також називають *інтегральною функцією*.

Функція розподілу існує як для неперервних, так і для дискретних випадкових величин. Вона повністю характеризує випадкову величину і є однією з форм закону розподілу.

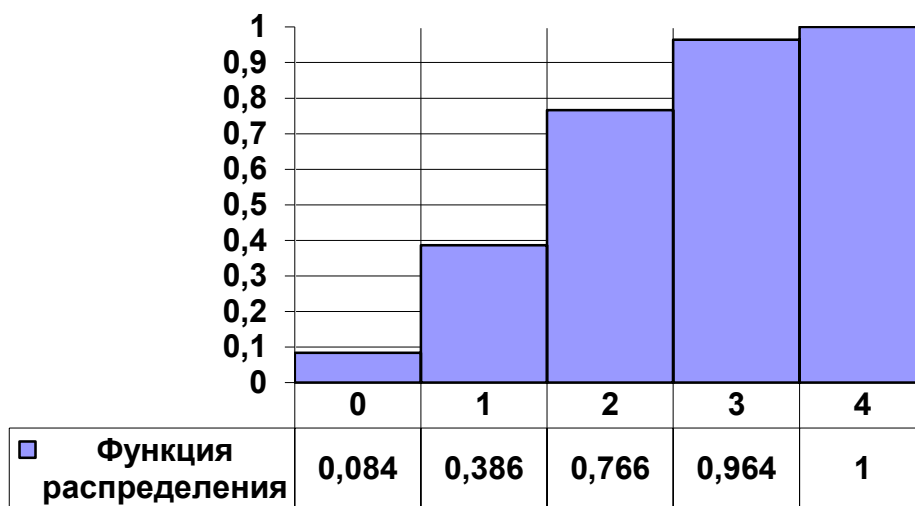
Для дискретної випадкової величини функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

Знак нерівності під знаком суми показує, що сумування розповсюджується на ті можливі значення випадкової величини, які менші за аргумент x .

Функція розподілу дискретної випадкової величини X розривна і зростає стрибками при переході через кожне значення x_i .

Так для прикладу, що розглядався вище, функція розподілу матиме вигляд:



8.11.1. Властивості функції розподілу.

- 1) значення функції розподілу належать відрізку $[0; 1]$: $0 \leq F(x) \leq 1$.
- 2) $F(x)$ – неспадна функція: $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 \geq x_1$.
- 3) Імовірність того, що випадкова величина прийме значення з інтервала $(a; b)$, рівна приросту функції розподілу на цьому інтервалі:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

4) На «мінус нескінченності» функція розподілу рівна нулю; на «плюс нескінченності» функція розподілу рівна одиниці.

5) Імовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде одного певного значення, рівна нулю.

Таким чином, немає потреби казати про будь-яке конкретне значення випадкової величини. Цікавість представляє лише імовірність потрапляння випадкової величини у будь-який інтервал, що відповідає більшості практичних задач.

8.12. Густина розподілу.

Функція розподілу повністю характеризує випадкову величину, однак, має один недолік. По функції розподілу важко казати про характер розподілу випадкової величини у невеликому околі тій чи іншій точки числової осі.

Означення. Густиною розподілу імовірностей неперервної випадкової величини X називається функція $f(x)$ – перша похідна від функції розподілу $F(x)$:

$$f(x) = F'(x).$$

Густину розподілу також називають *диференціальною функцією*.

Зміст густини розподілу полягає у тому, що вона показує, як часто з'являється випадкова величина X у деякому околі точки x при повторенні випробувань.

Після введення функцій та густини розподілу можна дати означення *неперервної в випадковій величині*.

Означення. Випадкова величина X називається *неперервною*, якщо її функція розподілу $F(x)$ неперервна на усій осі OX , а густина розподілу $f(x)$ існує завжди, за виключенням, можливо, скінченної кількості точок.

Знаючи густину розподілу, можна обчислити імовірність того, що деяка випадкова величина X прийме значення, що належить даному інтервалу.

Теорема. Імовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $(a; b)$, рівна визначеному інтегралу від густини розподілу, узятому в межах від a до b :

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Доведення цієї теореми ґрунтується на означенні густини розподілу та третій властивості функції розподілу, що записані вище.

Геометрично це означає, що імовірність того, що неперервна випадкова величина набуває значення, що належить інтервалу (a, b) , рівна площі криволінійної трапеції, обмеженої віссю OX , кривою розподілу $f(x)$ і прямими $x=a$ та $x=b$.

Функція розподілу може бути легко знайдена, якщо відома густина розподілу, за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx.$$

8.12.1. Властивості густини розподілу.

1) Густина розподілу – невід'ємна функція: $f(x) \geq 0$.

2) Невласний інтеграл по густині розподілу в межах від $-\infty$ до $+\infty$ рівний одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

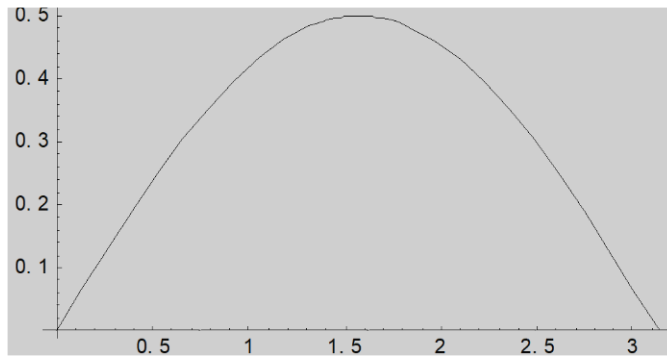


Випадкова величина підкорена закону розподілу з густиною:

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x, & \text{при } 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ або } x > \pi \end{cases}$$

Потрібно знайти коефіцієнт a , побудувати графік функції густини розподілу, визначити імовірність того, що випадкова величина потрапить у інтервал від 0 до $\frac{\pi}{4}$.

- Побудуємо графік густини розподілу:



Для знаходження коефіцієнта a скористуємось властивістю: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{\pi} a \sin x dx + \int_{\pi}^{\infty} 0dx = a \int_0^{\pi} \sin x dx = -a \cos x \Big|_0^{\pi} = 2a = 1;$$

$$a = \frac{1}{2}.$$



Задана неперервна випадкова величина x своєю функцією розподілу $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} A \cos 2x, & \text{при } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{при } |x| > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Потрібно визначити коефіцієнт A , знайти функцію розподілу, побудувати графіки функції розподілу і густини розподілу, визначити імовірність того, що випадкова величина x потрапить в інтервал $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$.

• Знайдемо коефіцієнт A .

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} A \cos 2x dx + \int_{\pi/4}^{\infty} 0dx = \frac{A \sin 2x}{2} \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = A = 1.$$

Знайдемо функцію розподілу:

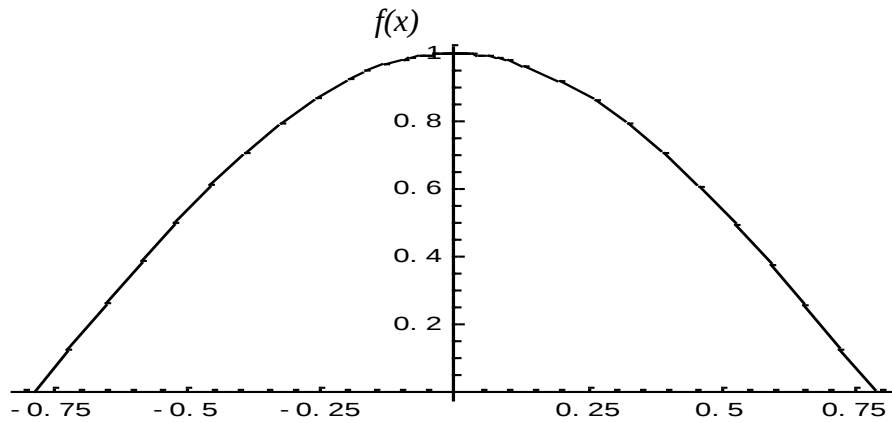
$$1) \text{ на } x < -\frac{\pi}{4}: F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^x 0dx = 0;$$

$$2) \text{ на } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}: F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^x \cos 2x dx = \frac{\sin 2x}{2} \Big|_{-\pi/4}^x = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2};$$

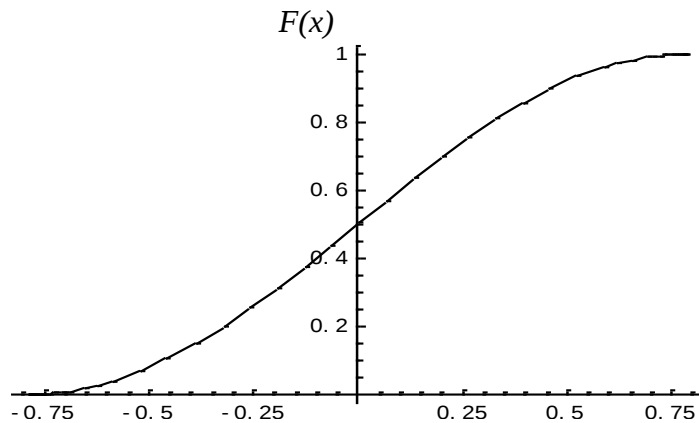
$$3) \text{ на } x > \frac{\pi}{4}: F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x dx + \int_{\pi/4}^x 0dx = \frac{\sin 2x}{2} \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1.$$

$$\text{Отже: } f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & \text{при } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}; \\ 0, & \text{при } |x| > \frac{\pi}{4} \end{cases}; \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -\frac{\pi}{4}; \\ \frac{\sin 2x + 1}{2}, & \text{при } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}; \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Побудуємо графік густини розподілу:



Побудуємо графік функції розподілу:



Знайдемо імовірність потрапляння випадкової величини у інтервал $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$.

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = \int_{\pi/6}^2 f(x)dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos 2x dx + \int_{\pi/4}^2 0 dx = \frac{\sin 2x}{2} \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,067.$$

Ту ж саму імовірність можна шукати і іншим способом:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = F(2) - F(\pi/6) = 1 - \frac{\sin(\pi/3) + 1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,067.$$

8.13. Числові характеристики неперервних випадкових величин.

Нехай неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу $f(x)$. Нехай усі можливі значення випадкової величини належать відрітку $[a; b]$.

Означення. Математичним очікуванням неперервної випадкової величини X , можливі значення якої належать відрітку $[a; b]$, називається визначений інтеграл

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx.$$

Якщо можливі значення випадкової величини розглядаються на усій числовій осі, то математичне очікування знаходиться за формулою:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

При цьому невластний інтеграл має збігатися.

Означення. *Дисперсією* неперервної випадкової величини називається математичне очікування квадрату її відхилення:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx.$$

По аналогії з дисперсією дискретної випадкової величини, для практичного обчислення дисперсії використовується формула:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2.$$

Означення. *Середнім квадратичним відхиленням* називається квадратний корінь з дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Означення. *Модою* M_0 дискретної випадкової величини називається її найбільш імовірнісне значення. Для неперервної випадкової величини мода – таке значення випадкової величини, при якій густина розподілу має максимум:

$$f(M_0) = \max.$$

Якщо многокутник розподілу для дискретної випадкової величини або крива розподілу для неперервної випадкової величини має два або більше максимумів, то такий розподіл називається *двохмодальним* або *багатомодальним*.

Якщо розподіл має мінімум, але не має максимуму, то він називається *антимодальним*.

Означення. *Медіаною* M_D випадкової величини X називається таке її значення, відносно якого рівно ймовірно отримати більше або менше значення випадкової величини:

$$P(X < M_D) = P(X > M_D).$$

Геометрично медіана – абсциса точки, у якій площа, обмежена кривою розподілу ділиться навпіл.

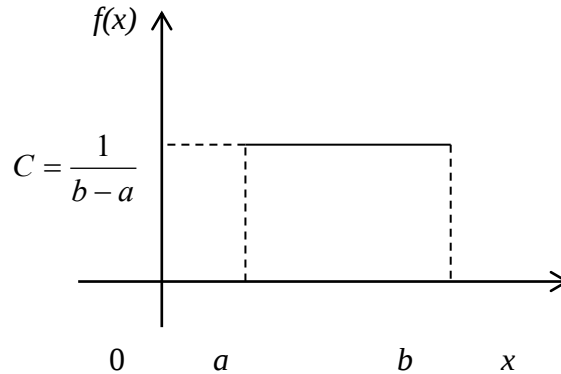
Відмітимо, що якщо розподіл одномодальний, то мода і медіана співпадають з математичним очікуванням.

8.14. Рівномірний розподіл.

Означення. Неперервна величина має *рівномірний розподіл* на відрізок $[a, b]$, якщо на цьому відрізку густина розподілу випадкової величини стала, а поза ним рівна нулю:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ C, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Стала величина C може бути визначена з умови рівності одиниці площі, обмеженої кривою розподілу.

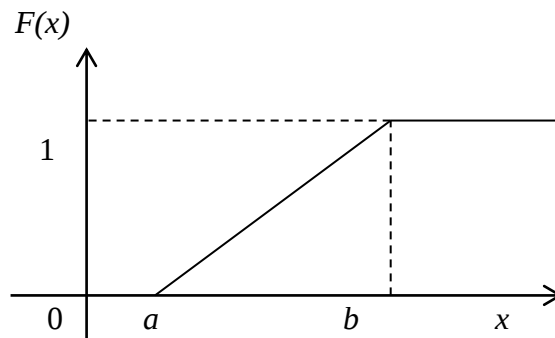


Отримаємо: $C = \frac{1}{b-a}$.

Знайдемо функцію розподілу $F(x)$ на відрізку $[a, b]$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x}{b-a} \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 1, & \text{при } x > b. \end{cases}$$



Для того, щоб випадкова величина підкорювалась закону рівномірного розподілу необхідно, щоб її значення лежали всередині деякого визначеного інтервала, і всередині цього інтервала значення цієї величини були б рівноймовірні.

Визначимо математичне очікування і дисперсію випадкової величини, що підкорена рівномірному закону розподілу.

$$m_x = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

$$m_{x^2} = \int_a^b x^2 f(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{x^3}{3(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

$$D_x = m_{x^2} - m_x^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Імовірність потрапляння випадкової величини у заданий інтервал:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

8.15. Показниковий розподіл.

Означення. Показниковим (експоненціальним) називається розподіл імовірностей неперервної випадкової величини X , яке описується густиною:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

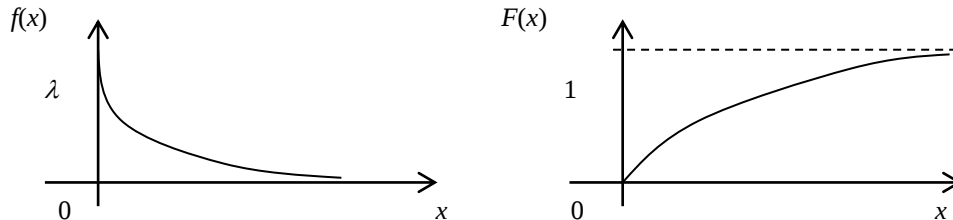
де λ – додатне число.

Знайдемо закон розподілу.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Графіки функції розподілу і густини розподілу:



Знайдемо математичне очікування випадкової величини, що підкорена показниковому розподілу.

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x; e^{-\lambda x} dx = dv; \\ du = dx; -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} = v; \end{array} \right\} = \lambda \left(-\frac{x e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} dx \right)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Результат отриманий з використанням факту, що

$$x e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} - 0 = \left\{ \begin{array}{l} \text{По правилу} \\ \text{Лопіталя} \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} = 0.$$

Для знаходження дисперсії знайдемо величину $M(X^2)$.

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx.$$

Двічі інтегруючи по частинам, отримаємо: $M(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$.

Тоді $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Отже: $M(X) = \frac{1}{\lambda}$; $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$; $\sigma_x = \frac{1}{\lambda}$.

Видно, що у випадку показникового розподілу математичне очікування і середнє квадратичне відхилення рівні.

Також легко визначити і ймовірність потрапляння випадкової величини, що підкорена показниковому закону розподілу, у заданий інтервал:

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

8.16. Нормальний закон розподілу.

Означення. Нормальним називається розподіл імовірностей неперервної випадкової величини, яке описується густиною імовірності:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Нормальний закон розподілу також називається *законом Гаусса*.

Нормальний закон розподілу займає центральне місце у теорії ймовірностей. Це обумовлено тим, що цей закон проявляється у всіх випадках, коли випадкова величина є результатом дії великої кількості різних факторів. До нормального закону наближаються усі інші закони розподілу.

Можна легко показати, що параметри m_x і σ_x , які входять у густину розподілу є відповідно математичним очікуванням і середнім квадратичним відхиленням величини X .

Знайдемо функцію розподілу $F(x)$.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx.$$

Графік густини нормального розподілу називається *нормальною кривою* або *кривою Гаусса*.

Нормальна крива має наступні властивості:

- 1) функція визначена на усій числовій осі;
- 2) при усіх x функція розподілу набуває лише додатніх значень;
- 3) вісь OX є горизонтальною асимптотою графіка густини імовірності, так як пр. необмеженому зростанні по абсолютній величині аргумента x , значення функції прямує до нуля;

4) знайдемо екстремум функції:

$$y' = -\frac{x-m}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = 0; \quad x = m.$$

Так як при $y' > 0$ при $x < m$ та $y' < 0$ при $x > m$, то в точці $x = m$ функція має максимум, рівний $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

5) функція є симетричною відносно прямої $x=a$, так як різниця $(x-a)$ входить у функцію густини розподілу у квадраті;

6) для знаходження точок перегину графіка знайдемо другу похідну функції густини:

$$y'' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \frac{(x-m)^2}{\sigma^2} \right].$$

При $x=m+\sigma$ і $x=m-\sigma$ друга похідна рівна нулю, а при переході через ці точки змінює знак, тобто у цих точках функція має перегин.

У цих точках значення функції рівне $\frac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}}$.

Побудуємо графік функції густини розподілу:

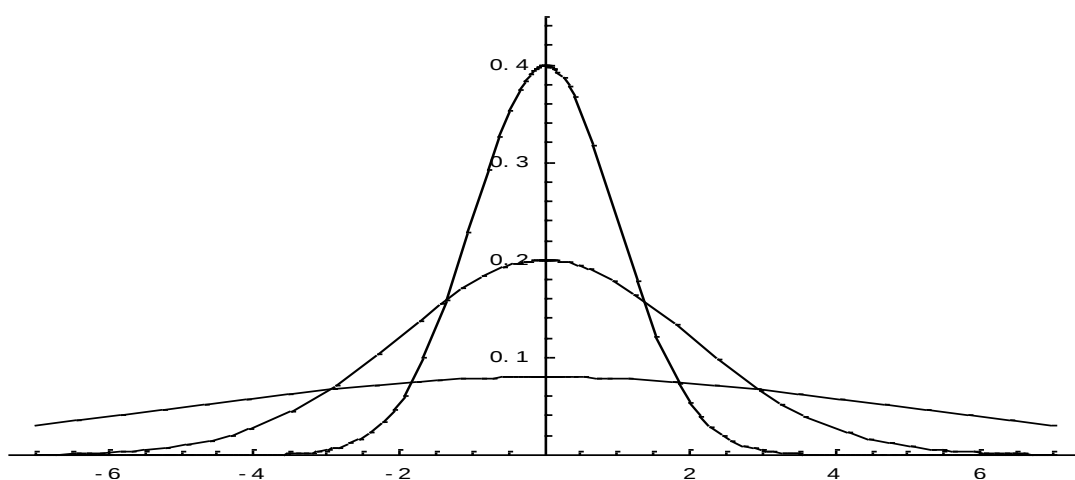


Рис. 8.1

Побудовані графіки при $m=0$ та трьох можливих значеннях середнього квадратичного відхилення $\sigma=1$, $\sigma=2$ та $\sigma=7$. Як видно, при збільшенні значення середнього квадратичного відхилення графік стає більш пологим, а максимальне значення зменшується.

Якщо $a>0$, то графік зміститься у додатному напрямку, якщо $a<0$ – у від'ємному.

При $a=0$ та $\sigma=1$ крива називається *нормованою*. Рівняння нормованої кривої:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

8.17. Функція Лапласа.

Знайдемо імовірність потрапляння випадкової величини, розподіленої по нормальному закону, у заданий інтервал:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Позначимо $\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t$; $\frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}} = \alpha$; $\frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}} = \beta$.

$$\text{Тоді } P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2} \sigma\sqrt{2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} [\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)].$$

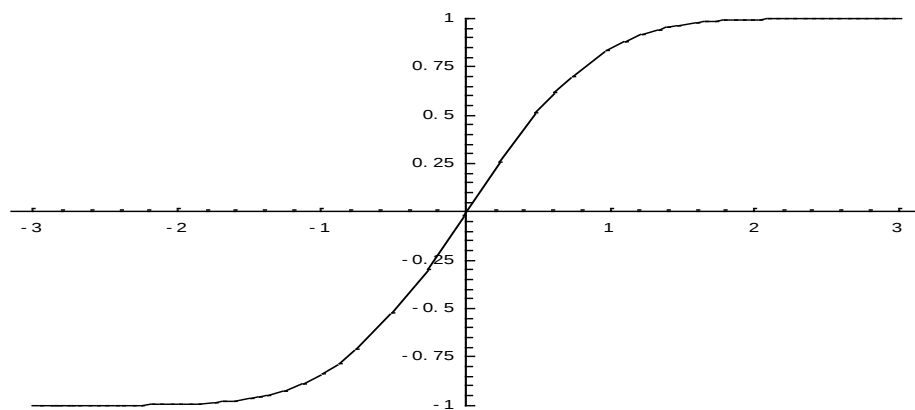
Так як інтеграл $\int e^{-t^2} dt$ не виражається через елементарні функції, то розглянемо функцію:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

яка називається *функцією Лапласа* або *інтегралом імовірностей*.

Значення цієї функції при різних значення x порашовані і приводяться у спеціальних таблицях.

Нижче показано графік функції Лапласа.



Функція Лапласа має наступні властивості:

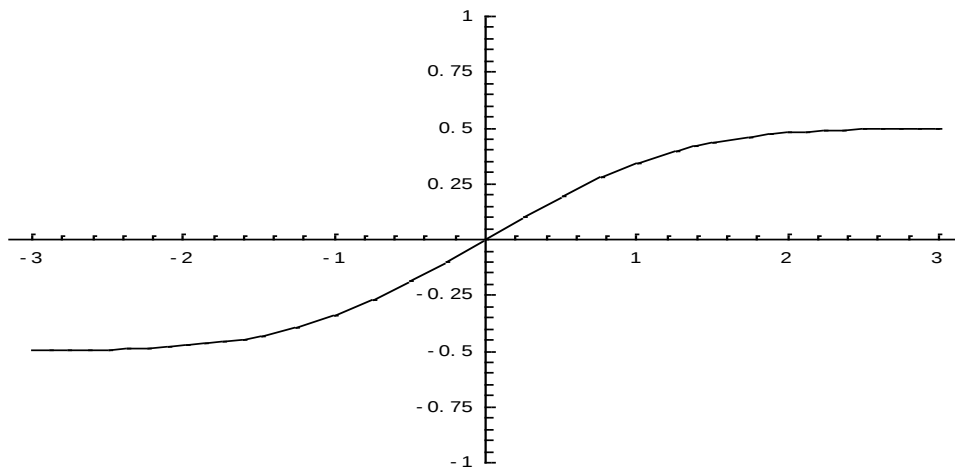
- 1) $\Phi(0) = 0$;
- 2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
- 3) $\Phi(\infty) = 1$.

Функцію Лапласа також називають *функцією помилок* і позначають $\text{erf } x$.

Ще використовується *нормована функція Лапласа*, яка пов'язана з функцією Лапласа співвідношенням:

$$\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

Нижче показано графік нормованої функції Лапласа.



При розгляді нормального закону розподілу виділяється важливий частинний випадок, відомий як *правило трьох сигм*.

Запишемо імовірність того, що відхилення нормально розподіленій випадковій величині від математичного очікування менше заданої величини Δ :

$$P(|X - m| < \Delta) = \Phi\left[\frac{m + \Delta - m}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{m - \Delta - m}{\sigma}\right] = \Phi\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right] - \Phi\left[-\frac{\Delta}{\sigma}\right] = 2\Phi\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right].$$

Якщо прийняти $\Delta = 3\sigma$, то отримаємо з використанням таблиць значення функції Лапласа:

$$P(|X - m| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973.$$

Тобто імовірність того, що випадкова величина відхилиться від свого математичного очікування на величину, більшу, ніж потроєне середнє квадратичне відхилення, практично рівне нулю.

Це правило називається *правилом трьох сигм*.

На практиці вважається, що якщо для будь-якої випадкової величини виконується правило трьох сигм, то ця випадкова величина має нормальний розподіл.



Потяг складається зі 100 вагонів. Маса кожного вагона – випадкова величина, розподілена по нормальному закону з математичним очікуванням $a=65$ т та середнім квадратичним відхиленням $\sigma=0,9$ т. Локомотив може везти склад масою не більше 6600 т, в протилежному випадку необхідно чіпляти другий локомотив. Знайти імовірність того, другий локомотив не знадобиться.

• Другий локомотив не знадобиться, якщо відхилення маси складу від очікуваного ($100 \cdot 65 = 6500$) не перевищує $6600 - 6500 = 100$ т.

Так як маса кожного вагона має нормальний розподіл, то й маса усього складу теж буде розподілена нормально.

Отримаємо:

$$P(|X - M(X)| < 100) = 2\Phi\left[\frac{100}{100\sigma}\right] = 2\Phi[1,111] = 2 \cdot 0,3665 = 0,733.$$

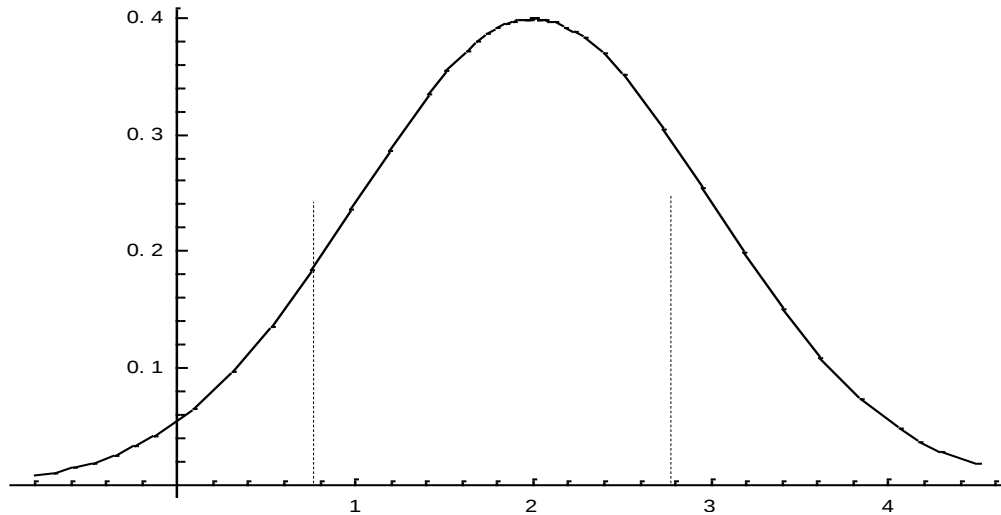


Нормально розподілена випадкова величина X задана своїми параметрами – $a=2$ – математичне очікування і $\sigma=1$ – середнє квадратичне відхилення. Потрібно написати

густину імовірності та побудувати її графік, знайти імовірність того, що X відхилиться (по модулю) від математичного відхилення не більш, ніж на 2.

- Густина розподілу має вигляд: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$.

Побудуємо графік:



Знайдемо імовірність потрапляння випадкової величини у інтервал (1; 3).

$$P(1 < X < 3) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^3 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{3-2}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{2}}\right) \right] = \frac{1}{2} [\Phi(0,7071) + \Phi(0,7071)] = 0,6778.$$

Знайдемо імовірність відхилення випадкової величини від математичного очікування на величину, не більшу, ніж 2.

$$P(|X - 2| < 2) = \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \Phi(\sqrt{2}) \approx 0,95.$$

Той же результат може бути отриманий з використанням нормованої функції Лапласа:

$$P(|X - 2| < 2) = 2\bar{\Phi}\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) = 2\bar{\Phi}(2) = 2 \cdot 0,4772 \approx 0,95.$$

8.18. Теорема Бернуллі.

Нехай проводиться n незалежних випробувань, у кожному з яких імовірність появи події A рівна p .

Потрібно визначити відносну частоту появи події A .

Теорема. Якщо у кожному з n незалежних випробувань імовірність p появи події A стала, то як завгодно близька одиниці імовірність того, що відхилення відносної частоти від імовірності p по абсолютній величині буде як завгодно малим, якщо число випробувань достанько велике:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|m/n - p| < \varepsilon) = 1.$$

Тут m – число появ події A . З усього сказаного вище не слідує, що із збільшенням числа випробувань відносна частота неухильно прямує до імовірності p , тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = p$. У теоремі мається на увазі лише імовірність наближення відносної частоти до імовірності появи події A у кожному випробуванні.

У випадку, якщо імовірності появи події A у кожному випробуванні різні, то справедлива теорема, відома як *теорема Пуассона*.

Теорема Пуассона. Якщо проводиться n незалежних випробувань і ймовірність появи події A у кожному досліді рівна p_i , то при збільшенні n частота події A збігається по імовірності до середнього арифметичного імовірностей p_i .

8.19. Теорема Муавра–Лапласа.

(Абрахам де Муавр (1667–1754) – англійський математик; П'єр-Сімон Лаплас (1749–1827) – французький математик)

Теорема Муавра–Лапласа. Якщо проводиться n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A з'являється з імовірністю p , то для будь-якого інтервала (α, β) справедливе співвідношення:

$$P\left(\alpha < \frac{Y - np}{\sqrt{npq}} < \beta\right) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) \right] = \bar{\Phi}(\beta) - \bar{\Phi}(\alpha).$$

де Y – число появ події A в n випробуваннях, $q=1-p$, $\Phi(x)$ – функція Лапласа, $\bar{\Phi}(x)$ – нормована функція Лапласа.

Теорема Муавра–Лапласа описує поведінку біноміального розподілу при великих значеннях n .

Дана теорема дозволяє суттєво спростити обчислення по формулі біноміального розподілу.

Розрахунок імовірності потрапляння значення випадкової величини у заданий інтервал $P(\alpha < Y < \beta) = \sum_{\alpha < k < \beta} C_n^k p^k q^{n-k}$ при великих значеннях n складний. Простіше скористатися формулою:

$$P(\alpha < Y < \beta) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{2npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{2npq}}\right) \right].$$

Теорема Муавра–Лапласа широко використовується при розв'язуванні практичних задач.

Вправи для самостійного розв'язування.

1. Є 5 видів конвертів без марок і 4 види марок однакової вартості. Скількома способами можна вибрати конверт із маркою для посилки листа?

2. Гральна кістка кинута 3 рази. Яка ймовірність того, що при цьому всі грані, що випали, різні?
3. У пасажирському поїзді 9 вагонів. Скількома способами можна розсадити в поїзді 4 осіб за умови, що всі вони повинні їхати в різних вагонах?
4. Скільки існує різних автомобільних номерів, які складаються з п'яти цифр, якщо перша цифра не дорівнює нулю.
5. Три дороги з'єднують міста Черкаси і Київ, чотири дороги з'єднують міста Київ і Харків. Скількома способами можна зробити поїздку з Черкас в Харків через Київ та повернутися в Черкаси також через Київ?
6. Скількома способами можна в рядок написати шість плюсів і чотири мінуси?
7. Імовірність виграшу по одному білету лотереї рівна $\frac{1}{7}$. Яка імовірність того, що, придбавши 5 білетів, можна виграти по усім п'яти білетам.?
8. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 вибирається одна, а з тих, що залишилися – друга. Знайти імовірність того, що буде вибрана непарна цифра першого разу.
9. Курсант забув останню цифру номера телефону батьків і тому набирає її навмання. Знайти імовірність того, що йому прийдеться зробити рівно 2 невдалі спроби.
10. Курсант написав шпаргалки на 20 білетів з 25. Яка імовірність того, що з трьох білетів, які залишилися на столі, у нього є шпаргалки принаймні на 2?
11. На розподілі в обласному ГУДСНС 5 випускників ЧПБ і 5 випускників УЦЗ. В кабінет до начальника запрошуються по двоє. Яка імовірність того, що всі пари будуть складатися з випускників одного вузу?
12. П'ять курсантів навмання сідають за круглий стіл. Яка імовірність того, що певна пара опиниться поряд?
13. 60% у ЧПБ – курсанти. 80% курсантів і 75% студентів ходять на заняття з папками. У чергову комендатуру принесли загублену папку. Яка імовірність того, що ця папка належить курсанту?
14. У взводі з 30 курсантів є 4 відмінних, 10 добрих і 16 посередніх стрільків. Імовірність попадання в ціль при одному пострілі для відмінного стрілька рівна 0,9, для доброго – 0,7, для посереднього – 0,5. Знайти імовірність того, що випадково вибраний стрілець попаде в ціль.
15. Відомо, що 96% випускників ЧПБ – фахівці. Спрощене тестування визнає фахівця з імовірністю 0,98 і нефахівця з імовірністю 0,05. Визначити імовірність того, що випускник, що пройшов тестування, фахівець.
16. Для здачі іспиту курсантам необхідно було підготувати 30 запитань. З 25 курсантів 10 підготували усі запитання, 8 – 25 запитань, 5 – 20 запитань, 2 – 15 запитань. Викликаний курсант відповів на поставлене запитання. Знайти імовірність того, що цей курсант підготував усі запитання.
17. Є 107 монет, причому у однієї з них герб з обох сторін, а інші монети звичайні. Навмання вибрану монету, не роздивляючись, підкидають 10 разів, причому при усіх підкиданнях вона падала гербом угору. Знайти імовірність того, що була вибрана монета з двома гербами.
18. Один повелитель, якому набрид його астроном (багато казав неправди), вирішив його стратити. Однак, будучи добрим повелителем, він вирішив дати астроному останній шанс. Йому потрібно було розподілити по 2 ящикам 4 кульки: 2 чорні і 2 білі. Палач вибере навмання один з ящиків і з неї візьме одну кульку. Якщо кулька буде чорна, то астронома

стратять, якщо ж біла – залишиться жити. Яким чином астроному потрібно розмістити кульки в ящиках, щоб забезпечити собі максимальну імовірність залишитися живим?

19. Імовірність випустити «фахівця» – 0,95. Скільки має бути випускників, щоб найімовірніша кількість «нефахівців» була 15?

20. Імовірність того, що банкомат при прийманні картки спрацює правильно, рівна 0,99. Скільки разів потрібно скористатись банкоматом, щоб найти найбільш імовірна кількість правильної роботи банкомата була рівна 100?

21. Визначити імовірність того, що номер першої ліпшої машини містить рівно дві п'ятірки (номер машини 5-тизначний).

22. 2 баскетболісти роблять по 3 кидки у кошик. Імовірності влучення м'яча у кошик при кожному кидку рівні, відповідно, 0,5, 0,6, 0,7. Знайти імовірність того, що у обох буде рівна кількість влучень.

23. В сім'ї 5 дітей. Знайти імовірність того, що серед дітей 4 хлопчики, якщо імовірності народження хлопчика і дівчинки по 0,5.

24. Знайти найбільш імовірну кількість випадань «шістки» при 46 киданнях грального кубика.

Термін “*статистика*” походить від латинського слова *status* (*статус*), що означає “визначене положення речей”. У даний час термін “*статистика*” вживається в трьох значеннях:

- 1) як *галузь* практичної діяльності зі збору, обробки та аналізу даних соціально-економічного та іншого масового характеру;
- 2) як *наука*, що містить теоретичні положення і методи розв’язання практичних задач статистики (*математична статистика*);
- 3) як *підсумкові* статистичні дані, тобто як результати застосування статистичних методів до початкової статистичної інформації.

Математична статистика – це наука про методи реєстрації, опису й аналізу статистичних експериментальних даних, які одержуються у результаті спостереження масових випадкових явищ.

Задачами математичної статистики, які найчастіше зустрічаються на практиці, є:

- 1) визначення закону розподілу випадкової величини (або системи випадкових величин) за статистичними початковими даними;
- 2) перевірка правдоподібності гіпотез, наприклад – чи узгодяться результати експерименту з гіпотезою про те, що дана випадкова величина підпорядкована закону розподілу $F(x)$;
- 3) відшукування невідомих параметрів розподілу випадкової величини або системи випадкових величин (або оцінок цих параметрів).

У математичній статистиці використовується властива цій предметній галузі система категорій і понять. Розглянемо основні з цих понять.

9.1. Варіаційний ряд, гістограма.

Припустимо, що виникла ситуація, у якій потрібно вивчити сукупність об’єктів (наприклад покупців продукції фірми), оцінюючи деяку ознаку, яка властива кожному з цих об’єктів (наприклад, вік). Якщо аналізована ознака має кількісне значення, то частіше за все цю ознаку ототожнюють із випадковою величиною, а конкретне значення ознаки сприймається як значення випадкової величини.

Означення. *Вибірковою сукупністю* (синоніми: вибірка, простий статистичний ряд) називається сукупність значень x_i тієї самої ознаки (ξ) у випадково відібраних n об’єктів.

Звичайно вибірка оформляється у вигляді таблиці в два рядки (див. табл. 4. 1). У першому рядку вказують номер об’єкта (або спроби), у другому – значення ознаки цього об’єкта або в цій спробі (значення випадкової величини ξ). Така вибірка сукупність далі підлягає обробці, наприклад – побудові статистичної функції розподілу. Вибіркова сукупність є елементом більш загальної – генеральної сукупності.

Таблиця 9.1

i	1	2	...	k	...	N
ξ	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n

Означення. Генеральною сукупністю називається сукупність значень тієї самої ознаки (ζ) в усіх об'єктах, зі складу яких проводиться вибірка.

Означення. Обсягом сукупності (вибіркової або генеральної) називають кількість (n) об'єктів цієї сукупності.

Серед отриманих n значень ознаки можуть бути однакові значення. Так, значення x_i може зустрічатися n_i разів. У результаті, різні значення ознаки ζ можуть виявитися рівними $x_1, x_2, \dots, x_m$, а кількість таких різних значень ознаки ζ у вибірці може дорівнювати деякій величині m ($m \leq n$). Для опису зазначеної ситуації використовують поняття “варіант”.

Означення. Варіантом називають конкретне, відмінне від інших, отримане в спробі значення x_i ознаки ζ .

Означення. Частотою варіанту x_i у вибірці називають кількість n_i однакових значень (x_i) ознаки у вибірці.

Сума частот усіх варіантів дорівнює обсягу вибірки:

$$\sum_{i=1}^m n_i = n.$$

Означення. Відносною частотою (n_i^*) значення x_i ознаки ζ називається відношення частоти n_i варіанта x_i до обсягу вибірки n :

$$n_i^* = \frac{n_i}{n} \leq 1; \quad \sum_{i=1}^m n_i^* = 1.$$

Означення. Дискретним варіаційним рядом (варіацією) називають упорядковану за зростанням значень x_i послідовність варіантів із вказівкою їх абсолютних або відносних частот і подану у вигляді таблиці (див., наприклад, табл. 9.2).

Означення. Полігоном відносних частот (див. рис. 9.1) називають лому лінію, яка з'єднує точки з координатами (x_i, n_i^*) .

Означення. Розмахом варіації (R) називають різницю між максимальним ($x_{\max}$) і мінімальним ($x_{\min}$) значеннями варіантів у вибірці:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Таблиця 9.2

Дискретний варіаційний ряд

Варіант x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_m
Частота n_i	n_1	n_2	n_3		n_m
Відносна частота n_i^*	n_1^*	n_2^*	n_3^*		n_m^*



Записати у вигляді варіаційного ряду вибірку:

3; 9; 9; 5; 3; 6; 9; 5; 5; 5; 6; 3; 6; 5; 6; 3; 3; 5; 6; 5.

Визначити розмах вибірки, побудувати полігон частот і полігон відносних частот.

• Обсяг вибірки (число її елементів) дорівнює $n = 20$. Упорядкуємо варіанти за зростанням і підрахуємо кількість повторень значень x_i у кожному варіанті, одержимо:

$$\begin{array}{llll} x_1 = 3; & x_2 = 5; & x_3 = 6; & x_4 = 9; \\ n_1 = 5; & n_2 = 7; & n_3 = 5; & n_4 = 3. \end{array}$$

Контроль обчислень виконаємо шляхом підсумовування частот варіантів:

$$\sum n_i = 20.$$

Для кожного варіанту x_i знаходимо відносну частоту: $n_i^* = n_i/n$.

Отриманий варіаційний ряд набуде вигляду (див. табл. 9.3).

Таблиця 9.3

Дискретний варіаційний ряд

x_i	3	5	6	9
n_i	5	7	5	3
n_i^*	0,25	0,35	0,25	0,15

Контроль обчислень виконаємо шляхом підсумовування відносних частот варіантів:

$$\sum n_i^* = 1.$$

Розмах вибірки одержимо:

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 9 - 3 = 6.$$

Для побудови полігону частот нанесемо отримані точки (x_i, n_i^*) із табл. 9.3 на графік (див. рис. 9.2).

Якщо обсяг вибірки великий (сотні варіантів), то дискретний варіаційний ряд стає незручною формою запису. Тоді увесь діапазон значень ознаки ζ розбивають на k часткових інтервалів, які не перетинаються, (синонім – розрядів) $[a_{i-1}; a_i)$, $(i = 1, 2, \dots, k)$.

Для кожного i -го інтервалу підраховують кількість значень x_i ознаки ζ , що потрапили в цей інтервал, – частоту інтервалу (n_i). Елемент x_i , який співпав із границею інтервалу, відносять до наступного інтервалу, а не до попереднього.

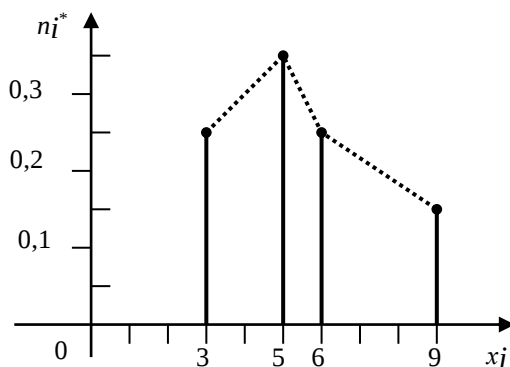


Рис. 9.1. Полігон відносних частот (див. табл. 9.3)

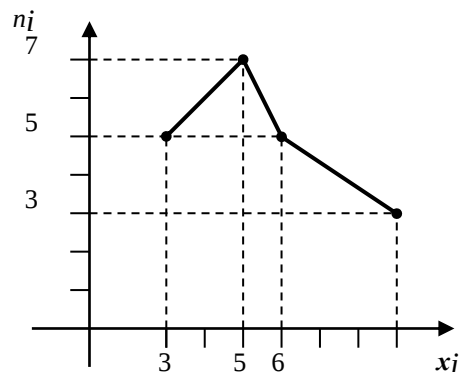


Рис. 9.2. Полігон частот (див. табл. 9.3)

Довжина розрядів може бути як однаковою, так і різною, що визначається необхідністю наявності в кожному інтервалі (розряді) *не менше* 5–10 значень випадкової ознаки ζ . Для ділянок із найбільшою щільністю значень ознаки довжина інтервалу (розряду) може бути меншою, із малою щільністю – більшою.

Раціональне число інтервалів (розрядів) складає 10–20.

Якщо до точності розрахунків немає дуже високих вимог, то частіше використовують розряди рівної довжини. Результати групування значень ознаки ζ за інтервалами записують у вигляді таблиці.

Означення. Інтервальним варіаційним рядом називається таблиця відповідності інтервалів значень (розрядів) випадкової величини ознаки ζ і частот n_i або/і відносних частот n_i^* входження значень ознаки в ці розряди, яка (таблиця) отримана за результатами

спостережень або спроб (див. табл. 9.4). Такий ряд іноді називають *безперервним* або *статистичним* рядом.

Таблиця 9.4

Інтервальний варіаційний ряд

Інтервал (розряд)	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	$[a_3; a_4)$	...	$[a_{m-1}; a_m]$
Частота n_i	n_1	n_2	n_3		n_m
Відносна частота n_i^*	n_1^*	n_2^*	n_3^*		n_m^*

Якщо в кожному інтервалі як представницьке значення ознаки ξ узяти середнє значення інтервалу: $x_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}$, ($i=1, 2, \dots, k$), то *інтервальний варіаційний* ряд можна умовно подати вже розглянутим *дискретним варіаційним* рядом. У цьому випадку в першому рядку табл. 9.4 указуються *середні* значення ознак для кожного інтервалу.

Графічно варіаційний ряд зображають у вигляді полігону частот або полігону відносних частот.



Використати 6 інтервалів рівної довжини і побудувати інтервальний варіаційний ряд розподілу за даною вибіркою:

15	18	22	26	15	10	23	27	19	18	14	15	28	6	29	7	11
26	24	19	14	15	7	27	14	19	8	20	5	29	16	10	16	5
18	20	12	16	22	23	20	21	11	16	22	22	6	18	14	11	

Потім перейти до дискретного варіаційного ряду.

- Обсяг вибірки $n = 50$.

Знайдемо розмах вибірки: $R = x_{\max} - x_{\min} = 29 - 5 = 24$.

За умовою кількість інтервалів $m = 6$, тому довжина кожного часткового інтервалу $h = R / m = 24 / 6 = 4$. Перший інтервал починається з $x_{\min} = 5$ і закінчується точкою $x_{\min} + h = 5 + 4 = 9$, значення якої до складу інтервалу *не входить*. Ця ж точка є початком другого інтервалу, до складу якого вона *входить*. Виконуючи послідовність таких же розрахунків, одержимо границі 6 інтервалів: $[5; 9)$, $[9; 13)$, $[13; 17)$, $[17; 21)$, $[21; 25)$, $[25; 29)$.

Підраховуємо кількість елементів вибірки, що потрапили в кожний із знайдених інтервалів. Елемент вибірки 21 є границею інтервалів $[17; 21)$ і $[21; 25)$. При підрахунку частоти відносимо його до інтервалу $[21; 25)$. У результаті одержимо такий інтервальний варіаційний ряд (див. табл. 9.5).

Таблиця 9.5

Інтервальний варіаційний ряд

$a_{i-1} \div a_i$	$[5 \div 9)$	$[9 \div 13)$	$[13 \div 17)$	$[17 \div 21)$	$[21 \div 25)$	$[25 \div 29]$
n_i	7	6	12	10	7	8
n_i^*	0,14	0,12	0,24	0,20	0,14	0,16
$n_i^{(n)}$	7	13	25	35	42	50
$F_n(x)$	0,00	0,14	0,26	0,50	0,70	0,84 ($F_n(x > 29) = 1$)

Контроль обчислень виконаємо шляхом підсумовування частот варіантів, тоді одержимо: $\sum n_i = 50$.

Для кожного часткового інтервалу обчислюємо відносну частоту за формулою: $n_i^* = n_i / n$ і результат заносимо в нижній рядок таблиці.

Контроль обчислень виконаємо шляхом підсумовування відносних частот варіантів, одержимо: $\sum n_i^* = 1$.

Для переходу від інтервального варіаційного ряду до дискретного варіаційного ряду візьмемо як варіанти середнє значення в кожному інтервалі: $x_i = (a_{i-1} + a_i) / 2$. Одержимо наступний дискретний варіаційний ряд:

x_i	7	11	15	19	23	27
n_i	7	6	12	10	8	7
n_i^*	0,14	0,12	0,24	0,20	0,16	0,14

Означення. Накопиченою частотою називається число $n_i^{(n)}$, що дорівнює сумі частот усіх варіантів від x_1 до x_i включно:
$$n_i^{(n)} = \sum_{q=1}^i n_q.$$

Означення. Кривою зростаючих результатів (кумулятою) називається лінія в координатах $(x_i, n_i^{(n)})$.

Для зображення інтервального варіаційного ряду використовують гістограму.

Іноді для порівняльного аналізу гістограму подають у вигляді прямокутників із площею, яка дорівнює частоті відповідних розрядів, і з основою, яка дорівнює довжині цих розрядів (див. рис. 9.3).

Означення. Гістограмою називається східчаста фігура, складена з прямокутників, які мають за основи часткові інтервали $[a_{i-1}, a_i]$, а за висоти – відносні частоти (іноді – частоти). Приклад гістограми поданий на рис. 9.3 і 9.4.

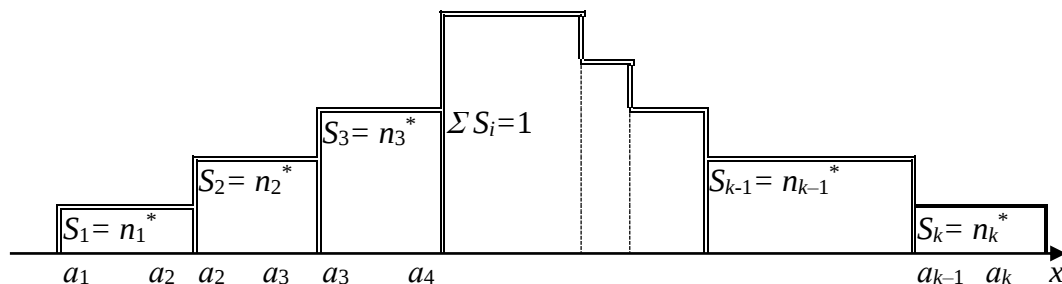


Рис. 9.3. Гістограма інтервального варіаційного ряду

9.2. Емпірична функція розподілу.

Означення. Емпіричною функцією розподілу називається функція $F_n(x)$, яка визначає для кожного значення x відносну частоту події ($\zeta < x$) і має наступні властивості:

- 1) значення функції $F_n(x)$ належать інтервалу $[0; 1]$: $0 \leq F_n(x) \leq 1$;
- 2) $F_n(x)$ – функція неспадна;
- 3) $F_n(x \leq x_1) = 0$, якщо x_1 – найменший варіант;
- 4) $F_n(x > x_m) = 1$, якщо x_m – найбільший варіант.

Розрахунковий вираз для емпіричної функції розподілу можна записати таким способом:

$$F_n(x) = \sum_{x_i < x} n_i^* ; \rightarrow F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq x_1, \\ n_1^* & \text{при } x_1 < x \leq x_2, \\ n_1^* + n_2^* & \text{при } x_2 < x \leq x_3, \\ n_1^* + n_2^* + n_3^* & \text{при } x_3 < x \leq x_4, \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ n_1^* + n_2^* + \dots + n_m^* = 1 & \text{при } x > x_m. \end{cases}$$

Вигляд емпіричної функції розподілу поданий на рис. 9.5.

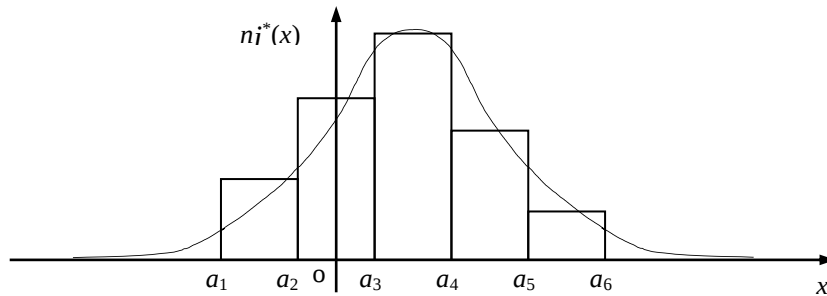


Рис. 9.4. Гістограма, загальний випадок

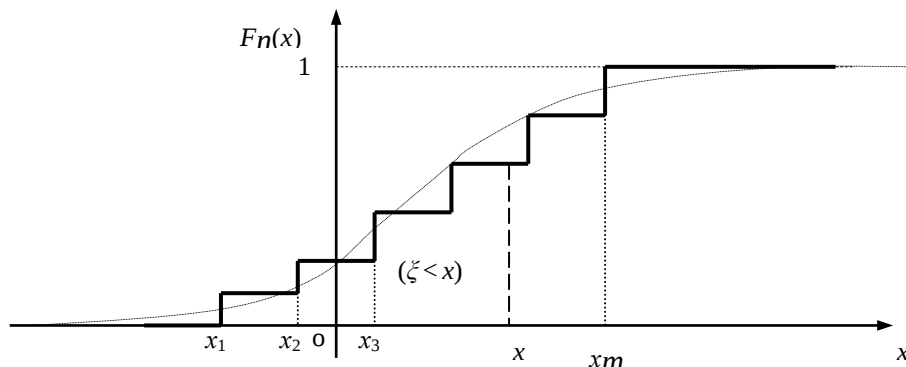


Рис. 9.5. Емпірична функція розподілу, загальний випадок



Знайти і побудувати емпіричну функцію розподілу за даним розподілом вибірки:

i	1	2	3
x_i	1	4	7
n_i	5	20	25

- Знаходимо обсяг вибірки: $n = \sum n_i = 5 + 20 + 25 = 50$.

Для кожного варіанту x_i обчислюємо відносну частоту за формулою: $n_i^* = n_i / n$ і результат заносимо в таблицю:

i	1	2	3
x_i	1	4	7
n_i^*	0,1	0,4	0,5

Контроль обчислень виконуємо шляхом підсумовування відносних частот варіантів, тоді одержимо: $\sum n_i^* = 1$.

1. Знаходимо емпіричну функцію розподілу $F_n(x)$:

якщо $x \leq x_1 = 1$, то $F_n(x) = 0$;

якщо $x_1 < x \leq x_2$, тобто $1 < x \leq 4$, то $F_n(x) = n_1^* = 0,1$;

якщо $x_2 < x \leq x_3$, тобто $4 < x \leq 7$, то $F_n(x) = n_1^* + n_2^* = 0,1 + 0,4 = 0,5$;

якщо $x > x_3$, тобто $x > 7$, то $F_n(x) = n_1^* + n_2^* + n_3^* = 0,1 + 0,4 + 0,5 = 1$.

Отже, одержимо:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ 0,1 & \text{при } 1 < x \leq 4, \\ 0,5 & \text{при } 4 < x \leq 7, \\ 1 & \text{при } x > 7. \end{cases}$$

Використовуючи отримані значення функції розподілу $F_n(x)$, будуємо графік (див. рис. 4.6).

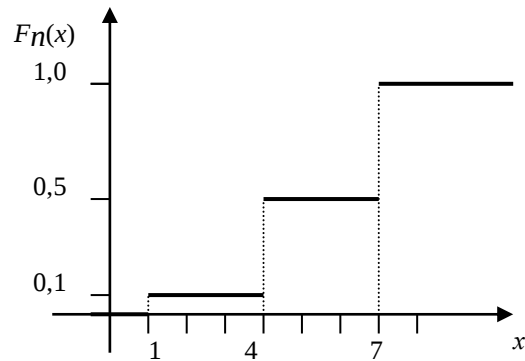


Рис. 9.6. Емпірична функція розподілу

9.3. Числові характеристики вибірки.

Означення. Вибірковим середнім (середнім арифметичним, позначається $\bar{x}$) називається середнє арифметичне значення ознаки ξ у вибірці x_i .

Коли всі значення ознаки різні, розрахункова формула має вигляд:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Коли у вибірці є частоти значень ознаки або обчислення виконуються для інтервального варіаційного ряду, тоді варто визначити: x_i – середнє значення ознаки ξ в i -му інтервалі, n_i – частоту значень ознаки в i -му інтервалі. Тоді розрахункова формула набуде вигляду:

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_m n_m}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i n_i.$$

Означення. Початковим моментом k -го порядку (v_k^*) варіаційного ряду називається середнє арифметичне від k -их ступенів варіантів x_i :

$$v_k^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^m x_i^k \cdot n_i = \sum_{i=1}^m x_i^k \cdot n_i^*, \quad v_1^* = \bar{x}.$$

Означення. Центральним моментом k -го порядку (μ_k^*) варіаційного ряду називається середнє арифметичне від k -их ступенів центрованих варіантів x_i :

$$\mu_k^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^k \cdot n_i = \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^k \cdot n_i^*.$$

Означення. Вибірковою дисперсією (дисперсією варіаційного ряду) називається середнє арифметичне квадратів відхилення варіантів x_i від свого вибіркового середнього значення, при цьому зберігаються відомі з теорії ймовірностей співвідношення:

$$D_\varepsilon = S_x^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i; \rightarrow D_\varepsilon = S_x^2 = \mu_2^* = v_2^* - (v_1^*)^2 = v_2^* - (\bar{x})^2.$$

Тут S_x – вибіркове значення середнього квадратичного відхилення варіантів x_i .

Властивості вибіркового середнього і вибіркової дисперсії збігаються з розглянутими раніше в теорії ймовірностей властивостями математичного сподівання і дисперсії випадкових величин відповідно.

9.4. Умовні варіанти.

Якщо значення x_i ознаки ξ виражаються багатозначними (великими) числами, то обчислення характеристик вибірки стає трудомістким. У такому випадку переходять до використання *умовних* варіантів, для чого від реальних значень варіантів x_i переходять до їх “центрованих” і потім “нормованих” еквівалентів u_i . Як “центр” нормування вибирають варіант із *найбільшою частотою* і позначають його величину символом a . Якщо вибірка задана у вигляді розподілу *рівновіддалених* варіантів і їх частот (x_i, n_i), то, використовуючи різницю ($h = x_i - x_{i-1}$) між двома сусідніми варіантами, умовні варіанти u_i знаходять за формулою:

$$u_i = \frac{x_i - a}{h}.$$

Далі, після здійснення розрахунків з урахуванням відомих властивостей вибіркової середньої і дисперсії:

- 1) $(\overline{k \cdot x}) = k \cdot \bar{x}; \quad D_e(k \cdot x) = k^2 \cdot D_e(x);$
- 2) $(\overline{x - a}) = \bar{x} - a; \quad D_e(x - a) = D_e(x),$

повертаються до початкової вибірки, для якої вирази початкової вибіркової середньої, дисперсії і середнього квадратичного відхилення через відповідні характеристики умовних варіантів мають вигляд:

$$\bar{x} = h \cdot \bar{u} + a; \quad D_e(x) = h^2 \cdot D_e(u); \quad S_u = \sqrt{D_e(u)}; \quad S_x = h \cdot S_u.$$

9.5. Закон великих чисел. Центральна гранична теорема.

Випадковість виходу одиничної спроби, випробування або експерименту полягає в тому, що заздалегідь передбачати її вихід і оцінити характеристики цього виходу поки не можна. Проте при великій кількості випробувань *характеристики* випадкових подій і випадкових величин втрачають випадковий характер. Ця властивість дозволяє використовувати результати спостережень за масовими явищами і *прогнозувати* можливі результати майбутніх випробувань.

Умови, за яких можна використовувати статистичні оцінки характеристик випадкових величин для оцінки їх параметрів (ймовірності, математичного сподівання, дисперсії, законів розподілу), визначаються *системою граничних теорем*, яка називається *законом великих чисел*. Розглянемо деякі з цих теорем без доведення.

Нерівність Чебишова. Нехай ξ випадкова величина з математичним сподіванням m і дисперсією D . Нерівність Чебишева стверджує, що яке б не було позитивне число α , ймовірність того, що величина ξ відхилиться від свого математичного сподівання m *не менше* ніж на α (тобто більше або дорівнює α), обмежена зверху величиною $\frac{D}{\alpha^2}$, що формально можна записати так:

$$P(|X - m| \geq \alpha) \leq \frac{D}{\alpha^2}. \quad (9.1)$$

Зокрема, якщо взяти $\alpha = 3\sigma$, то можна знайти оцінку понад ймовірності відхилення величини ξ від свого математичного сподівання не менше ніж на 3σ .

$$P(|X - m| \geq 3\sigma) \leq \frac{D}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9} \approx 0,111. \quad (9.2)$$

Відзначимо, що на практиці в більшості випадків ймовірність того, що величина ξ вийде за границі ділянки $m \pm 3\sigma$, значно менше $1/9$. Наприклад, для нормального закону ця ймовірність дорівнює $0,003$. У випадку, коли закон розподілу випадкової величини невідомий, а відомі тільки m і σ , то ділянкою практично можливих значень випадкової величини вважають відрізок $m \pm 3\sigma$ (так зване “правило трьох сигм”).

Теорема Чебишова. Якщо в n незалежних випробуваннях спостерігаються $x_1, \dots, x_n$ значень випадкової величини ξ , то при $n \rightarrow \infty$ середнє арифметичне випадкової величини ξ збігається за ймовірністю до її математичного сподівання m . Тобто при будь-якому $\varepsilon > 0$ і $\delta > 0$ виконується нерівність:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|m - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right| \geq \varepsilon\right) \leq 1 - \delta. \quad (9.3)$$

Для уточнення змісту поняття “збігається за ймовірністю” з’ясуємо, як змінюється середнє арифметичне ($\bar{x}_n$) випадкової величини ξ при збільшенні числа спроб – числа доданків під знаком суми у виразі (9.3), від значення $n-1$ до значення n , одержимо:

$$\bar{x}_{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i; \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_i = (n-1) \cdot \bar{x}_{n-1}. \quad (9.4)$$

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n \right) = \frac{1}{n} \left((n-1) \cdot \bar{x}_{n-1} + x_n \right) = \bar{x}_{n-1} + \frac{x_n - \bar{x}_{n-1}}{n}. \quad (9.5)$$

Уведемо позначення:

$$\Delta \bar{x}_n = \frac{x_n - \bar{x}_{n-1}}{n}. \quad (9.6)$$

Тоді з формули (9.5) одержимо:

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} + \Delta \bar{x}_n. \quad (9.7)$$

У підсумку, нове (наступне) значення середнього арифметичного ($\bar{x}_n$) випадкової величини ξ можна рекурентно висловити через попереднє значення її середнього арифметичного (формула (9.7)) з урахуванням виникаючого збільшення $\Delta \bar{x}_n$ (формули (9.5, 9.6)). Під знаком суми (формули (9.4, 9.5)) складаються випадкові значення (x_i), тому середнє арифметичне $\bar{x}_n$ випадкової величини ξ також буде величиною випадковою.

Змінні, що є в чисельнику в правій частині виразу (9.6) для збільшення $\Delta \bar{x}_n$, є величинами випадковими. Врахуємо діапазон ($x_{\max} \leq x_i \leq x_{\min}$) можливих значень (x_i)

випадкової величини ξ і спробуємо з'ясувати, як змінюється абсолютна величина приросту $\Delta \bar{x}_n$ при збільшенні числа спроб n . Для цього замінимо вираз в чисельнику у формулі (9.6) на явно більшу (не меншу) величину, одержимо:

$$|\Delta \bar{x}_n| \leq \left| \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n} \right|. \quad (9.8)$$

Виявляється, що після першої спроби (при $n = 1$) величина приросту може дорівнювати величині всього діапазону можливих значень (x_i), після другої спроби (при $n = 2$) – половині діапазону, після третьої ($n = 3$) – третій частині діапазону можливих значень і так далі відбувається ділення діапазону можливих значень на усе більш дрібні частини. Отже, можливий *приріст оцінок* середнього арифметичного (формула (9.7)) при збільшенні числа спроб n буде зменшуватися за відзначеним законом (9.8). Знак різниці випадкових величин, що стоять у дужках (формула (9.6)), може бути як позитивним, так і негативним, тому можна стверджувати, що *абсолютне значення приросту* оцінок не перевищує величину, яка стоїть у правій частині нерівності (9.8).

При необмеженому збільшенні числа спроб n значення величини приросту $\Delta \bar{x}_n$ (формула (9.6)), залишаючись *випадковою величиною*, буде наближатися до нуля:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta \bar{x}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - \bar{x}_{n-1}}{n} = 0. \quad (9.9)$$

Отже, *середнє арифметичне* $\bar{x}_n$ випадкової величини ξ буде *величиною випадковою* при будь-якій *кінцевій* кількості доданків ($n < \infty$). Проте при необмеженому збільшенні числа доданків ($n \rightarrow \infty$) величина $\Delta \bar{x}_n$ *додаткової випадкової складової* (формула (9.7)) зменшується аж до нуля (формула (9.9)). Тому середнє арифметичне ($\bar{x}_n$) *перестає залежати від значення випадкової добавки* $\Delta \bar{x}_n$, набуваючи нову якість, тобто перетворюючись із випадкової величини $\bar{x}_n$ в *невипадкову величину*, яка називається математичне сподівання (m) випадкової величини ξ . До цього процесу і застосовують термін – “збігається за ймовірністю”.

Із формули (9.8) шляхом диференціювання за змінною n можна одержати оцінку швидкості (V) “збіжності за ймовірністю”:

$$V = \left| \frac{d \Delta \bar{x}}{dn} \right| \leq \frac{-|x_{\max} - x_{\min}|}{n^2}. \quad (9.10)$$

Отже, швидкість “збіжності за ймовірністю” (V) негативна і обернено пропорційна квадрату обсягу n вибірки.

Приклад зміни величини приросту $\Delta \bar{u}_{n, \text{вiдн}}$ оцінок середнього арифметичного $\bar{u}_n$ випадкової величини, яка відповідає початковій величині ξ , рівномірно розподіленої у границях $x_i \in [0; 1]$, при зміні числа значень n (числа елементів у вибірці) для $x_{\min} = 0$; $x_{\max} = 1$; $C = 1$.

Теорема Бернуллі. Якщо проводиться n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може з'явитися з ймовірністю p , то частота m/n появи події A при нескінченному збільшенні числа n спроб збігається за ймовірністю до величини p , тобто при будь-якому $\varepsilon > 0$ і $\delta > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 1 - \delta,$$

де m – число позитивних виходів (число появ події A) у n випробуваннях.

Центральна гранична теорема. Якщо $\xi_1, \dots, \xi_n$ – незалежні, однаково розподілені випадкові величини, що мають математичне сподівання m_x і дисперсію σ_x^2 , то при $n \rightarrow \infty$ закон розподілу їх суми $\sum_{i=1}^n \xi_i$ нескінченно наближається до нормального.

Дана теорема може бути справедливою і для суми неоднаково розподілених, але порівнянних за своїм розкидом, доданків. На практиці її застосовують і для випадків суми від десятих доданків, а іноді і менше. При цьому не обов'язково знати закони розподілу окремих доданків, достатньо знати їх математичні сподівання і дисперсії.

Для дискретних випадкових величин окремим випадком центральної граничної теореми є теорема Лапласа.

Теорема Лапласа. Якщо в кожному з n незалежних випробувань подія A з'являється з ймовірністю p (і не з'являється з ймовірністю $q=1-p$), то границя ймовірності влучення нормованої випадкової величини m – числа появ події A у n спробах має вигляд:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a < \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} < b\right) = \Phi^*(b) - \Phi^*(a), \quad \Phi^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{v^2}{2}} dv,$$

де $\Phi^*(t)$ – функція Лапласа.

9.6. Статистичні оцінки параметрів.

Розглянуті раніше формули для статистичних оцінок фактично реалізують ідею усереднення значень оцінюваних характеристик, які (характеристики, параметри) позначимо символом E . При цьому розрізняють реальне (істинне) значення параметра E , що поки невідомо, і одержуване зі спроб значення оцінки $\tilde{E}$ цього параметра.

Означення. Оцінки, отримані в результаті статистичної обробки результатів n спостережень деякої випадкової величини ξ (у результаті n спроб), повинні задовольняти вимогам: незсуненості, ефективності та обґрунтованості.

1. Незсуненою називається оцінка $\tilde{E}$, якщо її математичне сподівання $M[\tilde{E}]$ дорівнює самому оцінюваному параметру E при будь-якому обсязі вибірки, тобто: $M[\tilde{E}] = E$.

2. Ефективною називається оцінка $\tilde{E}$, якщо вона серед усіх інших незсунених оцінок цього параметра має найменшу дисперсію даної оцінки $\tilde{E}$ щодо істинного значення E , у порівнянні з будь-якою іншою оцінкою $\tilde{E}_k$: $M[(\tilde{E} - E)^2] \leq M[(\tilde{E}_k - E)^2]$.

3. Обґрунтованою називається оцінка $\tilde{E}$, якщо в міру зростання n – числа спостережень (спроб) оцінка збігається за ймовірністю до самого оцінюваного параметра E :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\tilde{E} - E| < \varepsilon) = 1, \quad \varepsilon > 0$$

або

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M[(\tilde{E} - E)^2] = 0.$$

Можна строго показати, що оцінка математичного очікування:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (9.11)$$

є незсуненою, обґрунтованою, має дисперсію оцінки:

$$D[\bar{x}] = D[\tilde{m}] = \frac{1}{n} \cdot D_x, \quad (9.12)$$

а якщо випадкова величина ξ розподілена за нормальним законом, то дисперсія (9.12) буде мінімально можливою, тобто оцінка (9.11) – ефективна.

Дійсно, у виразі (9.11) складаються незалежні значення однієї і тієї ж випадкової величини x , що мають однакову дисперсію:

$$D_{x1} = D_{x2} = \dots = D_{xi} = D_x.$$

Застосовуючи операцію дисперсії до лівої і правої частин рівняння (9.11) і з огляду на властивості дисперсії, одержимо:

$$D[\bar{x}] = D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n^2} \cdot D\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n D_x = \frac{1}{n^2} \cdot n D_x = \frac{1}{n} \cdot D_x.$$

Оцінка вибіркової дисперсії D_{ϵ} випадкової величини ξ :

$$D_{\epsilon} = S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i.$$

є ефективною, обґрунтованою, але *зсуненою* убік менших значень у $\frac{n-1}{n}$ разів.

Для усунення цього зсуву праву частину рівності (9.12) достатньо *розділити* на зазначений множник, у підсумку одержимо так названу “виправлену” дисперсію:

$$\tilde{D}_{\epsilon. \text{випр}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{m}_x)^2 \cdot n_i = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \tilde{m}_x^2 \right] \cdot \frac{n}{n-1} = S_x^2 \cdot \frac{n}{n-1} \quad (9.13)$$

У випадку *нормального* розподілу випадкової величини ξ дисперсію самої оцінки виправленої дисперсії (9.13) і середнє квадратичне відхилення знайдемо за формулами:

$$D[\tilde{D}_x] = \frac{2}{n-1} \tilde{D}_x^2, \quad \sigma_x = \tilde{D}_x \cdot \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Одержувані статистичні (точкові) оцінки сходяться до істинних оцінок лише при *нескінченному* збільшенні числа n спроб. Отже, заміна *істинних* значень шуканих параметрів їх статистичними оцінками завжди супроводжується *помилками*. Якщо такі помилки занадто великі, то наслідки заміни можуть бути істотними. Тому потрібно вміти оцінювати точність і надійність одержуваних оцінок, особливо при малій кількості спостережень n (при малій кількості спроб).

Для визначення точності і надійності статистичних оцінок використовують поняття “довірчий інтервал” і “довірча ймовірність”.

9.7. Довірчий інтервал, довірна ймовірність.

Припустимо, що в результаті n спроб потрібно одержати статистичну оцінку $\tilde{E}$ параметра, що має реальне значення E , із похибкою не більш ε , причому надійність такої оцінки повинна характеризуватися деякою ймовірністю β .

Розглянемо подію, яка полягає в тому, що *реальне* (істинне) значення параметра E , яке поки невідоме (наприклад, математичне сподівання випадкової величини ξ), буде відрізнятися від одержуваного зі спроб значення оцінки $\tilde{E}$ цього параметра не більш, ніж на величину ε . Ймовірність такої події можна записати у такий спосіб:

$$P(\tilde{E} - \varepsilon < E < \tilde{E} + \varepsilon) = P(|\tilde{E} - E| < \varepsilon) = \beta.$$

Така рівність означає, що з ймовірністю β невідоме значення параметра E потрапляє в інтервал I_β (див. рис. 9.7):

$$I_\beta = (\tilde{E} - \varepsilon; \tilde{E} + \varepsilon).$$

Означення. Довірчим інтервалом називається встановлений інтервал I_β можливих значень оцінюваного параметра E за рівнем довірчої ймовірності β .

Означення. Довірчою ймовірністю називається встановлена ймовірність β , з якою значення невідомого параметра E потрапляє в довірчий інтервал $\pm \varepsilon$ в околі отриманої оцінки $\tilde{E}$ цього параметра.

Тоді діапазон практично можливих значень помилки, що виникає при заміні реального значення параметра E на його оцінку $\tilde{E}$, із ймовірністю β дорівнюватиме $\pm \varepsilon$. Ще більші помилки будуть з'являтися тільки з малою ймовірністю $\alpha = 1 - \beta$, значення якої (α) називається *рівнем значущості*.

Як значення довірчої ймовірності у статистиці беруть числа, близькі до одиниці: 0,95; 0,99.

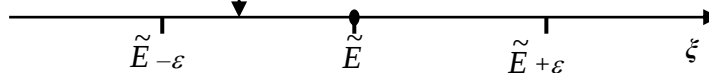


Рис. 9.7. Поняття “довірчий інтервал”



Знайти довірчі оцінки для величини $\bar{x}$ – оцінки математичного очікування випадкової величини ξ .

- Із формули для оцінки математичного сподівання:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

впливає, що ця характеристика є сумою n незалежних, однаково розподілених випадкових величин x_i . При будь-якому кінцевому значенні n сама величина $\bar{x}$ також є випадковою. Відповідно до центральної граничної теореми теорії ймовірностей (див. п. 9.5), при достатньо великому n закон розподілу суми випадкових величин близький до нормального. На практиці ця умова починає виконуватися, починаючи з $n \geq 10$. Тому можна вважати, що величина $\bar{x}$ має нормальний закон розподілу із математичним сподіванням m , дисперсією

$D[\bar{x}] = \sigma_m^2 = \frac{D_x}{n} = \frac{\sigma_x^2}{n}$ і СКВ, що дорівнюють (див. п. 9.6):

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}, \text{ де } \sigma_x^2 = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2 \right] \cdot \frac{n}{n-1} = \sigma_{x, \text{випр}}^2.$$

Знайдемо таку величину ε , для якої ймовірність відхилення оцінки $\bar{x}$ від реального значення математичного сподівання m дорівнює довірчій ймовірності β , тобто: $P(|\bar{x} - m| < \varepsilon) = \beta$.

Раніше відзначалося, що ймовірність влучення деякої нормально розподіленої випадкової величини η на інтервал $(\pm \varepsilon)$, симетричний щодо її математичного сподівання m , знаходиться як ймовірність відхилення центрованої випадкової величини $(\eta - m)$ не більш ніж на $(\pm \varepsilon)$:

$$P(|\eta - m| \leq \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \quad (9.14)$$

У даній ситуації випадковою є величина $\bar{x}$, яка має нормальний розподіл із математичним сподіванням m і середнім квадратичним відхиленням: $\sigma = \sigma_m = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$, тому формула (9.14), після підстановки цих величин, набуде вигляду:

$$P(|\bar{x} - m| < \varepsilon) = \beta = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma_x}\right), \rightarrow 2\Phi\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma_x}\right) = \beta.$$

Із цієї рівності знайдемо величину довірчого інтервалу ε :

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma_x}\right) = \frac{\beta}{2}; \rightarrow \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma_x} = \arg \Phi\left(\frac{\beta}{2}\right); \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \cdot \arg \Phi\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \cdot t_\beta,$$

де $\arg \Phi(x)$ – функція, обернена до функції $\Phi(x)$; $t_\beta = \arg \Phi\left(\frac{\beta}{2}\right)$.

Нагадаємо, що поняття оберненої функції передбачає необхідність відшукування такого значення аргументу ($x = \arg \Phi(x)$) функції $\Phi(x)$, при якому ця функція дорівнює відомому значенню, наприклад величині $\beta/2$. Як приклад скористаємося таблицею в додатку 9 і для $2\Phi(x)=0,95$ знайдемо значення аргументу x . Для цього на першому кроці з попередньо-го рівняння знайдемо значення функції $\Phi(x)=0,95/2=0,475$. На другому кроці за таблицею в додатку 9 знаходимо, що значенню функції $\Phi(x)=0,475$ відповідає значення аргументу $x=1,960$, тобто $\Phi(x=1,96)=0,475$.

Відповідно до використаних позначень виявилось наступне:

$$x = t_\beta = \arg \Phi\left(\frac{\beta}{2}\right) = \arg \Phi\left(\frac{0,95}{2}\right) = \arg \Phi(0,475) = 1,960.$$

Дані розглянутого прикладу, а також дані для інших значень β подані у табл. 9.6. Отже, величина довірчого інтервалу має вигляд:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \cdot t_\beta. \quad (9.15)$$

У підсумку, шукані границі інтервалу набудуть вигляду:

$$\bar{x} - \varepsilon < m < \bar{x} + \varepsilon,$$

де, залежно від значення довірчої ймовірності β , величина t_β табульована і приймає значення, подані в табл. 9.6.

Таблиця 9.6

Параметри взаємозв'язку довірчої ймовірності

β	0,8	0,85	0,9	0,95	0,99	0,999
$t_\beta = \arg \Phi \left(\frac{\beta}{2} \right)$	1,282	1,439	1,643	1,960	2,576	3,290
$(t_\beta)^2$	1,644	2,071	2,699	3,842	6,636	10,824

Із формули (9.15) можна знайти оцінку необхідного числа спроб n , яка дозволяє одержати необхідний розмір довірчого інтервалу ε при заданому значенні довірчої ймовірності β :

$$n = \frac{t_\beta^2 \cdot \sigma_x^2}{\varepsilon^2}. \quad (9.16)$$

Для практичної оцінки інтервалу можливих значень реального середнього значення $\bar{x}$ ознаки ξ за інформацією наявної вибірки необхідно виконати такі дії.

1. Знайти оцінку математичного сподівання $\bar{x}$ значення ознаки ξ :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

2. Знайти незсунену (виправлену) оцінку СКВ:

$$D_{x, \text{випр}} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2 \right] \cdot \frac{n}{n-1}; \quad \sigma_x = \sqrt{D_{x, \text{випр}}}.$$

3. За значенням довірчої ймовірності β із таблиці 9.6 або з доданку 9 знайти значення величини t_β .

4. Розмір довірчого інтервалу ε розрахувати за формулою:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \cdot t_\beta.$$

5. Знайти шукані границі інтервалу, що будуть мати вигляд:

$$\bar{x} - \varepsilon < m_x < \bar{x} + \varepsilon.$$

6. При необхідності, потрібну кількість спроб (обсяг вибірки n) можна оцінити за формулою (9.16):

$$n = \frac{t_\beta^2 \cdot \sigma_x^2}{\varepsilon^2}.$$

Розрахунки можливі як в абсолютних, так і у відносних величинах:

$$\delta\varepsilon = \frac{\varepsilon}{m_x} = \frac{\sigma_x}{m_x \sqrt{n}} \cdot t_\beta; \quad n = \frac{t_\beta^2}{(\delta\varepsilon)^2} \cdot \left(\frac{\sigma_x}{m_x} \right)^2.$$

При виконанні аналогічних оцінок ймовірності p події A за результатами n спроб спочатку знаходять статистичні оцінки ймовірності p^* події A як середнього значення випадкової величини $\xi = x_1 = 1$ (подія A з'явилася) і $\xi = x_2 = 0$ (подія A не з'явилася). Оцінки характеристик випадкової величини (ξ) в одній спробі дорівнюють:

$$M[x] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p;$$

$$D[x] = D_x = p \cdot q = \sigma_x^2.$$

Для серії з n спроб статистична оцінка p^* ймовірності події A може бути виконана за відомими формулами оцінки математичного сподівання і дисперсії випадкової величини (ξ):

$$p^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad q^* = 1 - p^*; \quad D[p^*] = \frac{D_x}{n} = \frac{p^* \cdot q^*}{n}; \quad \sigma_{p^*} = \sqrt{\frac{p^* \cdot q^*}{n}}.$$

Тоді далі можна задатися величиною довірчої ймовірності β (і відповідно t_β) і для загального випадку знайти границі довірчого інтервалу, використовуючи формули (4.40, 4.41):

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{p^*}}{\sqrt{n}} \cdot t_\beta, \rightarrow p^* - \varepsilon < m_x < p^* + \varepsilon.$$

Проте якщо розмір добутку np^* і nq^* більший чотирьох, то розподіл випадкової величини p^* виявляється близьким до нормального, що дозволяє визначити довірчий інтервал оцінки ймовірності p^* події A з урахуванням допустимості застосування нормального закону розподілу:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{p^* \cdot q^*}{n}} \cdot t_\beta = \sigma_{p^*} \cdot t_\beta; \quad (9.17)$$

$$p^* - \sigma_{p^*} \cdot t_\beta < p < p^* + \sigma_{p^*} \cdot t_\beta.$$

Значення t_β вибираються із табл. 9.6.

Із формули (9.17) можна знайти оцінку числа спроб n , необхідного для одержання результатів із довірчою ймовірністю β (і відповідно t_β) і з довірчим інтервалом ε :

$$n \cdot \varepsilon^2 = p^* \cdot q^* \cdot (t_\beta)^2 \rightarrow n = \frac{t_\beta^2 \cdot p^* \cdot (1 - p^*)}{\varepsilon^2}. \quad (9.18)$$



Частота появи події A (успішного складання іспиту студентом) у серії з $n = 100$ спроб (число студентів на курсі) виявилася рівною $n^* = 0,78$. Визначити 90% довірчий інтервал для ймовірності p події A .

• Перевіряємо придатність використання нормального закону, для цього оцінімо величини np і nq . Уважаючи $p \approx n^*$, одержимо:

$$np \approx n \cdot n^* = 78; \quad nq \approx n \cdot (1 - p^*) = 22.$$

Обидві величини значно більше чотирьох, отже, нормальний закон можна застосовувати. Із табл. 9.6 для значення $\beta = 0,9$ знаходимо:

$$t_\beta = 1,643 \quad D[p^*] = (0,78 \cdot 0,22) / (100 - 1) = 0,00173$$

$$\sigma_{p^*} = \sqrt{D[p^*]} = 0,041; \quad \varepsilon = t_\beta \cdot \sigma_{p^*} = 1,643 \cdot 0,041 = 0,068.$$

Із формули (9.18) одержуємо:

$$p_1 = p^* - \sigma_{p^*} \cdot t_\beta = 0,712; \quad p_2 = p^* + \sigma_{p^*} \cdot t_\beta = 0,848.$$

Тоді шуканий довірчий інтервал I_β для ймовірності p події A (успішного складання іспиту) за рівнем довірчої ймовірності $\beta = 0,9$ виявиться таким, що дорівнює:

$$I_\beta = (0,712; 0,848).$$

Чи відповідають дійсності рекламні дані про параметри того або іншого товару? Таке питання може виникнути в ході прийняття рішень щодо управління діяльністю підприємства. Відповідь на це питання можна одержати, розв'язавши задачу порівняння вибіркової середньої із значенням параметра, що анонсується. Розглянемо такий приклад.



Фірма-постачальник комплектуючих виробів у рекламному буклеті стверджує, що середній термін безвідмовної роботи запропонованого виробу знаходиться у границях від 2600 до 3100 годин і в середньому складає – 2900 годин. Перед закупівлею великої партії виробів була зроблена вибірка з 50 виробів і проведені випробування. Середній $(\bar{T}_{50})$ термін безвідмовної роботи виявився рівним 2720 годинам при “виправленому” середньому квадратичному відхиленні 361 годин. Необхідно при 5% рівні значущості:

- 1) перевірити гіпотезу про те, що значення 2900 годин дійсно є математичним сподіванням часу безвідмовної роботи виробів;
- 2) у випадку незадовільного результату перевірки оцінити:
 - яким повинно бути мінімальне значення середнього часу роботи виробів в отриманій вибірці, при якому можна було б уважати рекламні дані дійсними;
 - яким варто уважати *реальне* значення максимально можливого часу безвідмовної роботи виробу.

• Наявне число спроб $n = 50$ достатньо для того, щоб використовувати нормальний закон розподілу випадкового відхилення середнього значення від свого математичного сподівання.

1. Знайдемо розмір довірчого інтервалу середнього часу безвідмовної роботи виробу. Для цього з урахуванням 5% рівня значущості знаходимо спочатку величину $\beta = 1 - 0,05 = 0,95$, потім із табл. 4.6 знаходимо величину $t_{\beta}(0,95) = 1,96$. Далі, за наявними початковими даними $n = 50$, $\sigma_x = 361$ і $t_{\beta}(0,95) = 1,96$, знаходимо величину довірчого інтервалу для оцінки середнього значення часу справної роботи виробів за формулою:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \cdot t_{\beta} = \frac{361 \cdot 1,96}{\sqrt{50}} = \frac{707,56}{7,07} = 100 \text{ годин.}$$

У спробі відхилення склало $\Delta = 2900 - 2720 = 180$ годин, що перевершує розмір довірчого інтервалу ($180 > 100$). Отже, *фірма* в рекламі *завищує* термін безвідмовної роботи виробів.

2. Мінімальним значенням часу (T) безвідмовної роботи виробів у вибірці, при якому можна було б вважати рекламні дані дійсними, є час:

$$T = 2900 - \varepsilon = 2900 - 100 = 2800 \text{ годин.}$$

Реальне значення максимально можливого часу (T) безвідмовної роботи виробу за даними вибірки є:

$$T = 2720 + \varepsilon = 2720 + 100 = 2820 \text{ годин.}$$

У практиці страхового бізнесу і в практиці менеджменту іноді виникає необхідність оцінити ймовірність порівняно рідкісних подій, таких як аварії на виробництві, смерть застрахованої особи у результаті добре відпрацьованої і практично безпечної хірургічної операції, нещасний (або страховий) випадок природного характеру і т. ін. Причому може виявитися, що можливість розглянутого випадку теоретично існує, а реально такий випадок або не мав місця зовсім, або зафіксований один-два рази, що не дає підстав для статистичних

оцінок. Як у такій ситуації можна одержати кількісні оцінки, корисні для прийняття розв'язань, розглянемо на прикладі.

 Фірмою, що спеціалізується на транспортуванні озброєння, зроблено 100 перевірок саме довільного спрацьовування упакованого детонатора при падінні з вантажівки (подія А). Детонатор не спрацював.

1. Знайти 90% довірчу оцінку ймовірності p саме довільного *неспрацьовування* упакованого детонатора при падінні з вантажівки.

2. Скільки разів потрібно переконатися у відсутності саме довільного спрацьовування упакованого детонатора при падінні з вантажівки, щоб із гарантією 95% стверджувати, що на практиці самовибух буде не більш ніж у 5% усіх випадків падіння?

• Шукана ймовірність p появи події А при n спробах є малою величиною, що дозволяє припустити її розподіл за законом Пуассона з математичним сподіванням $a = np$.

Довірчу ймовірність *непояви* події А (появи рівно 0 разів) відповідно до першого пункту задачі можна оцінити як $1 - \beta$ і одночасно знайти цю ймовірність за формулою Пуассона:

$$P_{k=0} = e^{-np} = 1 - \beta.$$

Звідки для $\beta = 0,9$ знаходимо:

$$p = \frac{-\ln(1 - \beta)}{n} = \frac{-\ln(0,1)}{100} = \frac{2,303}{100} = 0,023.$$

Для відповіді на друге питання врахуємо, що $\beta = 0,95$; $p = 0,05$. Із тієї ж формули одержуємо необхідне число спроб n :

$$n = \frac{-\ln(1 - \beta)}{p} = \frac{-\ln(0,05)}{0,05} = \frac{2,996}{0,05} = 59,9 \approx 60.$$

9.8. Перевірка статистичних гіпотез. Критерій Пірсона.

Після виконання оцінок статистичних параметрів може виникнути *задача ідентифікації* отриманого в спробі розподілу $F^*(x)$ випадкової величини ξ з відомими теоретичними функціями розподілу. Таку задачу називають *задачею вирівнювання*.

Означення. *Задачею вирівнювання статистичних рядів* називається задача добору підходящої теоретичної функції розподілу ймовірностей або щільності ймовірностей при обробці статистичних даних. Задача може бути виконана як за методом найменших квадратів (див. п. 9.10), так і з інших міркувань, наприклад із використанням *методу моментів*.

Метод моментів передбачає виконання вимоги збігу статистичних моментів статистичного ряду випадкової величини ξ , наприклад математичного сподівання і дисперсії, із їх значеннями в теоретичній кривій розподілу ймовірностей $f(x)$. Якщо крива лінія $f(x)$ залежить від двох параметрів, то можна підібрати їх так, щоб співпали перші два моменти і так далі – до чотирьох моментів. *Точність* розрахунків моментів вище четвертого порядку різко спадає, тому їх застосування вважається недоцільним.

Після вирівнювання статистичного розподілу $F^*(x)$ за допомогою теоретичної кривої $F(x)$ можна помітити, що між цими кривими є розбіжності.

Тому виникає таке питання: чи є отримані розбіжності випадковими, пов'язаними з недостатньою кількістю спроб, або вони вказують на невідповідність підбраної теоретичної кривої лінії $F(x)$ реальному розподілу $F^*(x)$.

Формалізуємо цю ситуацію у вигляді такої гіпотези H_0 : випадкова величина ξ має інтегральний закон розподілу $F(x)$.

Для відповіді на питання “Дану гіпотезу H_0 варто прийняти або спростувати?” служать так називані “критерії згоди”.

9.8.1. Критерій Пірсона (критерій χ^2).

Нехай за вибіркою обсягу n побудований дискретний (див. табл. 9.7) або інтервальний (див. табл. 9.8) варіаційний ряд,

Таблиця 9.7

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_m
n_i^*	n_1^*	n_2^*	$\dots$	n_m^*

Таблиця 9.8

$a_{i-1} \div a_i$	$a_1 \div a_2$	$a_2 \div a_3$	$\dots$	$a_{m-1} \div a_m$
n_i^*	n_1^*	n_2^*	$\dots$	n_m^*

де n_i^* ($i = 1, 2, \dots, m$) – відносні частоти, причому $\sum n_i^* = 1$.

Перевіряється гіпотеза H_0 , яка підтверджує, що вибіркова сукупність має конкретний закон $F(x)$ розподілу. Таким законом може бути нормальний закон, закон Пуассона і т. ін.

Процедура застосування критерію Пірсона (критерію χ^2) складається з таких етапів.

1. За варіантним рядом знаходяться “реальні” оцінки невідомих параметрів *припущеного* теоретичного закону розподілу $F(x)$.

2. Визначаються *теоретичні* частоти на основі припущеного закону $F(x)$ розподілу в такий спосіб.

Якщо ξ – дискретна випадкова величина, то обчислюються ймовірності *кожного* значення цієї величини $p_i = p(\xi = x_i)$.

Якщо ξ – безперервна випадкова величина, то обчислюються *ймовірності влучення* значень x_i випадкової величини ξ у кожний i -й інтервал, тобто: $p_i = P(a_{i-1} < x_i < a_i) = F(a_i) - F(a_{i-1})$.

Потім за знайденими ймовірностями p_i і обсягом вибірки n розраховуються значення *теоретичних* частот n_i^T за формулою:

$$n_i^T = n \cdot p_i.$$

Значення $(n \cdot p_i)$ може бути дробовим числом, а частота n_i^T повинна виражатися цілим числом, тому за теоретичну частоту n_i^T можна взяти найближче до $(n \cdot p_i)$ ціле число, причому $\sum n_i^T = n$.

3. За *кількісну міру* ступеня збігу теоретичного закону розподілу з законом розподілу у вибірковій сукупності (у якості “критерію” перевірки істинності нульової гіпотези H_0) приймається випадкова величина χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - n_i^T)^2}{n_i^T}.$$

Підставляючи в цю формулу *отримані* з вибірки емпіричні частоти n_i і обчислені *теоретичні* частоти n_i^T , знаходять значення випадкової величини χ^2 , яку можна позначити як $\chi^2_{\text{спост}}$.

4. Розраховується число ступенів свободи r . Виявляється, що закон розподілу випадкової величини χ^2 визначається *одним* параметром r – *числом ступенів свободи*, яке обчислюється за формулою:

$$r = m - k - 1,$$

де m – кількість *варіантів* або інтервалів заданого варіаційного ряду,

k – кількість *параметрів* припущеного теоретичного розподілу, які (*параметри*) оцінюються за вибіркою. Число k є кількістю умов, що “обмежують свободу”.

Ще однією умовою (обмеженням) *завжди* є умова нормування, тому в правій частині відзначеної формули є величина “–1”.

Зокрема, якщо припущений розподіл – *нормальний*, то оцінюють *два* параметри (математичне сподівання a випадкової величини і середнє квадратичне відхилення σ), тому $k = 2$ і число ступенів свободи виявляється рівним $r = m - 3$.

Якщо припускають, що генеральна сукупність розподілена за законом Пуассона, то оцінюють один параметр λ , тому $k = 1$ і $r = m - 2$.

5. За заданим рівнем значущості α і числом ступенів свободи r , використовуючи таблицю критичних точок розподілу χ^2 , знаходять критичну точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, r)$.

6. Якщо $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{кр}}(\alpha, r)$ – то вважається, що розбіжності в спробі виявилися навіть меншими теоретичних і тому підстав відкинути гіпотезу H_0 немає.

7. Якщо $\chi^2_{\text{спост}} > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha, r)$ – то гіпотезу H_0 відхиляють.

Зауваження. Для застосування критерію Пірсона необхідно, щоб обсяг вибірки n був достатньо великий ($n \geq 50$). Крім того, частоти n_i повинні бути $n_i \geq 5$. Тому частоти $n_i < 5$ варто об’єднати в більш численний інтервал. У цьому випадку і відповідні їм теоретичні частоти n_i^T варто об’єднати.



Для упорядкування графіка роботи співробітників досліджу-вана кількість клієнтів, що звернулися у фірму в першій половині робочого дня. Результати дослідження числа клієнтів залежно від часу роботи подані в табл. 9.9.

Таблиця 9.9

Номер інтервалу часу, i	1	2	3	4
Часи роботи ($a_i; a_{i+1}$)	9–10	10–11	11–12	12–13
Кількість клієнтів (n_i)	6	20	35	15

При рівні значущості $\alpha = 0,05$ потрібно перевірити гіпотезу H_0 про те, що кількість клієнтів, які звернулися у відзначені часи роботи, має нормальний розподіл.

• У даному випадку значеннями безперервної випадкової величини ξ є відліки моментів часу (x_i) *приходу клієнтів* в офіс фірми, які (відліки) можуть потрапити в різні часи роботи і сформувані в такий спосіб кількість значень випадкової величини ξ , що потрапили у від-повідний інтервал часу. Ці значення вже згруповані за $m = 4$ інтервалами, що дозволяє вважати середину кожного інтервалу – представницьким значенням усіх значень випадкової величини, що потрапили в цей інтервал. Процес розв’язання оформимо у вигляді таблиці (див. табл. 9.10).

Відзначимо, що застосування критерію Пірсона потребує, щоб частоти були не менше 5, тобто $n > 5$. В іншому випадку необхідно об'єднати інтервали до одержання необхідних частот. У випадку даного прикладу такої необхідності немає.

1. За варіантним рядом (див. табл. 9.9) знаходимо “реальні” оцінки невідомих параметрів *припущеного* теоретичного, у даному випадку – нормального закону розподілу $F(x)$. Для цього спочатку знайдемо загальну кількість клієнтів, що відвідали офіс фірми (див. табл. 9.10, рядок 3):

$$n = \sum_{i=1}^4 n_i = 76.$$

Далі знайдемо середні (представницькі) значення (x_{icp}) для кожного інтервалу (див. табл. 9.10, рядок 4). Потім домножимо кожне з цих середніх значень (x_{icp}) на кількість випадкових величин (n_i), що потрапили в цей інтервал (див. табл. 9.10, рядок 5), і знайдемо їх суму, яка дозволяє розрахувати оцінку математичного сподівання моментів часу появи клієнтів в офісі фірми:

$$\bar{x} = \tilde{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^4 x_{icp} \cdot n_i = \frac{857}{76} = 11,276.$$

Для оцінки середнього *квадратичного* відхилення (S_x) моментів часу появи клієнтів спочатку (див. табл. 9.10, рядок 6) домножимо *квадрат* кожного із середніх значень інтервалів на кількість випадкових величин, які потрапили в цей інтервал ($x_{icp}^2 \cdot n_i$), і знайдемо їх суму, що дозволяє розрахувати оцінку другого початкового моменту випадкового часу появи клієнтів в офісі фірми:

$$\tilde{M}[x^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^4 x_{icp}^2 \cdot n_i = \frac{9719}{76} = 127,882.$$

Потім знайдемо оцінки дисперсії зсунутої і виправленої:

$$\tilde{D}_e = \tilde{M}[x^2] - \tilde{m}_x^2 = 127,882 - 127,148 = 0,726;$$

$$\tilde{D}_{e.випр} = \frac{n}{n-1} \cdot \tilde{D}_e = \frac{4}{3} \cdot 0,726 = 0,968,$$

що дозволяє одержати оцінку виправленого (незсуненого) середнього квадратичного відхилення:

$$S_x = \sigma_{x.випр} = \sqrt{\tilde{D}_{e.випр}} = \sqrt{0,968} = 0,984.$$

2. Визначаємо *теоретичні* частоти на основі припущеного закону $F(x)$ розподілу в такий спосіб.

В даному випадку ξ – моменти часу приходу клієнтів в офіс фірми – безперервна випадкова величина, тому обчислюємо *ймовірності влучення* значень x_i випадкової величини ξ у кожний i -й інтервал, тобто $p_i = P(a_i < x_i < a_{i+1}) = F(a_{i+1}) - F(a_i)$, для чого скористаємося функцією Лапласа і відомим виразом оцінки ймовірності влучення випадкової величини на інтервал $(a; b)$:

$$P(a < x < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),$$

одержимо формулу:

$$n \cdot \varepsilon^2 = p^* \cdot q^* \cdot (t_\beta)^2 \rightarrow n = \frac{t_\beta^2 \cdot p^* \cdot (1 - p^*)}{\varepsilon^2}. \quad (9.19)$$

У (9.19) аргументами є нормовані границі інтервалів. Тому далі знайдемо значення нормованих границь цих інтервалів (див. табл. 9.10, рядки 7, 8) і, скориставшись таблицею $\Phi(x)$ – значень функції Лапласа (додаток 9), запишемо відповідні значення (див. табл. 9.10, рядки 9 і 10). Відзначимо, що для невід’ємного значення аргументу варто використовувати властивість непарності функції: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. У наступному рядку знайдемо різницю значень функції Лапласа для кожного інтервалу, що і є теоретичною оцінкою ймовірності (p_i) влучення значень випадкової величини в кожний інтервал (див. табл. 9.10, рядок 11).

Таблиця 9.10

Схема оцінки правдоподібності гіпотези про нормальний розподіл
безперервної випадкової величини

№ п/п	Параметри, що розраховуються	i				Σ	M[*]
		1	2	3	4		
1	a_i	9	10	11	12		
2	a_{i+1}	10	11	12	13		
3	n_i	6	20	35	15	76	
4	x_{icp}	9,5	10,5	11,5	12,5		
5	$x_{icp} \cdot n_i$	57	210	402,5	187,5	857	11,276
6	$x_{icp}^2 \cdot n_i$	541,5	2205	4629	2344	9719	127,882
7	$x_{min,i}^H = (a_i - \bar{x})/S_x$	-2,313	-1,297	-0,281	0,735	$\tilde{D}_g =$	0,726
8	$x_{max,i}^H = (a_{i+1} - \bar{x})/S_x$	-1,297	-0,281	0,735	1,752	$\tilde{D}_{в.випр}$	0,968
9	$\Phi(x_{min,i}^H)$	-0,490	-0,403	-0,111	0,269	$S_x =$	0,984
10	$\Phi(x_{max,i}^H)$	-0,403	-0,111	0,269	0,460		
11	p_i	0,087	0,292	0,380	0,191	0,950	
12	n_i^T	6,609	22,201	28,843	14,526		
13	$n_i - n_i^T$	-0,609	-2,201	6,157	0,474		
14	$(n_i - n_i^T)^2 / n_i^T$	0,056	0,218	1,314	0,016	1,604 =	$\chi_{спост}^2$

Потім за знайденими ймовірностями p_i і обсягом вибірки $n = 71$ розрахуємо (див. табл. 9.10, рядок 12) значення *теоретичних* частот n_i^T за формулою: $n_i^T = n \cdot p_i$.

3. За заданими в умові емпіричними частотами n_i (див. табл. 9.10, рядок 3) і отриманими теоретичними частотами n_i^T (див. табл. 9.10, рядок 12) обчислюємо величину $\chi_{спост}^2$. Для цього попередньо для кожного інтервалу знайдемо (див. табл. 9.10, рядок 13) різницю між емпіричною і теоретичною частотою влучення випадкової величини в цей інтервал: $(n_i - n_i^T)$. Потім знайдемо *окремі доданки* (див. табл. 9.10, рядок 14) для визначення значення показника “Хі-квадрат”:

$$\chi_i^2 = \frac{(n_i - n_i^T)^2}{n_i^T}$$

і потім розрахуємо суму цих значень, що і є шуканою величиною для оцінки правдоподібності початкової гіпотези:

$$\chi^2_{\text{спост}} = \sum_{i=1}^4 \frac{(n_i - n_i^T)^2}{n_i^T} = 1,604.$$

У вибірці з $m=4$ інтервалів оцінювалися два ($k=2$) параметри – $\bar{x} = \tilde{m}$ і S_x , тому кількість ступенів свободи r дорівнюватиме:

$$r = m - k - 1 = 4 - 2 - 1 = 1.$$

За таблицею знаходимо критичне значення:

$$\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, r) = \chi^2_{\text{кр}}(0,05; 1) = 3,84; \quad \chi^2_{\text{спост}} = 1,604.$$

Значення $\chi^2_{\text{спост}} = 1,604$, тобто $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{кр}}(\alpha, r)$, тому гіпотеза H_0 про те, що кількість клієнтів (випадкова величина ξ) має нормальний розподіл – *приймається*.



При $n=757$ випробувань блоків радіоелектронної апаратури отримані і наведені в табл. 9.11 дані про кількість відмов на один блок.

Таблиця 9.11

Кількість відмов (x_i)	0	1	2	3	4	5	≥ 6
Кількість випадків (n_i)	427	235	72	21	1	1	0

За рівнем значущості $\alpha = 0,05$ потрібно перевірити гіпотезу H_0 про те, що кількість відмов має розподіл Пуассона:

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$$

• 1. Знайдемо оцінку параметра λ розподілу Пуассона, яка дорівнює середньому числу відмов. Процес розв'язання оформимо у вигляді розрахункових таблиць 9.12–9.14.

Із табл. 9.12 знаходимо середнє число відмов: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i n_i}{\sum_{i=1}^7 n_i} = \frac{451}{757} = 0,6.$

Отже, теоретичний закон розподілу числа відмов блоків апаратури має вигляд:

$$p_i = p(\xi = x_i) = \frac{(0,6)^{x_i}}{x_i!} e^{-0,6}, \quad x_i = 0, 1, \dots, 5.$$

Таблиця 9.12

Таблиця 9.13

Таблиця 9.14

i	x_i	n_i	$x_i n_i$	p_i	np_i	n_i^T	n_i	n_i^T	$(n_i - n_i^T)^2$	$(n_i - n_i^T)^2 / n_i^T$
1	0	427	0	0,5488	415,4504	416	427	416	121	0,291
2	1	235	235	0,3293	249,2702	249	235	249	196	0,787
3	2	72	144	0,0988	74,78107	75	72	75	9	0,120
4	3	21	63	0,0198	14,95621	15	23	17	36	2,118
5	4	1	4	0,0030	2,243432	2				
6	5	1	5	0,0004	0,269212	0				
7	6	0	0							
Σ		757	451			757			$\chi^2_{\text{спост}} = 3,316$	

2. На основі отриманого теоретичного закону розподілу знаходимо теоретичні частоти n_i^T , для чого складемо розрахункову табл. 9.13. Ймовірність p_i знаходимо або за таблицею, або обчислюємо за формулою Пуассона для всіх значень x_i .

3. За заданими в умові емпіричними частотами n_i і отриманими теоретичними частотами n_i^T обчислюємо величину $\chi^2_{\text{сност.}}$:

$$\chi^2_{\text{сност.}} = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - n_i^T)^2}{n_i^T}.$$

Для цього складемо розрахункову таблицю (див. табл. 9.14), об'єднавши останні три рядки з рядком для $x_i = 3$, тому що застосування критерію Пірсона потребує, щоб частоти не були малими.

У вибірці оцінювався один параметр λ , тому число ступенів свободи r дорівнюватиме:

$$r = m - k - 1 = 4 - 1 - 1 = 2.$$

За таблицею знаходимо критичне значення:

$$\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, r) = \chi^2_{\text{кр}}(0,05; 2) = 5,99.$$

Отримане в спробі $\chi^2_{\text{сност.}} = 3,316$, і це значення виявляється меншим критичного, тобто $\chi^2_{\text{сност.}} < \chi^2_{\text{кр}}(\alpha, r)$, тому гіпотеза H_0 про розподіл кількості відмов блоків апаратури за законом Пуассона *приймається*.

9.9. Вибіркове рівняння прямої лінії регресії.

Математична формалізація реальних процесів у вигляді функціональної залежності однієї змінної (функції y) від іншої змінної (аргументу x) $y = f(x)$ дозволяє кожному значенню аргументу однозначно поставити у відповідність одне заздалегідь відоме значення функції. Така залежність, як правило, є оборотною, тобто за відомим значенням функції завжди можна знайти відповідне значення її аргументу: $x = f^{-1}(y)$.

Проте на практиці реальні процеси демонструють іншу відповідність змінних. Так за один і той же робочий час тим самим підприємством може бути зроблена різна кількість продукції, та сама продукція може мати різну собівартість, та сама кількість продукції може бути продана за різну ціну, люди того самого зросту можуть мати різну вагу.

У підсумку, *тому* самому значенню аргументу x можуть відповідати *різні* значення функції y . Часто значення функції носять характер випадкових величин, які при зміні значень аргументу можуть мати різні центри групування, дисперсію і закон розподілу. У цьому випадку зворотне перетворення з метою відшукування значення аргументу x за відомим значенням функції y не є однозначним.

Для встановлення залежності між такими неоднозначними змінними використовують теорію кореляційно-регресійного аналізу, у якій досліджуються зміни середніх значень функції при зміні одного або багатьох аргументів. Проте формальні методи кореляційного аналізу не дають відповіді на питання “що є причиною, а що є наслідком або яка змінна є аргументом, а яка – функцією?”. Відповідь на це питання має дати дослідник.

Метою побудови регресійних моделей може бути встановлення залежності між *середніми* значеннями двох змінних (параметрів), одну з яких дослідник *призначає* функцією, а другу – її аргументом.

У основі регресійного аналізу лежать дві гіпотези.

1. Передбачається, що досліджувана сукупність параметрів має внутрішній статистичний зв'язок, який може бути виявлений і формалізований у вигляді кореляційної (отже лінійної) залежності одного параметра від іншого або від інших. Тобто вважається, що існує внутрішній лінійний зв'язок *середніх* значень цих параметрів.

2. Передбачається, що випадковий розкид (дисперсія) значень (кожного) параметру має регулярну компоненту, яка залежить від деякого аргументу ("сигналу"), і випадкову компоненту ("шум"). Випадкова компонента ("шум") розподілена за нормальним законом.

Початковою інформацією для побудови лінійної однофакторної регресійної моделі є сукупність із n двовимірних точок (x_i, y_i) , де кожна координата точки, як правило, має свій фізичний сенс, наприклад x_i – зріст людини в сантиметрах, y_i – її вага в кілограмах.

Під час формалізації постановки задачі розглянемо двовимірну випадкову величину (X, Y) , над якою проведено n незалежних випробувань і в результаті випробувань отримана вибірка – n пар чисел (координат точки):

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n),$$

де x_i – значення випадкової величини X у i -му випробуванні;

y_i – значення випадкової величини Y у i -му випробуванні.

Необхідно знайти *наближене* зображення значень однієї з випадкових величин як функції значень другої випадкової величини.

Означення. Вибірковим рівнянням регресії Y на X ($y \rightarrow x$) називається рівняння, яке встановлює залежність змінної y від змінної x , тобто коли змінна y вважається *функцією*, а змінна x – *аргументом*: $y = f(x)$, при цьому початковою інформацією є вибірка з n пар чисел.

Означення. Вибірковим рівнянням регресії X на Y ($x \rightarrow y$) називається рівняння $x = \varphi(y)$, у якому при тій же початковій інформації вже змінна x вважається *функцією*, а змінна y – її *аргументом*.

Означення. Лінійною називається регресія у випадку, коли залежності $f(x)$ і $\varphi(y)$ є лінійними функціями. Тоді рівняння регресії мають вигляд:

$$y = a \cdot x + b; \quad x = c \cdot y + d.$$

Порядок розрахунку параметрів рівняння регресії розглянемо без виведення і для двох варіантів умов: при відсутності і при наявності збіжних точок у вибірці.

1. Нехай серед точок (x_i, y_i) вибірки збіжних точок немає. Для того щоб скласти вибіркове рівняння прямої лінії регресії, виконуються наступні розрахунки:

а) обчислюються середні значення величин: $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\overline{x \cdot y}$, $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ і знаходяться середні квадратичні відхилення $S_x = \sigma_x$, $S_y = \sigma_y$ із використанням формул, перерахованих з обліком доцільної послідовності їх застосування:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; & \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; & \overline{x^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2; & \overline{y^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2; \\ \overline{x \cdot y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i; & S_x^2 &= \overline{x^2} - (\bar{x})^2; & S_x &= \sqrt{S_x^2}; & S_y^2 &= \overline{y^2} - (\bar{y})^2; & S_y &= \sqrt{S_y^2}; \end{aligned}$$

б) обчислюється значення вибіркового коефіцієнту кореляції r :

$$r = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y}.$$

Нагадаємо, що вибіровий коефіцієнт кореляції характеризує рівень лінійного кореляційного зв'язку двох випадкових величин. Чим ближче $|r|$ до одиниці, тим більш сильним є зв'язок двох величин, чим ближче $|r|$ до нуля, тим зв'язок слабше;

в) для одержання рівняння регресії Y на X : $y = a \cdot x + b$ обчислюємо коефіцієнти a і b даного рівняння за формулами:

$$a = r \frac{S_y}{S_x}; \quad b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}.$$

Для одержання рівняння регресії X на Y : $x = c \cdot y + d$ обчислюємо коефіцієнти c і d даного рівняння за формулами:

$$c = r \frac{S_x}{S_y}; \quad d = \bar{x} - c \cdot \bar{y}.$$

Обидві прямі лінії $y = a \cdot x + b$ і $x = c \cdot y + d$ проходять через точку $(\bar{x}, \bar{y})$. Для зображення обох прямих ліній на одному графіку друге рівняння варто подати у вигляді: $y = x/c - d/c$.

2. При великій кількості точок n у вибірці значення x_i може зустрітися m_i разів, значення y_j може зустрітися n_j разів. Та сама пара чисел (x_i, y_j) може зустрітися n_{ij} разів. У цьому випадку вибірку зручно подати у вигляді кореляційної таблиці (див. табл. 9.15) так, що кількість повторень m_i значень координат x_i , кількість повторень n_j значень координат y_j і обсяг вибірки n дорівнюватимуть:

$$m_i = \sum_{j=1}^{\ell} n_{ij}, \quad n_j = \sum_{i=1}^k n_{ij}; \quad n = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} n_{ij} = \sum_{j=1}^{\ell} n_j = \sum_{i=1}^k m_i = n.$$

Таблиця 9.15

Кореляційна таблиця

x_i	Y_j				m_i
	y_1	y_2	$\dots$	y_{ℓ}	
x_1	n_{11}	n_{12}	$\dots$	$n_{1\ell}$	m_1
x_2	n_{21}	n_{22}	$\dots$	$n_{2\ell}$	m_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_k	n_{k1}	n_{k2}	$\dots$	$n_{k\ell}$	m_k
n_j	n_1	n_2	$\dots$	n_{ℓ}	n

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії знаходимо аналогічно першому випадку, розрахунки величин $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\overline{x \cdot y}$, $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ виконуємо з урахуванням наявності повторюваних значень змінних за формулами:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i \cdot m_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\ell} y_i \cdot n_j;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot m_i; \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\ell} y_i^2 \cdot n_j; \quad \overline{x \cdot y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} x_i \cdot y_i \cdot n_{ij}.$$

Якщо розглядається вибірка з генеральної сукупності безперервних випадкових величин X і Y , то кореляційна таблиця буде містити інтервали $[a_{i-1}, a_i]$ і $[b_{j-1}, b_j]$.

У цьому випадку для обчислення величин $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\overline{x \cdot y}$, $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ спочатку потрібно перейти до дискретних рядів, а потім виконати обчислення за розглянутими вище формулами.

Зауваження. Якщо значення координат точок (x_i, y_j) є дуже великими або дуже маленькими числами, то при обчисленні значень величин $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\overline{x \cdot y}$, $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ можна спочатку перейти до розглянутих раніше (див. п. 9.4) умовних варіантів u_i і v_j :

$$u_i = \frac{x_i - \alpha}{p}, \quad v_j = \frac{y_j - \beta}{q}$$

і знайти їх середні значення $\bar{u}$, $\bar{v}$ і S_u , S_v , а потім знайти середні значення початкових координат $\bar{x}$, $\bar{y}$ та їх середніх квадратичних відхилень S_x , S_y :

$$\bar{x} = p \cdot \bar{u} + \alpha, \quad \bar{y} = q \cdot \bar{v} + \beta; \quad S_x = p \cdot S_u, \quad S_y = q \cdot S_v.$$

Перехід до умовних варіантів не змінює величину вибіркового коефіцієнту кореляції, тому $r_{xy} = r_{uv} = r$.



Знайти вибіркові рівняння прямих ліній регресії Y на X і X на Y за даними таблиці спостережень (див. табл. 9.16)

Таблиця 9.16

Таблиця спостережень

x	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

- Складемо розрахункову таблицю (див. табл. 9.17).

Таблиця 9.17

Розрахункова таблиця

i	x_i	y_j	x_i^2	y_j^2	$x_i y_j$
1	1,00	1,25	1,00	1,56	1,25
2	1,50	1,40	2,25	1,96	2,10
3	3,00	1,50	9,00	2,25	4,50
4	4,50	1,75	20,25	3,06	7,88
5	5,00	2,25	25,00	5,06	11,25
Σ	15,00	8,15	57,50	13,90	26,98
Σ/n	3	1,63	11,5	2,779	5,395

За допомогою таблиці знаходимо оцінки середніх значень:

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{15}{5} = 3; \quad \bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 y_j = \frac{8,15}{5} = 1,63; \quad \overline{xy} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i \cdot y_i = \frac{26,975}{5} = 5,395;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i^2 = \frac{57,5}{5} = 11,5; \quad \overline{y^2} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i^2 = \frac{13,897}{5} = 2,779.$$

Потім визначаємо значення середніх квадратичних відхилень:

$$S_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{11,5 - 9} = \sqrt{2,5} = 1,58;$$

$$S_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\overline{y})^2} = \sqrt{2,779 - 2,657} = \sqrt{0,122} = 0,35.$$

Знайдемо вибіркового коефіцієнт кореляції:

$$r = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{5,395 - 3 \cdot 1,63}{1,58 \cdot 0,35} = \frac{0,505}{0,553} = 0,913.$$

Для вибіркового рівняння прямої лінії регресії Y на X , що має вигляд $y = a \cdot x + b$, обчислимо значення коефіцієнтів a і b за відомими формулами, одержимо:

$$a = r \frac{S_y}{S_x} = 0,913 \cdot \frac{0,35}{1,58} = 0,202;$$

$$b = \overline{y} - a \cdot \overline{x} = 1,63 - 0,202 \cdot 3 = 1,63 - 0,606 = 1,024.$$

Остаточно вибіркве рівняння прямої лінії регресії Y на X набуде вигляду:

$$y = 0,202 \cdot x + 1,024.$$

Для одержання рівняння регресії X на Y : $x = c \cdot y + d$ обчислюємо коефіцієнти c і d за формулами:

$$c = r \frac{S_x}{S_y} = 0,913 \cdot \frac{1,58}{0,35} = 4,122; \quad d = \overline{x} - c \cdot \overline{y} = 3 - 4,122 \cdot 1,63 = -3,719.$$

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y набуде вигляду:

$$x = 4,122 \cdot y - 3,719.$$

Для побудови даного рівняння в тій же системі координат, що і рівняння регресії Y на X , скористаємося варіантом перерахунку $y = x/c - d/c$ і виразимо змінну y через змінну x , одержимо:

$$y = 0,242 \cdot x + 0,902.$$

9.10. Метод найменших квадратів.

У ряді практичних задач обробки результатів вимірів, у тому числі значень випадкових величин, виникає необхідність згладженого подання значень однієї величини (наприклад, величини y), як функції іншої величини (наприклад, величини x). Одним із найбільш поширених способів такого наближеного зображення є метод найменших квадратів.

За допомогою методу найменших квадратів розв'язується задача добору такої аналітичної залежності $y(x) = \Psi_m(x, a_0, a_1, \dots, a_m)$, графік якої *не обов'язково* проходив би через усі задані точки, але максимально "згладжував" би випадкові похибки вимірюваних ординат функції $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), тобто щоб сума квадратів відхилень значень аналітичної залежності $\Psi_m(x, a_0, a_1, \dots, a_m)$ від значень вимірюваних ординат $y_i = f(x_i)$ у цих точках була мінімальною:

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - \Psi_m(x_i)]^2 \Rightarrow \min. \Psi_m(x_i). \quad (9.20)$$

Апроксимація за методом найменших квадратів виконується у два етапи:

- на першому етапі вибирають вигляд $\Psi_m(x, a_0, \dots, a_m)$ шуканої формули;
- на другому етапі для формули обраного вигляду “підбирають” значення параметрів $a_0, a_1, \dots, a_m$, виходячи з вимоги (9.20).

Процес добору полягає в одержанні системи з $(m + 1)$ -го рівняння для визначення значень усіх $(m + 1)$ параметрів $a_0, a_1, \dots, a_m$.

Виходячи з вимоги мінімізації відхилення значень $\Psi_m(x_i)$ від значень $y_i = f(x_i)$, система рівнянь формується шляхом відшукування похідних за кожним параметром (a_k) від рівняння (9.20) і прирівнювання їх до нуля:

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - \Psi_m(x_i, a_0, \dots, a_k, \dots, a_m)] \cdot \left(\frac{d \Psi_m}{d a_k} \right)_{x_i} = 0; \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

Розділивши ліву і праву частини на множник (-2) , який “заважає”, одержимо:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - \Psi_m(x_i, a_0, \dots, a_k, \dots, a_m)] \cdot \left(\frac{d \Psi_m}{d a_k} \right)_{x_i} = 0; \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (9.21)$$

де $\left(\frac{d \Psi_m}{d a_k} \right)_{x_i} = \Psi'_{a_k}(x_i, a_0, \dots, a_k, \dots, a_m)$ – значення часткової похідної від функції Ψ_m за параметром a_k у точці x_i .

Для розв’язання системи рівнянь (9.21) потрібно задатися конкретним видом апроксимуючої функції Ψ_m .

9.10.1. Лінійна апроксимація.

У цьому випадку $\Psi'_{a_0} = 1$; $\Psi'_{a_1} = x$. Тоді рівняння (9.21) набуде вигляду:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1 x_i)] = 0; \quad \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1 x_i)] x_i = 0.$$

У цьому рівнянні розкриємо дужки і зробимо підсумовування, що дозволяє одержати:

$$\sum_{i=1}^n y_i - n \cdot a_0 - a_1 \sum_{i=1}^n x_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i - a_0 \sum_{i=1}^n x_i - a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0.$$

Розділивши ліву і праву частини кожного рівняння на кількість точок n , одержимо:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - a_0 - a_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 0; \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - a_0 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - a_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0.$$

Доданки в цих виразах дорівнюють:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = m_y = \overline{y}; \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = m_x = \overline{x}; \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i = \alpha_{11} = \overline{xy}; \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \alpha_{2x} = \overline{x^2}$$

і мають сенс оцінок математичних сподівань (m_x, m_y), змішаного початкового другого моменту (α_{11}) і початкового другого моменту (α_{2x}), тому система рівнянь для пошуку значень коефіцієнтів a_0 і a_1 може бути записана більш компактно:

$$\left. \begin{aligned} m_y - a_0 - a_1 \cdot m_x &= 0, \\ \alpha_{11} - a_0 \cdot m_x - a_1 \cdot \alpha_{2x} &= 0, \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \bar{y} - a_0 - a_1 \cdot \bar{x} &= 0, \\ \overline{xy} - a_0 \cdot \bar{x} - a_1 \cdot \overline{x^2} &= 0. \end{aligned} \right\}.$$

Звідки випливає, що в апроксимуючому поліномі $\Psi_1 = a_0 + a_1 x$ коефіцієнти a_0 і a_1 можна визначити за формулами:

$$a_1 = \frac{\alpha_{11} - m_x \cdot m_y}{\alpha_{2x} - m_x^2} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}; \quad a_0 = m_y - a_1 \cdot m_x = \bar{y} - a_1 \cdot \bar{x}.$$

Аналогічно знаходяться параметри і для апроксимуючих функцій будь-якого іншого вигляду. Проте загального правила для вибору відповідного вигляду емпіричної формули не існує. Водночас, для найбільш поширених семи видів функцій існує процедура формальної оцінки їх придатності.



Для умов, розглянутих у попередньому прикладі (див. табл. 9.16), знайти лінійну апроксимацію залежності змінної y від змінної x за даними тієї ж таблиці спостережень, що повторюємо (див. табл. 9.18).

Таблиця 9.18

x	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

- Отримана раніше розрахункова таблиця має вигляд (див. табл. 9.19):

Таблиця 9.19

i	x_i	y_j	x_i^2	y_j^2	$x_i y_j$
1	1,00	1,25	1,00	1,56	1,25
2	1,50	1,40	2,25	1,96	2,10
3	3,00	1,50	9,00	2,25	4,50
4	4,50	1,75	20,25	3,06	7,88
5	5,00	2,25	25,00	5,06	11,25
Σ	15,00	8,15	57,50	13,90	26,98
Σ/n	3	1,63	11,5	2,779	5,395

Необхідні оцінки з таблиці були знайдені і мають такі значення:

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{15}{5} = 3; \quad \bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 y_j = \frac{8,15}{5} = 1,63; \quad \overline{xy} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i y_i = \frac{26,975}{5} = 5,395;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i^2 = \frac{57,5}{5} = 11,5; \quad \overline{y^2} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i^2 = \frac{13,897}{5} = 2,779.$$

Отже, для лінійної апроксимації $y = a_0 + a_1 x$ знаходимо:

$$a_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \frac{5,395 - 3 \cdot 1,63}{11,5 - (3)^2} = \frac{5,395 - 4,89}{11,5 - 9} = \frac{5,395 - 4,89}{11,5 - 9} = \frac{0,505}{2,5} = 0,202;$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \cdot \bar{x} = 1,63 - 0,202 \cdot 3 = 1,63 - 0,606 = 1,024.$$

Результуючий вираз має вигляд: $y = 1,024 + 0,202 \cdot x$ і цілком збігається з отриманим раніше рівнянням регресії Y на X : $y = 0,202 \cdot x + 1,024$.

Графічне зображення цих ліній наведено на рис. 9.8.

Відзначимо, що лінія регресії $y \rightarrow x$ у даному випадку має менший кут нахилу, ніж лінія регресії $x \rightarrow y$.

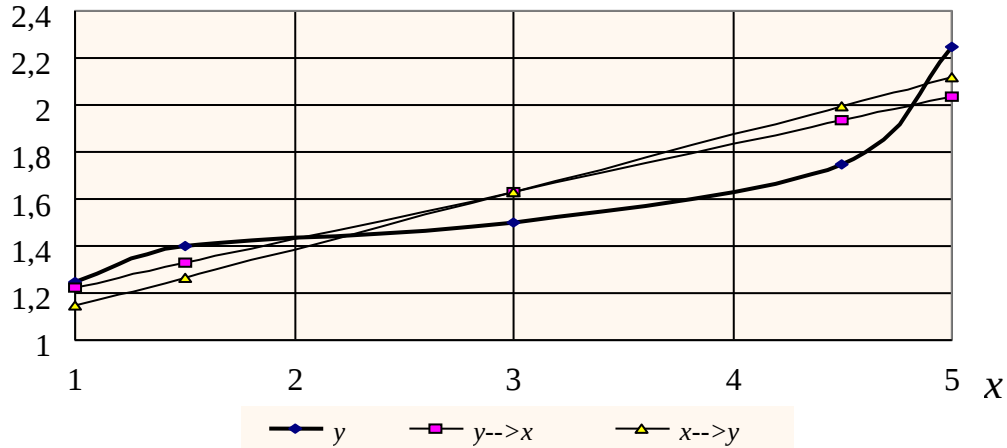


Рис. 9.8. Лінії регресії.

Питання для самоперевірки.

1. Що таке вибірка і генеральна сукупності, як вони співвідносяться між собою?
2. Що таке “варіант”, його частота і відносна частота?
3. Поясніть поняття: варіаційний (статистичний) ряд, розмах варіації, полігон частот, гістограма, інтервальный варіаційний ряд.
4. Що таке емпірична функція розподілу і якими властивостями вона володіє?
5. Що називається числовими характеристиками вибірки?
6. Як визначаються вибіркове середнє, а також вибіркова дисперсія, вибіркові початкові і центральні моменти?
7. Які варіанти називаються умовними та у яких випадках вони застосовуються?
8. Поясніть основні елементи закону великих чисел – нерівність Чебишева і закон трьох сигм, а також закон розподілу суми випадкових величин.
9. Поясніть зміст поняття “збігається за ймовірністю” на прикладі ствердження теореми Чебишева, відповідно до якої при необмеженому збільшенні числа випробувань середнє арифметичне випадкової величини *збігається за ймовірністю* до її математичного сподівання.
10. Поясніть сенс вимог до статистичних оцінок параметрів: незсуненості, ефективності, обґрунтованості.
11. Що таке виправлена оцінка дисперсії випадкової величини?
12. Навіщо і як можна використовувати теорему Лапласа?
13. Поясніть значення понять: довірчий інтервал, довірна ймовірність, рівень значущості.
14. Як можна розрахувати значення довірчого інтервалу і довірчої ймовірності?
15. Як можна оцінити необхідний обсяг вибірки?
16. Що означає перевірка статистичних гіпотез?
17. У чому полягає критерій Пірсона і як він використовується при перевірці гіпотез?
18. Що називають вибірковим рівнянням прямої лінії регресії і як можна розрахувати коефіцієнти цього рівняння?
19. Для яких цілей використовується метод найменших квадратів? Поясніть порядок його застосування на прикладі лінійної апроксимації множини двовимірних точок.

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$
Таблиця значення функції

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$$

Таблиця значень функції

X	Φ(x)	X	Φ(x)	X	Φ(x)	X	Φ(x)
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	0,1915	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,27	0,1064	0,51	0,1950	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,28	0,1103	0,52	0,1985	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,29	0,1141	0,53	0,2019	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,30	0,1179	0,54	0,2054	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,31	0,1217	0,55	0,2088	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,32	0,1255	0,56	0,2123	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,33	0,1293	0,57	0,2157	0,81	0,2910
0,10	0,0398	0,34	0,1331	0,58	0,2190	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,35	0,1368	0,59	0,2224	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,36	0,1406	0,60	0,2257	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,37	0,1443	0,61	0,2291	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,38	0,1480	0,62	0,2324	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,39	0,1517	0,63	0,2357	0,87	0,3078
0,16	0,0636	0,40	0,1554	0,64	0,2389	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,41	0,1591	0,65	0,2422	0,89	0,3133
0,18	0,0714	0,42	0,1628	0,66	0,2454	0,90	0,3159
0,19	0,0753	0,43	0,1664	0,67	0,2486	0,91	0,3186
0,20	0,0793	0,44	0,1700	0,68	0,2517	0,92	0,3212
0,21	0,0832	0,45	0,1736	0,69	0,2549	0,93	0,3238
0,22	0,0871	0,46	0,1772	0,70	0,2580	0,94	0,3264
0,23	0,0910	0,47	0,1808	0,71	0,2611	0,95	0,3289
0,96	0,3315	1,37	0,4147	1,78	0,4625	2,36	0,4909
0,97	0,3340	1,38	0,4162	1,79	0,4633	2,28	0,4913
0,98	0,3365	1,39	0,4177	1,80	0,4641	2,40	0,4918
0,99	0,3389	1,40	0,4192	1,81	0,4649	2,42	0,4922
1,00	0,3413	1,41	0,4207	1,82	0,4656	2,44	0,4927
1,01	0,3438	1,42	0,4222	1,83	0,4664	2,46	0,4931
1,02	0,3461	1,43	0,4236	1,84	0,4671	2,48	0,4934
1,03	0,3485	1,44	0,4251	1,85	0,4678	2,50	0,4938
1,04	0,3508	1,45	0,4265	1,86	0,4686	2,52	0,4941
1,05	0,3531	1,46	0,4279	1,87	0,4693	2,54	0,4945
1,06	0,3554	1,47	0,4292	1,88	0,4699	2,56	0,4948
1,07	0,3577	1,48	0,4306	1,89	0,4706	2,58	0,4951
1,08	0,3599	1,49	0,4319	1,90	0,4713	2,60	0,4953
1,09	0,3621	1,50	0,4332	1,91	0,4719	2,62	0,4956

1,10	0,3643	1,51	0,4345	1,92	0,4726	2,64	0,4959
1,11	0,3665	1,52	0,4357	1,93	0,4732	2,66	0,4961
1,12	0,3686	1,53	0,4370	1,94	0,4738	2,68	0,4963
1,13	0,3708	1,54	0,4382	1,95	0,4744	2,70	0,4965
1,14	0,3729	1,55	0,4394	1,96	0,4750	2,72	0,4967
1,15	0,3749	1,56	0,4406	1,97	0,4756	2,74	0,4969
1,16	0,3770	1,57	0,4418	1,98	0,4761	2,76	0,4971
1,17	0,3790	1,58	0,4429	1,99	0,4767	2,78	0,4973
1,18	0,3810	1,59	0,4441	2,00	0,4772	2,80	0,4974
1,19	0,3830	1,60	0,4452	2,02	0,4783	2,82	0,4976
1,20	0,3849	1,61	0,4463	2,04	0,4793	2,84	0,4977
1,21	0,3869	1,62	0,4474	2,06	0,4803	2,86	0,4979
1,22	0,3883	1,63	0,4484	2,08	0,4812	2,88	0,4980
1,23	0,3907	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,90	0,4981
1,24	0,3925	1,65	0,4505	2,12	0,4830	2,92	0,4982
1,25	0,3944	1,66	0,4515	2,14	0,4838	2,94	0,4984
1,26	0,3962	1,67	0,4525	2,16	0,4846	2,96	0,4985
1,27	0,3980	1,68	0,4535	2,18	0,4854	2,98	0,4986
1,28	0,3997	1,69	0,4545	2,20	0,4861	3,00	0,4986
1,29	0,4015	1,70	0,4554	2,22	0,4868	3,20	5
1,30	0,4032	1,71	0,4564	2,24	0,4875	3,40	0,49931
1,31	0,4049	1,72	0,4573	2,26	0,4881	3,60	0,49966
1,32	0,4066	1,73	0,4582	2,28	0,4887	3,80	0,49984
1,33	0,4082	1,74	0,4591	2,30	0,4893	4,00	0,49992
1,34	0,4099	1,75	0,4599	2,32	0,4898	4,50	0,49996
1,35	0,4115	1,76	0,4608	2,34	0,4904	5,00	0,49999
1,36	0,4131	1,77	0,4616				

Таблица значений $t_v = t(\gamma, n)$

n	v			n	v		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,1	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,96	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

n	v			n	v		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Критичні точки розподілу χ^2

Число степенів свободи k	Рівень значимості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,0001
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Критичні точки розподілу Стюдента

Число степенів свободи k	Рівень значимості α (двостороння критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,99
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Рівень значимості α (одностороння критична область)					

Біноміальний розподіл – the binomial distribution

Випадковий – random

Випадкові величини – the random variables

Випадкові процеси – random processes

Гіпотези – the hypothesis

Густина (щільність) – the density

Густина розподілу – the density distribution.

Двомірний випадковий – two-dimensional random variable

Дискретний – discrete

Дисперсія – the dispersion

Диференціальна функція розподілу – the differential distribution function

Добуток – the product

Достовірний – reliable

Дробові числа – floating point numbers

Експес – the kurtosis

Елемент імовірності – the element probability

Еліптичний – elliptic

Ефективний – effective

Закон рівномірної щільності – the law of uniform density

Залежний – dependent

Інтеграл імовірності – the probability integrals

Інтегральна функція розподілу – the integral distribution function

Ймовірність – the probability

Комбінаторика – the combinatorics

Конусний – conical

Кореляційний момент – the moment correlation

Математичне очікування – mathematical expectation

Многокутник розподілу – the polygons sharing

Множина елементарних подій – the set of elementary events.

Момент зв'язку – the moment connection

Момент другого порядку – second order moment

Момент першого порядку – the moment of first order

Найімовірніше число – the most likely number

Незалежний – independent

Неможливий – could not be random

Неперервний – the continuous
Несумісні події – the incompatible events
Нормальний закон розподілу – normal law of distribution
Перестановка – the permutation
Повна група подій – the complete group of events
Подвійний інтеграл – the double integral
Подія – the event
Послідовність – the progression
Початковий момент – starting point
Приріст – the growth
Простір – space
Протилежний – opposite

Розміщення – an accommodation
Ряд розподілу – the number distribution

Середнє значення – an average
Середнє квадратичне відхилення – the mean square deviation
Співвідношення – ratio
Сполученням – combination
Сталий множник – the sustainable multiplier
Статистична ймовірність – the statistical probability
Статистичний ряд – the statistical series
Статистична сукупність – statistical combination
Степінь розсіювання – the power dissipation
Сума – the amount
Сумісні події – the compatible evenst

Твірна функція – produced feature

Фундаментальний закон – the fundamental laws
Функція розподілу – the distribution function
Функція розподілу ймовірностей – probability distribution function

Характеристика розсіювання – the characteristic scattering

Центр розподілу імовірності – the probability distribution center
Центрована випадкова величина – the centered random variable

Числові параметри – the number of parameters

Костянтин ГРИГОРЕНКО

Сергій КАСЯРУМ

Вища математика (частина 2)

Підручник

Черкаси - 2025