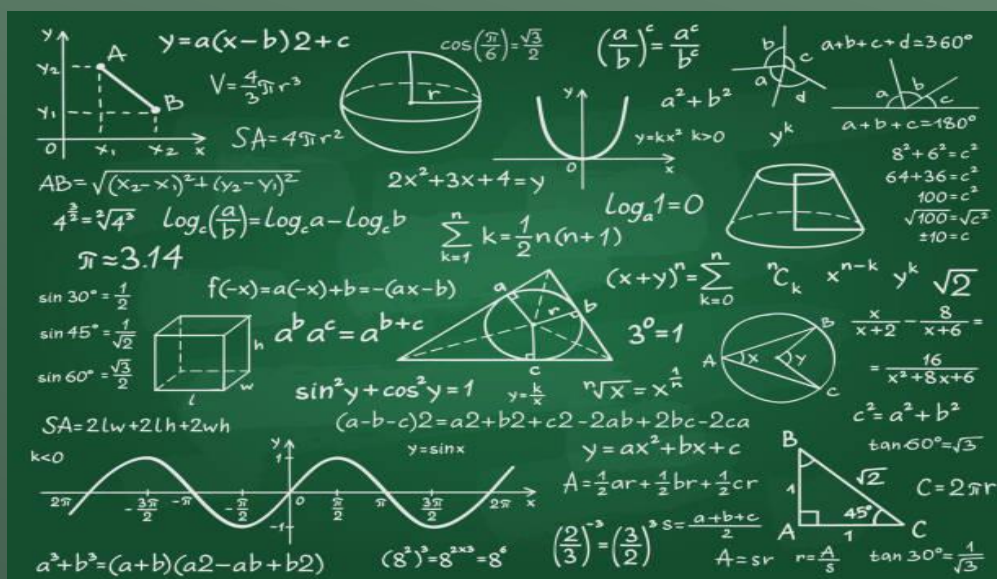


Вища математика

(частина 1)

Підручник



Державна служба України з надзвичайних ситуацій
Національний університет цивільного захисту України
Черкаський інститут пожежної безпеки
імені Героїв Чорнобиля

К. Григоренко, С. Касярум, І. Частокотенко, В. Дендаренко

Вища математика

(частина 1)

Підручник



Черкаси – 2024

Рекомендовано до друку рішенням Методичної ради
Черкаського інституту пожежної безпеки імені Героїв Чорнобиля
НУЦЗ України
(протокол № 11 від 14 червня 2024 року)

Вища математика. Частина 1 : підручник / К. Григоренко, С. Касярум, І. Частоколенко, В. Дендаренко. – Черкаси: ЧІПБ ім. Героїв Чорнобиля НУЦЗУ, 2024. – 224 с.

Математика – одна з найдавніших наук, що зародилась на світанку цивілізації. Вона постійно збагачувалась, час від часу істотно оновлювалась і все більше утверджувалась як засіб пізнання закономірностей навколишнього світу. Розширюючи і зміцнюючи свої багатогранні зв'язки з практикою, математика допомагає людству відкривати і використовувати закони природи і є у наш час могутнім рушієм розвитку науки і техніки.

Математика є однією з найважливіших базових предметів, адже служить підґрунтям, свого роду фундаментом, для вивчення інших дисциплін, які використовують математичні методи, зокрема фізика, опір матеріалів, теоретична механіка тощо.

Підручник «Вища математика. Частина 1» містить 8 розділів: «Комплексні числа», «Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення функцій однієї змінної», «Диференціальне числення функцій кількох змінних», «Невизначений інтеграл», «Визначений інтеграл», «Невласні інтеграли» та «Основні формули елементарної математики». В перших семи розділах подано вправи для самостійного розв'язування.

Підручник призначений для здобувачів освіти вищих навчальних закладів нематематичного профілю, яким знання з математики необхідні для вивчення інших дисциплін.

Розділ 1. Комплексні числа.	8
1.1. Означення комплексного числа.	8
1.2. Тригонометрична форма комплексного числа.	10
1.2.1. Многочлени n -го степеня.	12
А. Многочлени з комплексними коефіцієнтами від комплексної змінної.	12
Б. Многочлени з дійсними коефіцієнтами.	13
1.2.2. Раціональні функції та їх розклад у суму простих дробів.	13
А. Означення раціональних функцій і простих дробів.	13
Б. Теорема про розклад правильної раціональної функції у суму простих дробів.	14
Вправи для самостійного розв'язування.	16
Розділ 2. Вступ до математичного аналізу.	18
2.1. Послідовності.	18
2.1.1 Основні означення.	18
2.1.2. Обмежені та монотонні послідовності.	18
2.1.3. Збіжні та розбіжні послідовності.	20
2.1.4. Властивості збіжних послідовностей.	21
2.1.5. Число e .	23
2.1.6. Наближене обчислення числа e .	25
2.1.7. Лема про вкладені відрізки.	25
2.1.8. Частинні послідовності.	26
2.1.9. Принцип збіжності Больцано-Коші.	27
2.1.10. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності.	28
2.1.11. Теореми про границі.	30
2.1.12. Границя відношення двох многочленів.	30
2.2. Границя функції.	31
2.2.1. Поняття границі функції.	31
2.2.2. Ліва та права границі функції.	32
2.2.3. Теореми про границі функції.	33
2.2.4. Перша визначна границя.	34
2.2.5. Друга визначна границя.	35
2.2.6. Формула Ейлера.	37
2.3. Неперервність функції.	38
2.3.1. Основні поняття.	38
2.3.2. Властивості неперервних функцій.	40
2.3.3. Розриви функції.	40
2.3.4. Методика дослідження функції $y = f(x)$ на неперервність.	41
2.3.5. Наслідки з формул для визначних границь.	42
2.3.6. Порівняння нескінченно малих величин.	42
2.3.7. Шкала еквівалентних нескінченно малих величин.	45
2.3.8. Властивості функцій, неперервних на відрізку.	45
2.3.9. Рівномірна неперервність.	48
Вправи для самостійного розв'язування.	49

Розділ 3. Диференціальне числення функцій однієї змінної.	56
3.1. Похідна. Її фізична (механічна) та геометрична інтерпретація.	56
3.1.1. Фізичний (механічний) зміст похідної.	56
3.1.2. Геометричний зміст похідної.	56
3.2. Похідна суми, добутку, частки, сталої, добутку сталої на функцію.	57
3.3. Похідна складної функції.	58
3.4. Похідна логарифмічної функції. Похідні тригонометричних функцій.	58
3.5. Похідна оберненої, показникової і оберненої тригонометричної функції. Похідна логарифмічної і степеневої функції.	59
3.5.1. Похідна показникової функції.	60
3.5.2. Похідні обернених тригонометричних функцій.	60
3.5.3. Поняття похідної логарифмічної функції.	60
3.5.4. Похідна степеневої функції з будь-яким дійсним показником.	61
3.6. Похідна функцій, заданих неявно та параметрично.	61
3.6.1. Похідна функції, заданої параметрично.	62
3.7. Диференціал.	62
3.7.1. Означення диференціала. Формули і правила диференціювання. Використання диференціала для наближених обчислень. Основні теореми диференціального числення. Похідні і диференціали вищих порядків.	62
I. Диференціал функції.	63
II. Формули і правила обчислення диференціалів.	63
III. Використання диференціала для наближених обчислень.	63
IV. Диференціал і похідні вищих порядків.	64
V. Основні теореми диференціального числення.	64
3.7.2. Розкриття невизначеностей. Формула Тейлора.	65
I. Невизначеність виду $0/0$.	65
II. Невизначеність виду ∞/∞ .	66
III. Розкриття невизначеностей інших видів.	66
IV. Формула і теорема Тейлора.	66
3.7.3. Дослідження функції однієї змінної за допомогою першої й другої похідних.	67
I. Ознаки сталості зростання і спадання функції.	67
II. Екстремум функції.	67
III. Інтервали опуклості й ввігнутості. Точки перегину.	68
3.7.4. Асимптоти.	70
3.8. Загальний план дослідження функції та побудова графіка.	73
3.8.1. Дослідження та побудова графіка функції, заданої параметрично.	76
Вправи для самостійного розв'язування.	77
Розділ 4. Диференціальне числення функцій кількох змінних.	101
4.1. Основні поняття.	101
4.1.1. Простір R^n .	101
4.1.2. Означення функції багатьох змінних.	101

4.1.3. Графічне зображення функції двох змінних.	102
4.1.4. Знаходження області визначення функції двох змінних.	103
4.1.5. Границя функції двох змінних.	104
4.1.6. Неперервність функції двох змінних.	107
4.1.7. Неперервність складеної (складної) функції двох змінних.	110
4.1.8. Властивості неперервної функції двох змінних.	111
4.1.9. Рівномірна неперервність.	112
4.2. Диференційовність функції двох змінних.	113
4.2.1. Частинні та повні прирости функції двох змінних.	113
4.2.2. Частинні похідні двох змінних.	114
4.2.3. Повний диференціал функції двох змінних.	115
4.2.4. Частинні похідні та повний диференціал функції n -змінних.	116
4.2.5. Достатня умова диференційованості функції двох змінних у точці.	118
4.2.6. Диференціювання складеної функції.	120
4.2.7. Похідна за напрямом. Градієнт.	121
4.2.8. Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків.	124
4.2.9. Диференціювання неявної функції.	126
I. Функція двох змінних.	126
II. Функція трьох змінних.	127
4.2.10. Формула Тейлора для функції двох змінних.	129
4.2.11. Визначник Якобі (якобіан).	130
4.3. Дослідження функцій багатьох змінних.	130
4.3.1. Поняття екстремуму функцій багатьох змінних.	130
4.3.2. Необхідні умови існування екстремуму.	131
Вправи для самостійного розв'язування.	132
Розділ 5. Невизначений інтеграл.	146
5.1. Первісна функція.	146
5.2. Невизначений інтеграл і його властивості.	146
5.3. Таблиця невизначених інтегралів.	147
5.4. Найпростіші правила інтегрування.	148
5.5. Заміна змінної у невизначеному інтегралі (інтегрування підстановкою).	148
5.6. Інтегрування по частинам.	151
5.6.1. Інтеграли виду $P_n(x) \cos ax \, dx$, $P_n(x) \sin ax \, dx$, $P_n(x) a^x \, dx$, де $P_n(x)$ – многочлен n -го степеня.	151
5.6.2. Інтеграли $P_n(x) f(x) \, dx$, де $f(x)$ – трансцендентна функція, яка має дробово-раціональну або дробово-ірраціональну похідну ($\ln x$, $\arctg x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$).	152
5.6.3. Зведення інтеграла до самого себе.	152
5.6.4. Рекурентні співвідношення.	153
5.7. Інтеграли, які містять квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$.	154
5.7.1. Інтеграли виду $\frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx$ ($a \neq 0$).	154

5.7.2. Інтеграли виду $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$ ($a \neq 0$).	156
5.7.3. Інтеграли виду $\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ ($a \neq 0$).	156
5.7.4. Інтеграли виду $\int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n} dx$ ($a \neq 0, n \neq 1$).	157
5.7.5. Інтеграли виду $\int \frac{dx}{(Mx + N)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$.	158
5.8. Інтегрування раціональних функцій.	158
5.8.1. Інтегрування простих дробів.	158
5.8.2. Інтегрування раціональних функцій.	158
5.9. Інтегрування функцій, які раціонально залежать від $\sin x, \cos x$.	161
5.9.1. Універсальна тригонометрична підстановка.	161
5.9.2. Частинні тригонометричні підстановки.	161
5.9.3. Інтегрування добутку парних степенів $\sin x, \cos x$.	163
5.9.4. Інтегрування добутків синусів і косинусів кратних дуг.	163
5.10. Інтегрування деяких алгебраїчних ірраціональностей.	164
5.10.1. Інтеграли виду $\int R(x, \sqrt[n]{x}) dx$.	164
5.10.2. Інтеграли виду $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) dx$.	164
5.10.3. Тригонометричні підстановки для інтегралів виду $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$.	165
Вправи для самостійного розв'язування.	166
Розділ 6. Визначений інтеграл.	168
6.1. Сумування нескінченно малих.	168
6.2. Поняття визначеного інтеграла. Перший підхід.	168
6.3. Властивості визначеного інтеграла.	169
6.3.1. Визначений інтеграл є міра площі.	169
6.3.2. При переставленні границь, визначений інтеграл змінює знак, не змінюючи абсолютної величини.	170
6.3.3. Ділення відрізка інтегрування.	171
6.3.4. Знак визначеного інтеграла.	171
6.3.5, 6.3.6. Визначений інтеграл суми функцій розбивається на алгебраїчну суму інтегралів.	173
6.3.7. Сталий множник виноситься за знак визначеного інтеграла.	173
6.3.8, 6.3.9. Теорема про середнє значення.	174
6.3.10. Узагальнена теорема про середнє значення.	175
6.4. Визначений інтеграл як функція верхньої межі.	175
6.5. Поняття визначеного інтеграла. Другий підхід.	177
6.6. Інтегровність неперервної функції.	178
6.7. Основна формула інтегрального числення.	179
6.8. Формули зведення. Формула інтегрування частинами.	179

6.9. Формула змінної у визначеному інтегралі.	181
6.10. Обчислення визначених інтегралів за допомогою властивостей підінтегральних функцій.	182
6.11. Геометричне застосування визначеного інтеграла.	184
6.11.1. Обчислення площі в прямокутних координатах.	184
6.11.2. Довжина дуги кривої.	187
I. Довжина дуги кривої в прямокутних координатах.	187
II. Довжина дуги кривої у випадку, коли рівняння кривої задано в параметричній формі.	188
III. Довжина дуги кривої в полярних координатах.	189
IV. Обчислення об'єму тіла по площам паралельних перерізів.	190
V. Об'єм тіла обертання.	191
VI. Площа поверхні тіла обертання.	192
6.12. Наближені обчислення визначених інтегралів.	194
I. Формула прямокутників.	194
II. Формула трапецій.	195
III. Формула Сімпсона.	196
Вправи для самостійного розв'язування.	198
Розділ 7. Невласні інтеграли.	203
7.1. Невласні інтеграли I-го роду: інтеграли з нескінченними межами інтегрування.	203
7.2. Невласні інтеграли II роду: інтеграли від необмежених функцій.	205
7.3. Деякі особливі інтеграли.	209
I. Інтеграл Ейлера.	209
II. Інтеграл Ейлера-Пуассона.	210
III. Інтеграли Фруллані.	211
Вправи для самостійного розв'язування.	212
Розділ 8. Основні формули елементарної математики.	214
8.1. Алгебраїчні функції.	214
8.2. Тригонометричні функції.	215
8.3. Властивості логарифмів.	218
8.4. Прогресії.	219
8.5. Основні формули комбінаторики. Біном Ньютона.	219
8.6. Числові значення деяких величин.	220

1.1. Означення комплексного числа.

Означення. Комплексним числом z будемо називати впорядковану пару дійсних чисел x, y , записану у формі $z = x + iy$, де i – новий об’єкт («уявна одиниця»), для якого при обчисленнях покладемо $i^2 = -1$.

Перша компонента комплексного числа z , дійсне число x , називається *дійсною частиною* числа z , це позначається так: $x = \operatorname{Re} z$; друга компонента, дійсне число y , називається *уявною частиною* числа z : $y = \operatorname{Im} z$.

Означення. Два комплексних числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ і $z_2 = x_2 + y_2 i$ рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх дійсні і уявні частини: $z_1 = z_2 \iff (x_1 = x_2) \wedge (y_1 = y_2)$.

Множина комплексних чисел неупорядкована, тобто для комплексних чисел не вводяться відношення «більше» або «менше».

Геометрично комплексне число $z = x + yi$ зображається як точка з координатами (x, y) на площині. Площина, на якій зображаються комплексні числа, називається *комплексною площиною* Z .

Означення. Сумою двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ і $z_2 = x_2 + y_2 i$ називається комплексне число z , яке визначається співвідношенням $z = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$, тобто $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$, $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$.

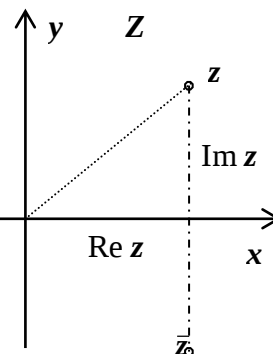
Це означає, що геометрично комплексні числа додаються як вектори на площині по координатно.

Означення. Добутком двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ і $z_2 = x_2 + y_2 i$ називається комплексне число z , яке визначається співвідношенням $z = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$, тобто $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2$; $\operatorname{Im}(z_1 z_2) = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Re} z_2$.

Для двох комплексних чисел з нульовою уявною частиною $z_1 = x_1 + 0i$ і $z_2 = x_2 + 0i$ отримаємо: $z = (x_1 + x_2) + (0 + 0)i = (x_1 + x_2) + 0i$, $z = (x_1 x_2 - 0 \cdot 0) + (x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0)i = x_1 x_2 + 0i$, тобто для множини комплексних чисел з нульовою уявною частиною операції додавання і множення не виводять за межі цієї множини. Ототожнимо кожне таке число з дійсним числом x , яке рівне дійсній частині комплексного числа, тобто будемо вважати, що $z = x + 0i = x$. Тепер дійсні числа – підмножина множини комплексних чисел Z . Далі, числа з нульовою дійсною частиною, тобто числа виду $z = 0 + yi = yi$, називаються *уявними числами*. Уявне число з одиничною уявною частиною будемо записувати як i : $0 + 1i = i$; квадрат цього числа, по означенню множення, рівний $i^2 = i \cdot i = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1$.

Легко переконатися, що операція додавання на множині комплексних чисел Z має властивості, аналогічні властивостям додавання дійсних чисел:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;



3. Існує такий елемент $0 \in Z$, що $0 \cdot z = z$ для $z \in Z$. Цей елемент – число $0 = 0i$.

4. Для кожного елемента $z \in Z$ існує такий елемент z^{-1} , що $z \cdot z^{-1} = 0$. Цей елемент – число $x - yi$. Сума чисел $z_1 = x_1 + y_1i$ і $z_2 = x_2 + y_2i$ називається *різницею* чисел $z_1 - x_1 - y_1i$; $z_2 - x_2 - y_2i$: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)i$.

Перш, ніж визначити операцію ділення комплексних чисел, введемо поняття спряженого числа і модуля комплексного числа.

Означення. Число $\bar{z} = x - yi$ називається *числом, спряженим до числа* $z = x + yi$. Часто спряжене число позначається також символом z^* .

Означення. Дійсне число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ називається *модулем* комплексного числа $z = x + yi$.

Знайдемо добуток спряжених чисел: $z \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$. Таким чином, $z \bar{z}$ – завжди невід'ємне дійсне число, причому $z \bar{z} = 0 \iff z = 0$.

Для знаходження частки комплексних чисел $\frac{z_1}{z_2}$ ($z_2 \neq 0$) домножимо чисельник і знаменник на число, спряжене до знаменника:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + y_1i)(x_2 - y_2i)}{(x_2 + y_2i)(x_2 - y_2i)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + (y_1x_2 - x_1y_2)i}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i.$$

Для операцій множення справедливі властивості:

- $z_1 z_2 = z_2 z_1$;
- $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$;
- Добуток числа $1 = 1 + 0i \in Z$ на будь-яке число $z \in Z$ рівне z ;
- Для кожного числа $z \in Z, z \neq 0$ існує таке число $z^{-1} \in Z$, що $z z^{-1} = 1$,
 $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$;

Операції додавання і множення підкоряються закону дистрибутивності:

- $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

Операція спряження має такі властивості:

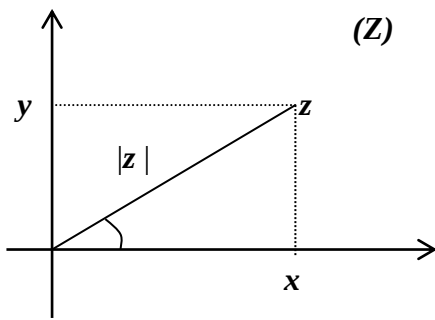
$$\overline{\bar{z}} = z; \quad z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z; \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z; \quad z \bar{z} = |z|^2;$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2; \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2; \quad \overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Приклад виконання арифметичних дій з комплексними числами: нехай $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 4 + 5i$. Тоді $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (4 + 5i) = (2 + 4) + (3 + 5)i = 6 + 2i$; $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (4 + 5i) = (2 - 4) + (3 - 5)i = -2 - 2i$;
 $(2 + 4) + (3 + 5)i^2 = (2 + 5) + (3 + 4)i = 7 + 23i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{4 + 5i} = \frac{(2 + 3i)(4 - 5i)}{(4 + 5i)(4 - 5i)} = \frac{(8 - 15) + (12 - 10)i}{16 + 25} = \frac{-7 + 2i}{41} = -\frac{7}{41} + \frac{2}{41}i.$$

1.2. Тригонометрична форма комплексного числа.



Запис комплексного числа у вигляді $z = x + yi$ називається *алгебраїчною формою* комплексного числа. Зобразимо число z як точку на площині з декартовими координатами x, y . Якщо тепер перейти до полярних координат (ρ, φ) , то $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $\rho = |z|$, тому $z = |z| \cos \varphi + i \sin \varphi$. Кут називається *аргументом* комплексного числа z і позначається $\arg z$: $\arg z = \varphi$.

Аргумент комплексного числа визначений неоднозначно (з точністю до доданків, кратних 2π): якщо, наприклад, $\varphi = \pi/6$, то значення $\varphi + 2\pi k$, $\varphi + 4\pi$ і т.д. теж будуть відповідати числу z , тому значення аргумента, що задовольняє умовам $\arg z = \varphi$, будемо називати *головним*; для позначення усіх значень аргумента комплексного числа z використовується символ $\text{Arg } z$: $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$.

Запис комплексного числа $z = |z| \cos(\arg z) + i \sin(\arg z) = |z| \cos \varphi + i \sin \varphi$ називається *тригонометричною формою* числа.

Число $0 = 0 + 0i$ – єдине число, модуль якого рівний нулю; аргумент для цього числа не визначений.

Перехід від тригонометричної форми до алгебраїчної очевидний: $x = |z| \cos \varphi$, $y = |z| \sin \varphi$. Формули для переходу від алгебраїчної форми до тригонометричної такі:

$$\arctg y/x, x > 0;$$

$$\arctg y/x, x < 0, y \geq 0;$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}; \arg z = \arctg y/x, x < 0, y < 0;$$

$$\pi/2, x < 0, y = 0;$$

$$3\pi/2, x < 0, y = 0.$$

При розв'язуванні задач на перевір алгебраїчно заданого комплексного числа у тригонометричну форму слід зобразити це число на комплексній площині Z і, таким чином, контролювати отриманий результат.



Записати у тригонометричній формі числа $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = \sqrt{3} - i$, $z_4 = i$, $z_5 = 5 - 3i$.

Розв'язування. $z_1 = 2(\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3))$,

$$z_2 = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)),$$

$$z_3 = 2(\cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6)),$$

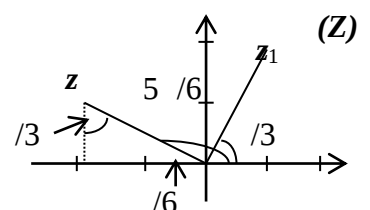
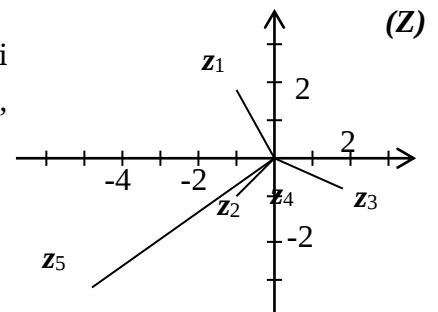
$$z_4 = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2),$$

$$z_5 = \sqrt{34} \cos \arctg 3/5 + i \sin \arctg 3/5.$$



Привести до тригонометричної форми число $z = \sin(\pi/3) + i \cos(\pi/3)$.

Зобразимо на комплексній площині Z разом з точкою z



точку $z_1 = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)$. З рисунка зрозуміло, що $\arg z = \pi/6$, тому $z = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)$.

У тригонометричній формі легко інтерпретуються такі дії, як множення, ділення, піднесення до степеня. Нехай $z_1 = |z_1| \cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1$, $z_2 = |z_2| \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2$, $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$. Тоді $z_1 z_2 = |z_1| \cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1 \cdot |z_2| \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2$

$$= |z_1| |z_2| (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) = |z_1| |z_2| \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Висновок: при множенні комплексних чисел їх модулі перемножуються, аргументи додаються. Очевидно, якщо $z_2 = |z_2| \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2$, то $\bar{z}_2 = |z_2| \cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2 = |z_2| \cos(\varphi_2) - i(\sin \varphi_2)$, тобто операція спряження не змінює модуль числа, і змінює знак його аргумента, тому $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{|z_1| |z_2| \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Висновок: при діленні комплексних чисел їх модулі діляться один на одного, аргумент частки рівний різниці аргументів діленого і дільника.

Введемо позначення: для будь якого дійсного числа суму $\cos \varphi + i \sin \varphi$ будемо записувати як $e^{i\varphi}$. Формула $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ називається **формулою Ейлера**. Будь яке комплексне число z можна представити як $z = |z| e^{i \arg z} = |z| \cos \arg z + i \sin \arg z$; ця форма запису називається **показниковою**. Введене позначення узгоджене з властивостями показникової функції:

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i\varphi_1} |z_2| e^{i\varphi_2} = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = |z_1| |z_2| \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{i\varphi_1}}{|z_2| e^{i\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2).$$

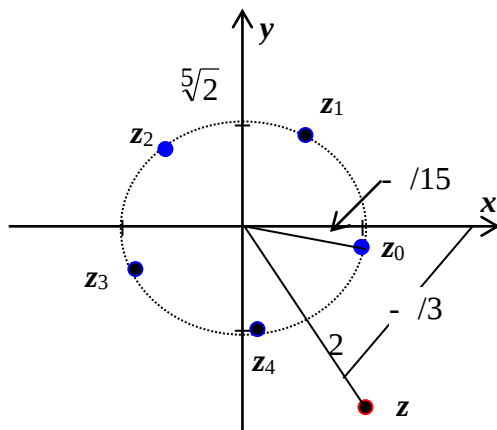
Індукцією по показнику степеня n легко доводиться **формула Муавра**: якщо $z = |z| \cos \varphi + i \sin \varphi$, то $z^n = |z|^n \cos n\varphi + i \sin n\varphi$, або, в показниковій формі, $z^n = |z|^n e^{in\varphi}$. За допомогою цієї формули легко обчислювати високі степені комплексних чисел і виводити формули для синусів і косинусів кратних кутів:

$$\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{2(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3))}{\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))} = \frac{2^{20} e^{i 20 \pi/3}}{2^{10} e^{i (6 \cdot 2 \pi/3)}} = 1024 \frac{e^{i 2 \pi/3}}{1} = 1024 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 512(1 + i\sqrt{3}).$$

Тепер розглянемо операцію добування кореня n -го степеня з комплексного числа z . По означенню, будь яке число w , таке, що $w^n = z$, називається **коренем n -го степеня** з числа z . Нехай $z = |z| \cos \arg z + i \sin \arg z$, $w = |w| \cos \arg w + i \sin \arg w$. Тоді $w^n = |w|^n \cos n \arg w + i \sin n \arg w = |z| \cos \arg z + i \sin \arg z$. Числа рівні, якщо рівні їх модулі і аргументи, тому $|w|^n = |z|$, $n \arg w = \arg z$, звідки $|w| = \sqrt[n]{|z|}$, $\arg w = \frac{1}{n} \arg z + \frac{2k\pi}{n}$, при цьому n різних значень кореня n -го степеня з числа z отримуються при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.



Знайти усі значення $\sqrt[5]{1 - \sqrt{3}i}$.



Число $z = 1 - \sqrt{3}i$ у тригонометричній формі
 рівне $z = 2(\cos(-\pi/3) + i \sin(-\pi/3))$. Усі п'ять значень
 кореня $\sqrt[5]{z}$ даються формулою
 $z_k = \sqrt[5]{2}(\cos((-\pi/3 + 2k\pi)/5) + i \sin((-\pi/3 + 2k\pi)/5))$
 при $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Вони розташовані на колі радіуса
 $\sqrt[5]{2}$. Значення, що відповідає $k = 0$, має аргумент
 $(-\pi/3)/5 = -\pi/15$, інші розташовані з інтервалом по
 $2\pi/5$, рівним $2\pi/5$, утворюючи правильний
 п'ятикутник.

1.2.1. Многочлени n -го степеня.

А. Многочлени з комплексними коефіцієнтами від комплексної змінної.

Означення. Многочленом n -го степеня називається функція
 $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0$, де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ – сталі комплексні
 числа (коефіцієнти многочлена), $a_n \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$ – комплексна змінна. Число z_0 , у якому
 многочлен приймає нульове значення ($P_n(z_0) = 0$), називається *коренем* многочлена.

Справедлива **теорема**, яка називається **основною теоремою алгебри**: будь який
 многочлен степеня $n \geq 1$ має комплексний корінь.

Нехай z_0 – довільна точка комплексної площини. Представимо $P_n(z)$ у вигляді
 многочлена по степеням $z - z_0$:

$$P_n(z) = a_n (z - z_0)^n + a_{n-1} (z - z_0)^{n-1} + \dots + a_2 (z - z_0)^2 + a_1 (z - z_0) + a_0$$

$$= a_n (z - z_0)^n + a_{n-1} (z - z_0)^{n-1} + \dots + a_2 (z - z_0)^2 + a_1 (z - z_0) + a_0.$$

Тут $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ – нові значення коефіцієнтів, що отримуються після розкриття
 степенів і зведення подібних членів. Очевидно, $P_n(z_0) = a_0$, звідси слідує твердження: для
 того, щоб число z_0 було коренем многочлена P_n , необхідно і достатньо, щоб коефіцієнт
 при нульовому степені у розкладі P_n по степеням $z - z_0$ був рівний нулю: $a_0 = 0$. Але тоді

$$P_n(z) = a_n (z - z_0)^n + a_{n-1} (z - z_0)^{n-1} + \dots + a_2 (z - z_0)^2 + a_1 (z - z_0)$$

$$= (z - z_0) [a_n (z - z_0)^{n-1} + a_{n-1} (z - z_0)^{n-2} + \dots + a_2 (z - z_0) + a_1] = (z - z_0) P_{n-1}(z).$$

Таким чином, доведена

Теорема Безу: для того, щоб многочлен n -го степеня $P_n(z)$ мав комплексний корінь
 z_0 , необхідно і достатньо, щоб він без остачі ділився на $z - z_0$, тобто щоб $P_n(z)$
 представлявся у вигляді: $P_n(z) = (z - z_0) P_{n-1}(z)$, де $P_{n-1}(z)$ – многочлен $(n-1)$ -го степеня.

Нехай z_0 – корінь многочлена $P_n(z)$, тоді, по теоремі Безу, $P_n(z) = (z - z_0) P_{n-1}(z)$.
 Можливі два варіанти:

1. Число z_0 не є коренем многочлена $P_{n-1}(z)$, в цьому випадку z_0 називається
простим коренем многочлена $P_n(z)$.

2. Число z_0 є коренем многочлена $P_{n-1}(z)$, тоді, використовуючи теорему Безу уже до $P_{n-1}(z)$, отримаємо $P_{n-1}(z) = (z - z_0)P_{n-2}(z)$, $P_n(z) = (z - z_0)^2 P_{n-2}(z)$. Використовуючи до $P_{n-2}(z)$ ті ж роздуми, прийдемо до висновку: якщо z_0 – корінь многочлена $P_n(z)$, то $P_n(z)$ єдиним чином представляється у вигляді $P_n(z) = (z - z_0)^k P_{n-k}(z)$, де $P_{n-k}(z_0) \neq 0$. Число k в цьому випадку називається *кратністю кореня* z_0 .

Згідно основної теореми алгебри, будь який многочлен $P_n(z)$ при $n \geq 1$ має хоча б один корінь z_1 ; якщо кратність цього кореня рівна k_1 , то, згідно викладеного, $P_n(z)$ представляється у вигляді $P_n(z) = (z - z_1)^{k_1} P_{n-k_1}(z)$, де $P_{n-k_1}(z_1) \neq 0$. Якщо $n - k_1 \geq 1$, то многочлен P_{n-k_1} має корінь $z_2 \neq z_1$, і представляється у вигляді $P_{n-k_1}(z) = (z - z_2)^{k_2} P_{n-k_1-k_2}(z)$. Якщо $n - k_1 - k_2 \geq 1$, ці викладки можна продовжити; кінцевий висновок формулюється так: будь який многочлен $P_n(z)$ степеня $n \geq 1$ при старшому коефіцієнті $a_n \neq 0$ єдиним (з точністю до порядків співмножників) чином може бути представлений у вигляді $P_n(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2}(z - z_3)^{k_3} \dots (z - z_s)^{k_s}$, де $z_1, z_2, z_3, \dots, z_s$ – (попарно різні) корені многочлена, $k_1, k_2, k_3, \dots, k_s$ їх кратності, s – кількість різних коренів. Загальна кількість коренів многочлена з урахуванням їх кратностей рівна n : $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_s = n$.

Б. Многочлени з дійсними коефіцієнтами. Розглянемо многочлен $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0$ від комплексної змінної z , якщо його коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ – дійсні числа. Сформулюємо ряд властивостей такого многочлена.

1. Якщо $\bar{z}$ – число, спряжене до числа z , то $P_n(\bar{z}) = \overline{P_n(z)}$.

$$P_n(\bar{z}) = a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + a_{n-2} \bar{z}^{n-2} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0} = \overline{P_n(z)}$$

2. Якщо $z_1 = i_1$ – корінь многочлена $P_n(z)$, то $z_2 = \bar{z}_1 = -i_1$ – також корінь цього многочлена.

3. Якщо $z_1 = i_1$ – корінь многочлена з дійсними коефіцієнтами $P_n(z)$, то $P_n(z)$ без остачі ділиться на квадратний тричлен $z^2 - pz + q$, де $p = 2i_1$, $q = -i_1^2$.

4. Якщо $z_1 = i_1$ – корінь многочлена $P_n(z)$ кратності k , то $z_2 = \bar{z}_1 = -i_1$ – корінь цього ж многочлена тієї ж кратності.

5. Будь який многочлен n -го степеня $P_n(z)$ може бути представлений, і притому єдиним (з точністю до порядку співмножників) чином, у вигляді

$P_n(z) = a_n(z - x_1)^{k_1}(z - x_2)^{k_2} \dots (z - x_s)^{k_s} (z^2 - p_1 z + q_1)^{l_1} (z^2 - p_2 z + q_2)^{l_2} \dots (z^2 - p_r z + q_r)^{l_r}$, де $x_1, x_2, \dots, x_s$ – попарно різні дійсні корені цього многочлена, $k_1, k_2, \dots, k_s$ – їх кратності, квадратні тричлени (відповідають попарно різним парам спряжених коренів j і $\bar{j}$ кратностей $l_1, l_2, \dots, l_r$) $z^2 - p_j z + q_j$, $j = 1, 2, \dots, r$ з дійсними коефіцієнтами не мають дійсних коренів (тобто $p_j^2 - 4q_j < 0$), $k_1 + k_2 + \dots + k_s + 2(l_1 + l_2 + \dots + l_r) = n$.

1.2.2. Раціональні функції та їх розклад у суму простих дробів.

А. Означення раціональних функцій і простих дробів.

Означення. Раціональною функцією називається відношення двох многочленів

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_1 x + b_0}.$$

Змінна x – дійсна, коефіцієнти обох многочленів – дійсні числа, $a_n \neq 0, b_m \neq 0, n \geq 0, m \geq 1$.

Означення. Раціональна функція (дріб) називається *правильною*, якщо $m \geq n$; якщо $m < n$ – раціональний дріб називається *неправильним*. Будь який неправильний дріб може бути представлений у вигляді суми многочлена степеня $n - m$ і правильного дробу: $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = L_{n-m}(x) + \frac{R_{n1}(x)}{Q_m(x)}, n_1 = m$; знаходження цілої частини $L_{n-m}(x)$ і остачі $R_{n1}(x)$ може бути виконано, наприклад, за допомогою процедури ділення «кутом». У подальшому прийматимемо, що $f(x)$ – правильний дріб.

Означення. Простими дробами називаються раціональні функції наступних чотирьох типів:

$$\begin{array}{ll} \text{I. } \frac{A}{x-a}; & \text{II. } \frac{A}{(x-a)^k}, k \geq 2; \\ \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; & \text{IV. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}^k, k \geq 2. \end{array}$$

Б. Теорема про розклад правильної раціональної функції у суму простих дробів.

Нехай знаменник правильного раціонального дробу представлений у вигляді: $Q_m(x) = b_m(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\dots(x^2+p_rx+q_r)^{l_r}$, $k_1+k_2+\dots+k_s+2(l_1+l_2+\dots+l_r) = m$. Тоді дріб $f(x)$ єдиним чином може бути представлений як суми простих дробів такої структури:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{1,1}}{x-x_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-x_1)^2} + \frac{A_{1,3}}{(x-x_1)^3} + \dots + \frac{A_{1,k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_{2,1}}{x-x_2} + \frac{A_{2,2}}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{A_{2,k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \dots + \frac{A_{s,1}}{x-x_s} + \frac{A_{s,2}}{(x-x_s)^2} + \dots + \frac{A_{s,k_s}}{(x-x_s)^{k_s}} + \frac{M_{1,1}x+N_{1,1}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_{1,2}x+N_{1,2}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{M_{1,l_1}x+N_{1,l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \frac{M_{2,1}x+N_{2,1}}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{M_{2,2}x+N_{2,2}}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \dots + \frac{M_{2,l_2}x+N_{2,l_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}} + \dots + \frac{M_{r,1}x+N_{r,1}}{x^2+p_rx+q_r} + \frac{M_{r,2}x+N_{r,2}}{(x^2+p_rx+q_r)^2} + \dots + \frac{M_{r,l_r}x+N_{r,l_r}}{(x^2+p_rx+q_r)^{l_r}}.$$



Дано функцію

$$f(x) = \frac{2x^7 - 9x^6 - 58x^4 - 81x^3 - 655x^2 - 436x - 1140}{(x-2)^2(x^2-5x-8)^2}.$$

Тут

$$P_7(x) = 2x^7 - 9x^6 - 58x^4 - 81x^3 - 655x^2 - 436x - 1140,$$

$$Q_6(x) = (x-2)^2(x^2-5x-8)^2 = x^6 - 6x^5 + 5x^4 - 44x^3 + 92x^2 - 64x - 256.$$

Після ділення «кутом» отримаємо $f(x) = 2x - 3 + \frac{8x^5 - 45x^4 - 133x^3 - 251x^2 - 116x - 372}{(x-2)^2(x^2-5x-8)^2}$.

Згідно теореми, отриманий правильний дріб повинен представитись у вигляді:

$$\frac{8x^5}{(x-2)^2(x^2-5x+8)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-5x+8} + \frac{Ex+F}{(x^2-5x+8)^2}, (*)$$

де A, B, C, D, E, F – невідомі поки що коефіцієнти («невизначені коефіцієнти»).

Приводимо суму в правій частині рівності (*) до спільного знаменника:

$$\frac{8x^5}{(x-2)^2(x^2-5x+8)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-5x+8} + \frac{Ex+F}{(x^2-5x+8)^2}$$

$$\frac{A(x-2)(x^2-5x+8)^2 + B(x^2-5x+8)^2 + (Cx+D)(x-2)^2(x^2-5x+8) + (Ex+F)(x-2)^2}{(x-2)^2(x^2-5x+8)^2}.$$

Дроби в правій і лівій частинах цієї рівності рівні, так як їх знаменники співпадають, повинні бути рівні і чисельники:

$$8x^5 = 45x^4 + 133x^3 + 251x^2 + 116x + 372$$

$$A(x-2)(x^2-5x+8)^2 + B(x^2-5x+8)^2 + (Cx+D)(x-2)^2(x^2-5x+8) + (Ex+F)(x-2)^2$$

Невизначені коефіцієнти знаходяться з цієї рівності. Так, підставивши в неї значення $x=2$, отримаємо:

$$8 \cdot 2^5 = 45 \cdot 2^4 + 133 \cdot 2^3 + 251 \cdot 2^2 + 116 \cdot 2 + 372 + B(2^2 - 5 \cdot 2 + 8)^2 + 484B + 2904 + B \cdot 6.$$

Якщо підставити в цю рівність корені тричлена x^2-5x+8 , будуть визначені E і F .
Такий прийом знаходження невизначених коефіцієнтів називають *способом часткових значень*. Другий метод полягає в тому, що розкриваються дужки у правій частині рівності і прирівнюються коефіцієнти при однакових степенях x :

$$8x^5 = 45x^4 + 133x^3 + 251x^2 + 116x + 372$$

$$A(x-2)(x^2-5x+8)^2 + B(x^2-5x+8)^2 + (Cx+D)(x-2)^2(x^2-5x+8) + (Ex+F)(x-2)^2$$

$$A(x^5 - 8x^4 + 21x^3 - 2x^2 + 96x - 128) + B(x^4 - 10x^3 + 41x^2 - 80x + 64)$$

$$+ (Cx+D)(x^4 - x^3 + 8x^2 - 12x + 32) + (Ex+F)(x^2 - 4x + 4)$$

$$= (A-C)x^5 + (8A-B-C-D)x^4 + (21A-10B-8C-D-E)x^3$$

$$+ (-2A+41B-12C-8D-4E-F)x^2 + (-96A+80B-32C-12D-4E-4F)x$$

$$+ (-128A+64B-32D-4F).$$

Коефіцієнти при степенях x справа і зліва від знаку рівності:

$$x^5 | \quad A - C - 8;$$

$$x^4 | \quad 8A - B - C - D - 45;$$

$$x^3 | \quad 21A - 10B - 8C - D - E - 133;$$

$$x^2 | \quad 2A - 41B - 12C - 8D - 4E - F - 251;$$

$$x^1 | \quad 96A - 80B - 32C - 12D - 4E - 4F - 116 - 24A - 20B - 8C - 3D - E - F - 29;$$

$$x^0 | \quad 128A - 64B - 32D - 4F - 372 - 32A - 16B - 8D - F - 93.$$

Цю систему можна розв'язувати будь-яким з відомих способів. Скористуємось правилом Крамера.

	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 21 & 10 & 8 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 41 & 12 & 8 & 4 & 1 \\ 24 & 20 & 8 & 3 & 1 & 1 \\ 32 & 16 & 0 & 8 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	14640; $_A$	$\begin{vmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 45 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 133 & 10 & 8 & 1 & 1 & 1 \\ 251 & 41 & 12 & 8 & 4 & 1 \\ 29 & 20 & 8 & 3 & 1 & 1 \\ 93 & 16 & 0 & 8 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	73200;
$_B$	$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 45 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 21 & 133 & 8 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 251 & 12 & 8 & 4 & 1 \\ 24 & 29 & 8 & 3 & 1 & 1 \\ 32 & 93 & 0 & 8 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	87840; $_C$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 45 & 1 & 0 & 0 \\ 21 & 10 & 133 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 41 & 251 & 8 & 4 & 1 \\ 24 & 20 & 29 & 3 & 1 & 1 \\ 32 & 16 & 93 & 8 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	43920;
$_D$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 45 & 0 & 0 \\ 21 & 10 & 8 & 133 & 1 & 1 \\ 2 & 41 & 12 & 251 & 4 & 1 \\ 24 & 20 & 8 & 29 & 1 & 1 \\ 32 & 16 & 0 & 93 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	58560; $_E$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 1 & 45 & 0 \\ 21 & 10 & 8 & 1 & 133 & 1 \\ 2 & 41 & 12 & 8 & 251 & 1 \\ 24 & 20 & 8 & 3 & 29 & 1 \\ 32 & 16 & 0 & 8 & 93 & 1 \end{vmatrix}$	58560;
$_F$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 8 & 0 & 1 & 1 & 0 & 45 \\ 21 & 10 & 8 & 1 & 1 & 133 \\ 2 & 41 & 12 & 8 & 4 & 251 \\ 24 & 20 & 8 & 3 & 1 & 29 \\ 32 & 16 & 0 & 8 & 0 & 93 \end{vmatrix}$	43920;		

$$A = \frac{A}{5}; B = \frac{B}{6}; ; ; C = \frac{C}{3}; D = \frac{D}{4}; E = \frac{E}{4}.$$

Отже, функція $f(x) = \frac{2x^7 - 9x^6 + 58x^4 - 81x^3 + 655x^2 - 436x + 1140}{(x-2)^2(x^2-5x-8)^2}$ представляється у вигляді: $f(x) = 2x - 3 + \frac{5}{x-2} + \frac{6}{(x-2)^2} + \frac{3x-4}{x^2-5x-8} + \frac{4x-3}{(x^2-5x-8)^2}$.

Наостанок відмітимо, що при розв'язуванні задач потрібно комбінувати методи часткових значень і порівняння коефіцієнтів при степенях x , тобто виключати коефіцієнти, знайдені по частковим значенням, з системи рівнянь.



Вправи для самостійного розв'язування

1. Спростити наведені вирази:

$$а) 1 - i - 2 - i - 3 - i; б) (2 - 8i)(76 - 3,5i); в) \frac{1-i}{1+i}; г) 2 - 4i^3.$$

2. Із рівності комплексних чисел знайти x і y :

$$a) 2 + 5ix - 3iy = 14i + 3x - 5y;$$

$$б) aix + biy - a = i - ax - by.$$

3. Подати у тригонометричній формі комплексні числа:

$$a) \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad б) \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

4. Виконати перетворення:

$$a) 5 \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \quad 2 \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4};$$

$$б) 4 \cos 120^\circ - i \sin 120^\circ : 2 \cos 30^\circ - i \sin 30^\circ.$$

5. Обчислити:

$$a) \sqrt[6]{\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}};$$

$$б) \sqrt[3]{2 - 2i};$$

$$в) \sqrt[4]{\sqrt{3} - i}.$$

6. Знайти формулу для обчислення $\sin n$; $\cos n$.

7. Розв'язати систему рівнянь:

$$a) \begin{cases} 3ix - 4 - 2iy = 2 - 6i, \\ 4 - 2ix + 2 - 3iy = 5 - 4i. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 2ix - (92 - i)y = 6, \\ 3 - 2ix + 3 - 2iy = 8. \end{cases}$$

$$x - yi - 2z = 10,$$

$$в) \begin{cases} x - y - 2iz = 20, \\ ix - 3iy - 1 - iz = 30. \end{cases}$$

8. Обчислити:

$$a) \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}^2;$$

$$б) \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}^3.$$

9. Нехай $z = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Обчислити:

$$a) a - b^{-1} - c^2 - a - b^2 - c^{-1}; \quad б) a - b - a - b - a - b^2;$$

$$в) a - b - c^{-2} - 3 - a - b^2 - c^{-3}; г) a^{-2} - b^{-1} - b^{-2} - a^{-1}.$$

10. Розв'язати рівняння:

$$a) x^4 - 3x^2 - 4 = 0;$$

$$б) x^4 - 30x^2 - 289 = 0.$$

$$в) |x| - x - 1 = 2i;$$

$$г) |x| - x - 2 = i.$$

11. 1) Довести тотожність $|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos \theta$. Який її геометричний зміст?

2) Довести, що будь-яке комплексне число z , відмінне від -1 , модуль якого 1 , можна подати у вигляді $z = \frac{1 - ti}{1 + ti}$, де t — дійсне число.

2.1. Послідовності.

2.1.1. Основні означення.

Означення. Якщо задана закономірність, згідно з якою кожному натуральному числу $1, 2, 3, \dots$, відповідає деяке дійсне число, то говорять, що задано *послідовність*.

Послідовність можна розглядати як *функцію*, областю визначення якої є множина натуральних чисел.



$1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots N;$

$1, 8, 27, 64, 125, \dots, n^3, \dots$

Послідовність визначається *формулою*, тобто законом, згідно з яким установлюється спосіб відповідності заданих чисел послідовним натуральним числам. Послідовність із загальним членом a_n позначається a_n , або просто a_n .

У прикладі: $a_n = n^3$.

Інший спосіб визначення послідовності полягає в застосуванні *рекурсії*: n -й член послідовності визначається за допомогою заданих k ($k < n$) попередніх членів послідовності.



Рекурсія $a_n = a_{n-1} + 3, a_1 = 0$ визначає послідовність $0, 3, 6, 9, \dots$



Рекурсія $a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-1}, a_1 = 1, a_2 = 2$ визначає послідовність $1, 2, 5, 27, 734, \dots$

Приклади послідовностей.

1) $a_n = \frac{1}{n}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots;$

2) $a_n = n!, 1, 2, 6, 24, 120, 720, \dots;$

3) $a_n = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right), \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots;$ 4) $a_n = \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

2.1.2. Обмежені та монотонні послідовності.

Означення. Послідовність a_n називається *обмеженою*, коли існує таке додатне число M , що нерівність

$$|a_n| \leq M$$

виконується для всіх n .

Означення. Послідовність a_n називається *монотонно зростаючою (спадною)*, якщо

$$a_{n+1} \geq a_n \quad (a_{n+1} \leq a_n)$$

для всіх n .



Визначити, які з наведених далі послідовностей обмежені, а які монотонні.

- 1) $a_n = \frac{1}{n}$, 3) $a_n = \frac{1}{2^n}$,
 2) $a_n = n!$, 4) $a_n = \frac{n}{n-1}$.

За означенням відповідно обмеженої і монотонної послідовності маємо:

- 1) $|a_n| = \left| \frac{1}{n} \right| \leq 1$ — обмежена послідовність;

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n \text{ — монотонно спадна послідовність;}$$

- 2) $a_n = n!$ — необмежена послідовність;

- 3) $|a_n| = \left| \frac{1}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2}$ — обмежена послідовність;

$$a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} = a_n \text{ — монотонно спадна послідовність;}$$

- 4) $|a_n| = \left| \frac{n}{n-1} \right| \leq \frac{n}{n-1} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{1} = 1 + \frac{1}{n-1}$ — послідовність обмежена;

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 1 = a_n, \text{ оскільки}$$

$(n+1)^2 > (n-2)n = n^2 - 2n + 1 = n^2 - 2n$ — послідовність монотонно зростаюча.

Означення. Послідовність x_n називається *обмеженою зверху*, якщо існує число m , таке що при всіх $n = 1, 2, 3, \dots$ виконується нерівність $x_n \leq m$.

Означення. Послідовність x_n називається *обмеженою знизу*, якщо існує число m , таке що при всіх $n = 1, 2, 3, \dots$ виконується нерівність $x_n \geq m$.

Означення. Послідовність x_n , не обмежена зверху або знизу, називається *необмеженою*.



Послідовність $x_n = \frac{n}{n+1}$, для якої

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = \frac{3}{4}, \dots$$

обмежена зверху та знизу: $0 < x_n < 1$.



Послідовність $x_n = n$, тобто

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \dots$$

обмежена зверху, але не обмежена знизу.

Означення. Множина довільних точок X на числовій осі називається *обмеженою зверху*, якщо існує число m , таке що для всіх $x \in X$ виконується нерівність $x \leq m$. Число m називається *верхньою межею множини*.

Означення. Множина довільних точок X на числовій осі називається *обмеженою знизу*, якщо існує число m , таке що для всіх, $x \in X$ виконується нерівність $x \geq m$. Число m називається *нижньою межею множини*.

Множина, для якої існують верхня та нижня межі, називається *обмеженою*.

Найменша серед верхніх меж називається *супремумом* і позначається $\sup x$. Найбільша серед нижніх меж називається *інфімумом* і позначається $\inf x$.

Означення. Точною верхньою межею множини X називається значення $M = \sup x$, таке що:

- 1) для будь-якого $x \in X$ виконується нерівність $x \leq M$;
- 2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться значення $x \in X$, таке що $x > M - \varepsilon$.

Аналогічно означається точна нижня межа множини X .

Теорема. У будь-якої обмеженої множини існують точні верхня та нижня межі.

2.1.3. Збіжні та розбіжні послідовності.

Означення. Число a називається *границею послідовності* a_n , якщо для кожного як завгодно малого додатного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $N(\varepsilon)$, що $|a_n - a| < \varepsilon$ для всіх $n > N(\varepsilon)$.

Позначення: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Графічна ілюстрація

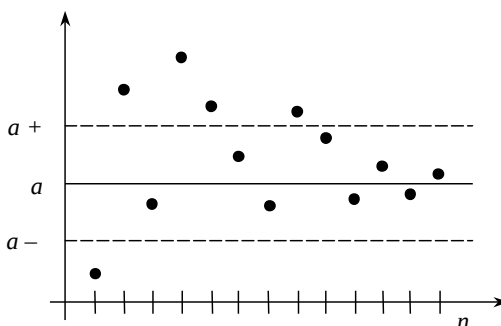


Рис. 2.1.

Означення. Послідовність, яка має границю, називається *збіжною*, а яка не має границі називається *розбіжною*.



Послідовність $a_n = \frac{1}{n}$ – збіжна, оскільки існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ (за означенням

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{для будь-якого } n > N\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Зауваження. Послідовність, границя якої дорівнює 0, називається *нульовою послідовністю*.



Послідовність $a_n = (-1)^{n-1}$ розбіжна, оскільки не має границі. Вона

почергово набуває значення $+1$ і -1 .

2.1.4. Властивості збіжних послідовностей.

Теорема 1. Границя сталої дорівнює цій сталій:

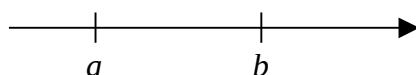
$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c, \quad c = \text{const}.$$

Доведення. Справді, $a_n = a$ для всіх n , тому

$$|a_n - a| = |a - a| = 0.$$

Теорема 2. Якщо послідовність x_n має границю, то ця границя єдина.

Доведення. Припустимо супротивне. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, причому $a \neq b$.



Для визначеності візьмемо, що $b > a$ і $\frac{b-a}{2}$. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то знайдеться число N , таке що при $n > N_1$ виконується нерівність

$$|x_n - a| < \frac{b-a}{2} \quad (2.1)$$

А оскільки водночас $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, то знайдеться число N_2 , таке що при $n > N_2$

$$|x_n - b| < \frac{b-a}{2} \quad (2.2)$$

Візьмемо $N = \max\{N_1, N_2\}$. При $n > N$ одночасно виконуються обидві нерівності (2.1), (2.2).

Оцінімо

$$b - a = |b - a| = |(x_n - a) - (x_n - b)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2} = b - a,$$

тобто $b - a < b - a$.

Це неправильна (хибна) нерівність. Дістали суперечність, яка й доводить теорему.

Теорема 3. Послідовність x_n , яка має границю, є обмеженою.

Доведення. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Візьмемо довільне $\epsilon > 0$, наприклад $\epsilon = 1$. Тоді знайдеться число N , таке що при всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність $|x_n - a| < 1$. Звідси випливає:

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Позначимо

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, 1 + |a|\}.$$

Тоді для всіх n

$$|x_n| \leq M,$$

тобто послідовність x_n обмежена.

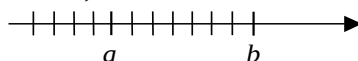
Теорема 4. Нехай $\lim_n x_n = a$, $a < b$. Тоді знайдеться число N , таке що при будь-якому $n > N$ справджуватиметься нерівність

$$x_n < b.$$

Доведення. Візьмемо довільне значення ϵ , наприклад $\epsilon = b - a$. Тоді знайдеться число N , таке що при $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \epsilon$ або $x_n - a < \epsilon$. Тоді $x_n - a < b - a$ або $x_n < b$.

Теорема 5. Нехай $\lim_n x_n = a$. Якщо послідовність x_n при всіх n задовольняє нерівність $x_n < b$, то $a < b$.

Доведення. Припустимо супротивне, тобто $a \geq b$.

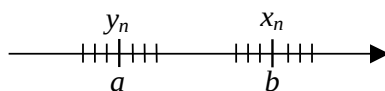


Тоді згідно з теоремою 4 можна стверджувати, що починаючи з деякого номера n виконуватиметься нерівність

$$x_n < b.$$

А це суперечить умові теореми. Отже, припущення неправильне.

Теорема 6. Якщо $x_n < y_n$ і $\lim_n x_n = a$, $\lim_n y_n = b$, то $a < b$.



Доведення. Припустимо супротивне. Нехай $a \geq b$. Тоді згідно з теоремами 4 і 5, починаючи з деякого номера виконуватимуться нерівності

$$x_n < c = \frac{a+b}{2}, \quad y_n < c = \frac{a+b}{2}.$$

A horizontal number line with an arrow pointing to the right. Three points are marked with vertical tick marks and labeled 'a', 'c', and 'b' below them, with 'a' to the left of 'c' to the left of 'b'.

Тоді $x_n < y_n$, що суперечить умові. Отже, припущення неправильне.

Означення. Перехід від нерівності $x_n < y_n$ до нерівності $a < b$ називається *граничним переходом у нерівності*.

Теорема 7 (про «охоплену» послідовність або теорема про двох міліонерів). Нехай виконується нерівність $x_n < u_n < y_n$. Якщо послідовності x_n і y_n збіжні, причому $\lim_n x_n = a$, $\lim_n y_n = a$, то послідовність u_n також буде збіжною і $\lim_n u_n = a$.

Доведення. Візьмемо довільне $\epsilon > 0$. Тоді знайдеться число N , таке що при $n > N$, виконується нерівність $|x_n - a| < \epsilon$. Аналогічно, знайдеться число N_2 , таке що при $n > N_2$ виконується нерівність $|y_n - a| < \epsilon$. Візьмемо $N_2 = \max N_1, N_2$. Тоді при $n > N$ виконуються одночасно обидві нерівності

$$\begin{aligned} x_n &< a < y_n; \text{ або } \frac{x_n - a}{y_n - a} < \frac{a - x_n}{a - y_n}; \\ y_n &< a < x_n; \end{aligned}$$

Розглянувши підкреслені нерівності, запишемо:

$$a - x_n < u_n - y_n < a - y_n.$$

Остаточно дістанемо $a - u_n < a - y_n$, або $|u_n - a| < a - y_n$, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ можна знайти N , таке що при $n > N$ виконується нерівність $|u_n - a| < \varepsilon$, що означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$.



Розглянемо послідовність $u_n = \frac{1}{n} \sin n$.

При всіх n виконується нерівність $\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \sin n < \frac{1}{n}$.

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n = 0$.

Теорема 8 (Больцано-Вейєрштрасса). Будь-яка монотонна обмежена послідовність має границю.

Доведення. Розглянемо множину значень послідовності x_n . Ця множина обмежена, тому вона має точну верхню і нижню межі. Для визначеності вважатимемо, що послідовність x_n монотонно зростає.

Позначимо $M = \sup x_n$ і доведемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M$. При всіх n за умовою теореми виконується нерівність $x_n < M$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. За означенням точної верхньої межі можна знайти значення x_N , таке що $x_N > M - \varepsilon$. Оскільки послідовність монотонно зростає, то при $n > N$ маємо $x_N < x_n < M$.

Із нерівностей $M - \varepsilon < x_n < M$ випливає: $M - \varepsilon < x_n < M$ і $|x_n - M| < \varepsilon$.

Це означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M$.

2.1.5. Число e .

Розглянемо послідовність чисел $x_n = 1 + \frac{1}{n}$. Обчислимо кілька перших значень членів послідовності:

$$\begin{array}{llll} x_1 & 1 & \frac{1}{1}^1 & 2; \\ x_2 & 1 & \frac{1}{2}^2 & \frac{9}{4} \quad 2, 25; \\ x_3 & 1 & \frac{1}{3}^3 & \frac{64}{27} \quad 2, 37...; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & 1 & \frac{1}{n}^n & , \dots \end{array}$$

Доведемо, що послідовність x_n монотонно зростає. За формулою бінома Ньютона маємо:

$$\begin{aligned}
& x_n \quad 1 \quad \frac{1}{n} \quad 1 \quad \frac{n}{1} \quad \frac{1}{n} \quad \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \quad \frac{1}{n^2} \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \quad \frac{1}{n^3} \quad \dots \\
& \frac{n(n-1)\dots 1}{1 \cdot 2 \dots n} \quad \frac{1}{n^n} \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{1 \cdot 2} \quad 1 \quad \frac{1}{n} \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \quad 1 \quad \frac{1}{n} \quad 1 \quad \frac{2}{n} \quad \dots \\
& \frac{1}{k!} \quad 1 \quad \frac{1}{n} \quad 1 \quad \frac{2}{n} \quad \dots \quad 1 \quad \frac{k}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \dots \quad \frac{1}{n!} \quad 1 \quad \frac{1}{n} \quad 1 \quad \frac{2}{n} \quad \dots \quad 1 \quad \frac{n}{n} \quad \frac{1}{n} \quad .
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Замінімо в цьому розкладі n на $n+1$. Тоді число доданків збільшиться на одиницю. Далі маємо:

$$n \quad n-1 \quad \frac{1}{n} \quad \frac{1}{n-1} \quad \frac{1}{n} \quad \frac{1}{n-1} \quad 1 \quad \frac{1}{n} \quad 1 \quad \frac{1}{n-1}.$$

Кожний вираз, що містить n , зростає, тобто $x_{n+1} > x_n$.

Доведемо обмеженість послідовності x_n .

У формулі (3) значення кожного виразу в дужках менше від одиниці. Отже,

$$x_n \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{1 \cdot 2} \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \quad \frac{1}{n!}$$

$$2 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2 \cdot 2} \quad \frac{1}{2^3} \quad \frac{1}{2^{n-1}} \quad 2 \quad 1 \quad 3.$$

геометрична прогресія зі знаменником q

За формулою суми геометричної прогресії маємо:

$$\frac{q(q^{n-1}-1)}{q-1} = 1 + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots + 1.$$

Звідси

$$2 \quad 1 \quad \frac{1}{n} \quad 3.$$

За теоремою Больцано-Вейерштрасса послідовність x_n має границю.

Означення. Границя послідовності x_n $1 - \frac{1}{n}$ називається *числом ϵ* .

Позначення: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Число e – *Неперове число*.

2.1.6. Наближене обчислення числа e .

У виразі (2.3), спрямувавши n до нескінченності, дістанемо:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

Обчислимо значення e з точністю до 5 знаків після коми:

$$1 = 1,00000$$

$$+ \frac{1}{2} = 0,50000$$

$$+ \frac{1}{3!} = 0,166667$$

$$+ \frac{1}{4!} = 0,04166$$

$$+ \frac{1}{5!} = 0,00833$$

$$+ \frac{1}{6!} = 0,00139$$

$$+ \frac{1}{7!} = 0,00019$$

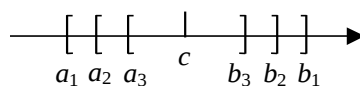
$$+ \frac{1}{8!} = 0,00002$$

$$\hline 2,71826$$

$$e \approx 2,71828.$$

2.1.7. Лема про вкладені відрізки.

Розглянемо послідовність відрізків $[a_n, b_n]$, таких що кожний з наступних лежить у попередньому: $a_{n+1} \leq a_n, b_{n+1} \leq b_n$ (рис.). Послідовність таких відрізків називається *послідовністю вкладених відрізків*.



Лема. Для послідовності вкладених відрізків $[a_n, b_n]$ за умови $\lim_n (b_n - a_n) = 0$ існує єдина точка c , яка належить усім відрізкам, і при цьому

$$\lim_n a_n = c, \quad \lim_n b_n = c.$$

Доведення. Розглянемо послідовність значень a_n . Вона монотонно зростає і обмежена зверху. За теоремою Больцано-Вейєрштрасса існує границя $\lim_n a_n = c$, причому завжди виконується умова $a_n \leq c$. Припущення, що $\lim_n b_n = c_1 < c$ приведе до суперечності. Справді, якщо $c_1 < c$, то починаючи з деякого номера $b_n < a_n$. Це суперечить тому, що a_n – лівий кінець відрізка, b_n – правий.

За припущення $c_1 < c$ виконується нерівність $b_n \leq c_1 < c \leq a_n$.

Додаючи нерівності $b_n \leq c_1$ і $c \leq a_n$, дістаємо:

$$b_n - c \leq c_1 - a_n$$

або

$$b_n - a_n \leq c_1 - c = 0.$$

Це суперечить умові $\lim_n (b_n - a_n) = 0$. Припущення неправильне. Отже, $c_1 = c$. Водночас доведено, що $\lim_n a_n = \lim_n b_n = c$ і $a_n \leq c \leq b_n$. Точка c належить всім відрізкам, причому вона єдина.

2.1.8. Частинні послідовності.

Розглянемо послідовність x_n і вилучимо з неї деякі члени. Члени, що залишилися, занумеруємо наново $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$. Нова послідовність називається *частинною послідовністю*, або *підпослідовністю*.



Розглянемо послідовність $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$.

У цій послідовності можна розглянути частинні послідовності:

$$1, 1, 1, 1, \dots;$$

$$1, 1, 1, 1, 1, \dots$$

Теорема 9. Якщо послідовність x_n має границю, то будь-яка частинна послідовність має цю саму границю.

Доведення. Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$ і число N , таке що для $n > N$ виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Візьмемо частинну послідовність $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$, коли $n_k > k$. При $n > N$ виконується нерівність

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Теорема 10 (принцип вибору Больцано-Вейєрштрасса). З будь-якої обмеженої послідовності можна вибрати збіжну частинну послідовність.

Доведення. Нехай усі члени послідовності містяться на відрізку $[x, b]$. Поділимо відрізок пополам. В одну його половину (або й в обидві) обов'язково потрапляє нескінченне число членів послідовності. Ту половину відрізка, яка містить нескінченне число членів послідовності, позначимо $[a_1, b_1]$. Візьмемо в ній точку x_{n_1} . Відрізок $[a_1, b_1]$ поділимо пополам і одну з половин, яка містить нескінченне число членів послідовності, позначимо $[a_2, b_2]$.

Виберемо в ній точку x_{n_2} , причому $n_2 > n_1$. Далі поділимо відрізок $[a_2, b_2]$ пополам і позначимо половину, що містить нескінченне число членів послідовності, через $[a_3, b_3]$ та виберемо тут точку x_{n_3} ($n_3 > n_2$) і т. д. Дістанемо послідовність вкладених відрізків. Довжина n відрізків $[a_n, b_n]$ дорівнює $\frac{b-a}{2^n}$. Вона прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$. За лемою про вкладені відрізки існує єдина точка c , така що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$ при $a_n < c < b_n$. Для всіх n виконується нерівність $a_k < x_{n_k} < b_k$. За теоремою 7 про «охоплену» послідовність маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = c.$$

Означення. Точна верхня межа границь усіх можливих частинних послідовностей з повної послідовності x_n називається *верхньою межею послідовності* і позначається

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Точна нижня межа границь зазначених частинних послідовностей називається *нижньою межею послідовності* і позначається

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

У будь-якої послідовності існують верхня та нижня межі.

Якщо послідовність не обмежена зверху, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

Якщо послідовність не обмежена знизу, то

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

Зауважимо, що необмежена послідовність не може мати границі.



Розглянемо послідовність $x_n = (-1)^n$, тобто

$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -1, \dots$, і визначимо для неї верхню та нижню межі:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1.$$



Розглянемо послідовність $x_n = (-1)^n n$. Для неї можна знайти верхню та нижню межі:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

2.1.9. Принцип збіжності Больцано-Коші.

Теорема 11. Для того щоб послідовність x_n мала границю, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\epsilon > 0$ знайшовся номер N , такий що при $n > N, m > N$ виконується нерівність

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{n}.$$

Доведення. Необхідність. Нехай послідовність x_n прямує до границі a . За заданим $\varepsilon > 0$ знайдеться номер N , такий що при $n > N$ буде виконано нерівність $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Коли $n = N$, $m = N$, дістанемо

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| = |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

або

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{n}.$$

Достатність. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Знайдемо номер N , такий що при $n > N$, $m > N$ виконується нерівність

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{n}.$$

Послідовність x_n обмежена. Тому існує частинна послідовність x_{n_k} , яка має границю a . Перейшовши в нерівності $|x_{n_k} - x_m| < \frac{1}{n_k}$ до границі при $k \rightarrow \infty$, дістанемо $|a - x_m| < \frac{1}{m}$. Це означає, що $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a$.

2.1.10. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності.

Означення. Послідовність x_n називається нескінченно малою, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Послідовність x_n називається нескінченно великою, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Теорема 11. Сума скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.

Доведення. Нехай x_n, y_n – нескінченно малі послідовності. Доведемо, що їх сума $z_n = x_n + y_n$ є нескінченно мала послідовність. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$,

знайдеться число N_1 , таке що при $n > N_1$ виконуватиметься нерівність $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Аналогічно,

знайдеться число N_2 , таке що при $n > N_2$ виконуватиметься $|y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Візьмемо число

$N = \max\{N_1, N_2\}$. При $n > N$ справджуються обидві нерівності $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тому

$$|z_n| = |x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

тобто

$$|z_n| < \frac{1}{n}.$$

Це означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

Зауваження. Сума нескінченно великого числа нескінченно малих послідовностей може і не бути нескінченно малою.



Послідовність $x_n = \frac{1}{n}$ – нескінченно мала, але нескінченна сума цих

послідовностей не є нескінченно малою.

$$\underbrace{\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \dots \quad \frac{1}{n}}_n = 1.$$

Теорема 12. Добуток нескінченно малої послідовності на обмежену є нескінченно мала послідовність.

Доведення. Нехай послідовність x_n – нескінченно мала, а послідовність y_n – обмежена, тобто при всіх n виконується нерівність $|y_n| \leq M$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді знайдеться номер N , такий що при всіх $n \geq N$ виконується нерівність

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Далі маємо:

$$|x_n y_n| \leq |x_n| |y_n| \leq \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon;$$

$$|x_n y_n| < \varepsilon.$$

Це означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = 0$.



Послідовність $x_n = \frac{1}{n^3}$ – нескінченно мала, а послідовність $y_n = \cos n$ – обмежена, тому послідовність $\frac{\cos n}{n^3}$ є нескінченно малою.

Теорема 13. Якщо x_n — нескінченно велика послідовність, то $y_n = \frac{1}{x_n}$ — нескінченно мала послідовність.

Доведення. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді знайдеться число N таке, що при $n \geq N$ виконується нерівність $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$. Оцінимо величину y_n :

$$|y_n| = \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon.$$

Отже, $|y_n| < \varepsilon$, що означає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0.$$

Теорема 14. Якщо x_n — нескінченно мала послідовність і $x_n \neq 0$, то послідовність $y_n = \frac{1}{x_n}$ є нескінченно великою.

Доведення аналогічне попередньому.



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \text{ оскільки } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty.$$

Зауваження. Нескінченно велику (малу) послідовність називають також *нескінченно великою (малою) величиною*.

2.1.11. Теореми про границі.

Теорема 15. Для того щоб послідовність x_n мала границю a , необхідно і достатньо, щоб $x_n = a + y_n$, де y_n — нескінченно мала послідовність.

Доведення. Необхідність. Нехай $\lim_n x_n = a$. Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$. Завжди знайдеться число N таке, що при $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. Позначимо $x_n - a = y_n$. Для послідовності y_n виконується нерівність $|y_n| < \varepsilon$. Це означає, що $\lim_n y_n = 0$.

Достатність. Нехай y_n — нескінченно мала послідовність. Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$. Для нього знайдеться число N , таке що при $n > N$ виконується нерівність $|y_n| < \varepsilon$. Звідси випливає $|x_n - a| < \varepsilon$. Це й означає, що $\lim_n x_n = a$.

Теорема 16. Якщо послідовності x_n і y_n збігаються, а також

$$\lim_n x_n = a;$$

$$\lim_n y_n = b,$$

то послідовності $x_n + y_n$, $x_n y_n$, $\text{const } x_n$, $\frac{x_n}{y_n}$ ($b \neq 0$) також збігаються і виконуються наведені далі рівності.

1. $\lim_n (x_n + y_n) = \lim_n x_n + \lim_n y_n = a + b$ — границя суми послідовностей дорівнює сумі їх границь, якщо вони існують.

2. $\lim_n (x_n y_n) = \lim_n x_n \lim_n y_n = ab$ — границя добутку послідовностей дорівнює добутку їх границь, якщо вони існують.

3. $\lim_n \text{const } x_n = \text{const } \lim_n x_n = \text{const } a$ — сталий множник можна винести за знак границі.

4. $\lim_n \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_n x_n}{\lim_n y_n} = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) — границя відношення двох послідовностей дорівнює відношенню границь послідовностей, якщо вони існують і $\lim_n y_n \neq 0$.



Знайти $\lim_n \frac{n^3 - 1}{3n - 1}$.

$$\lim_n \frac{n^3 - 1}{3n - 1} = \lim_n \frac{\frac{n^3 - 1}{n}}{\frac{3n - 1}{n}} = \lim_n \frac{1 - \frac{1}{n^3}}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{\lim_n 1 - \lim_n \frac{1}{n^3}}{\lim_n 3 - \lim_n \frac{1}{n}} = \frac{1 - 0}{3 - 0} = \frac{1}{3}.$$

2.1.12. Границя відношення двох многочленів.

Правило:

$$\lim_n \frac{a_p n^p}{b_q n^q} = \begin{cases} \frac{a_p}{b_q}, & \text{якщо } p < q \\ \frac{a_{p-1} n^{p-1}}{b_{q-1} n^{q-1}} \dots \frac{a_1 n}{b_1}, & \text{якщо } p = q \\ 0, & \text{якщо } p > q \end{cases}$$



$$1. \lim_n \frac{2n^2}{3n^2} = \frac{2}{3}.$$

$$2. \lim_n \frac{n^2}{n} = \lim_n n = \infty.$$

2.2. Границя функції.

2.2.1. Поняття границі функції.

Означення. Нехай $x_0 \in (a, b)$ і функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b) за винятком, можливо, точки x_0 . Якщо для будь-якої збіжної послідовності x_n ($\lim_n x_n = x_0$, $x_0 \neq x_n$) існує $\lim_n f(x_n) = A$, то говорять, що функція $f(x)$ має границю A при $x \rightarrow x_0$.

Позначення:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Інше означення границі функції дав Коші:

Означення. Границею функції $y = f(x)$ при x , що прямує до a , називається число (Коші)

A , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке що для всіх x , які задовольняють нерівність $0 < |x - a| < \delta$, викликає $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначення: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Графічна ілюстрація:

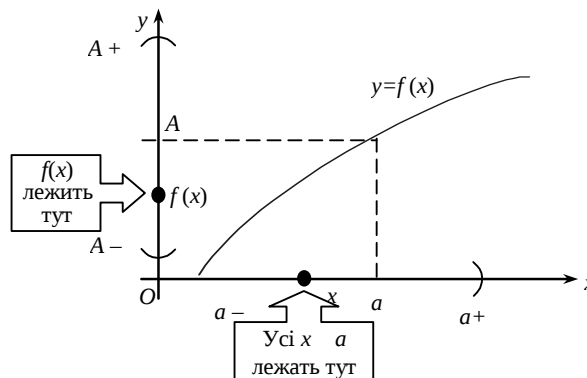


Рис. 2.2.

Пояснення. Для всіх x , що містяться поруч із точкою $x=a$, значення функції $f(x)$ лежать біля A .



Довести за означенням границі функції, що $\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2$.

Застосовуємо означення границі, коли $f(x)=5x-3$, $a=1$, $A=2$.

Згідно з означенням потрібно показати, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке що для всіх x

$$0 < |x - 1| < \delta \implies |(5x - 3) - 2| < \varepsilon.$$

Маємо:

$$|5x - 5| < \varepsilon;$$

$$5|x - 1| < \varepsilon;$$

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Отже, можна взяти $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ (рис.4.3).

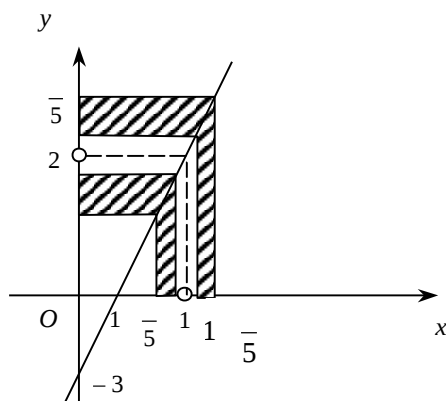


Рис. 2.3.

Для функції $y = 5x - 3$ нерівність $|f(x) - 2| < \varepsilon$ виконується, як тільки $0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{5}$.

2.2.2. Ліва та права границі функції.

Означення. Правою границею функції $y = f(x)$, коли x прямує до a справа, називається число l , таке що $l > 0$ існує $\delta > 0$, при якому для всіх x , що задовольняють нерівність

$$a < x < a + \delta,$$

маємо

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Позначення:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A.$$

Графічна ілюстрація

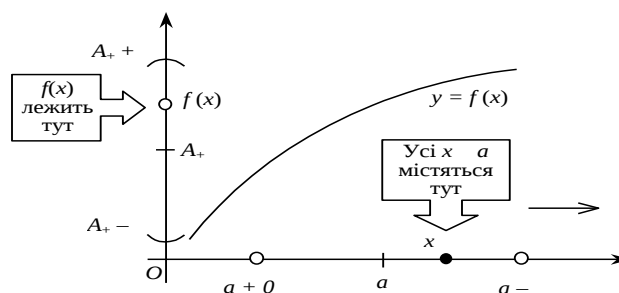


Рис. 2.4.

Означення. Лівою границею функції $y = f(x)$, коли x прямує до a зліва, називається число A_- , таке що при будь-якому $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх x , які задовольняють нерівність

$$a - \delta < x < a,$$

маємо

$$|f(x) - A_-| < \varepsilon.$$

Позначення: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_-$.

Інколи границю $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ називають двосторонньою границею, а границі зліва та справа — односторонніми границями.

Зв'язок між односторонніми та двосторонніми границями. Функція $y = f(x)$ має границю в точці $x=a$ тоді і тільки тоді, коли існують границі зліва та справа в точці $x=a$ і дорівнюють одна одній. Символічно:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A \text{ і } \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A.$$

2.2.3. Теореми про границі функції.

Теорема 17. Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то функція $f(x)$ обмежена при $x \rightarrow a$.

Теорема 18. Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $A \neq 0$, то знайдеться такий δ -окіл точки a , де ця функція набуває значень, які мають той самий знак, що й A .

Теорема 19. Якщо $f(x) = c$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$.

Теорема 20. Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ і $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то існує границя $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, якщо $B \neq 0$.

Теорема 21. Якщо існують границі $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то виконуються такі співвідношення:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A + B;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = AB;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ якщо } B \neq 0.$$

2.2.4. Перша визначна границя.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доведення. З рис. 2.5 дістаємо:

$$\begin{array}{ccccccc} S_{OAC} & S_{\triangle OBC} & S_{OBD} & \frac{\sin x \cos x}{2} & \frac{x}{2} & \frac{\operatorname{tg} x}{2} \\ \cos x & \frac{x}{\sin x} & \frac{1}{\cos x} & \frac{1}{\cos x} & \frac{\sin x}{x} & \cos x. \end{array}$$

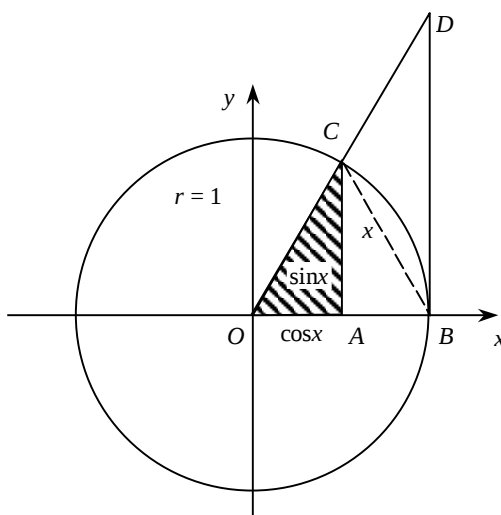


Рис. 2.5.

Доведемо, що коли $x \rightarrow 0$, то $\cos x \rightarrow 1$, причому з рисунка бачимо: $0 < \sin x < x$.

За теоремою 7 про «охоплену» послідовність (п. 4.1.4):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \lim_{y \rightarrow 0} \sin(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \sin y = 0,$$

тобто

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$$

Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 \frac{x}{2}} = 1.$$

Отже, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Графічна ілюстрація у $\frac{\sin x}{x}$.

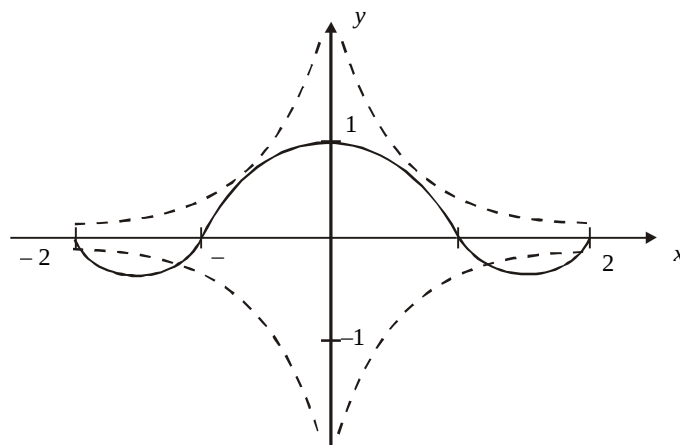


Рис. 2.6.

Наслідки:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{ax}{\frac{\sin bx}{bx} bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{bx} = \frac{a}{b}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin ax}{\cos ax}}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\cos ax} \cdot \frac{1}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\cos ax} \cdot \frac{ax}{bx} \cdot \frac{1}{ax} = \frac{a}{b}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{bx} = \frac{a}{b}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{bx} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{ax} \cdot \frac{ax}{bx} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{1}{a} \operatorname{tg} t} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

2.2.5. Друга визначна границя.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Доведення. 1. Припустимо, що $x > 0$. Для будь-якого x знайдеться натуральне число n , таке що $n \leq x < n+1$. Тоді

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{x} < \frac{1}{n+1},$$

або

$$1 + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Якщо велике число піднесемо до великого степеня, нерівність лише підсилиться. Дістаємо:

$$1 - \frac{1}{n} \quad 1 - \frac{1}{x} \quad 1 - \frac{1}{n-1}.$$

Обчислимо границі:

$$\begin{aligned} \lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} &= \lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} \\ &= \lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} = e^{-1} \cdot e = e; \\ \lim_n \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^n &= \lim_n \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^{(n-1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n-1}} = \frac{e}{1} = e. \end{aligned}$$

За теоремою 7 про «охоплену» послідовність маємо:

$$\lim_x \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

2. Нехай $x > 0$, $x \rightarrow \infty$. Знайдемо

$$\begin{aligned} \lim_x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} \cdot \lim_x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-1} \\ &= \lim_x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} \cdot \lim_x \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= \lim_x \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \lim_x \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \lim_x \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Наслідки:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \left[\begin{array}{l} \text{Користуємося} \\ \text{неперервністю} \\ \text{функції } y = \ln x \end{array} \right] = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\log_a x} = \frac{1}{\ln a} \log_a e.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \ln a = \ln a.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^{1/x} - 1}{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^{1/x} - 1}{x} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} \frac{(1-x)^{1/x} - 1}{x} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} \frac{y}{x} \cdot \frac{\ln(1-x)}{\ln(1-y)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1-y)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x}.$$

У частинному випадку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1-x} - 1}{x} = \frac{1}{n}.$$

2.2.6. Формула Ейлера.

Л. Ейлер дав означення показникової функції за формулою:

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$



Знайдемо границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{iy}{n} \right)^n, \quad y \in \mathbb{R}.$

Розв'язування. Позначимо $z_n = 1 + \frac{iy}{n}, \quad |z_n| = \sqrt{1 + \frac{y^2}{n^2}}.$

Скориставшись формулою Муавра, дістанемо:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \arg z_n &= \frac{y}{n}, \quad \arg z_n = \arctg \frac{y}{n}; \\ \left(1 + \frac{yi}{n} \right)^n &= \sqrt{1 + \frac{y^2}{n^2}}^n (\cos n \arg z_n + i \sin n \arg z_n); \\ \left(1 + \frac{yi}{n} \right)^n &= \left(1 + \frac{y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} (\cos n \arg z_n + i \sin n \arg z_n). \end{aligned}$$

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n y^2}{2 n^2}} = e^0 = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \arg z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \arctg \frac{y}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{y}{n} = y.$$

Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{iy}{n} \right)^n = \cos y + i \sin y.$$

Звідси випливає формула Ейлера

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Для показникової функції маємо

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Тоді можна також знайти вирази для тригонометричних функцій $\sin x$ і $\cos x$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$



Обчислити e^i .

$$e^i = \cos 1 + i \sin 1 \approx 0.54 - 0.84i.$$

2.3. Неперервність функції.

2.3.1. Основні поняття.

Означення (Коші). Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці x_0* функцією, якщо ця функція f визначена в точці x_0 і для кожного (достатньо малого) числа $\epsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке що при $|x - x_0| < \delta$ виконується $|f(x_0) - f(x)| < \epsilon$.

або $f(x)$ – неперервна в точці x_0 , якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Відношення $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ можна переписати у вигляді

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$$

Графічна ілюстрація

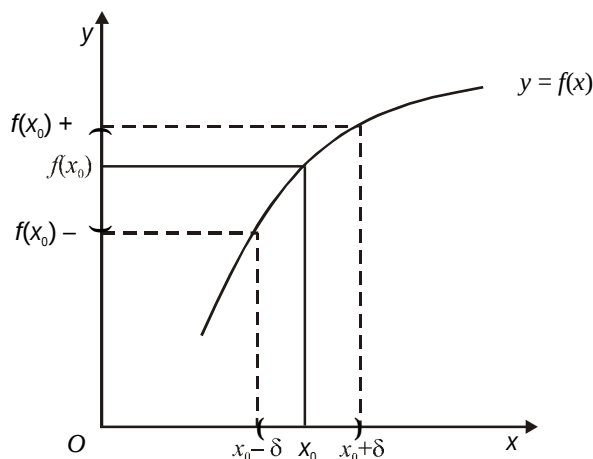


Рис. 2.7.

Пояснення. Функція $y = f(x)$ – неперервна в точці x_0 , якщо при будь-якому $\epsilon > 0$ існує інтервалу $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ значення $f(x)$ лежать у смузі $f(x_0) - \epsilon < y < f(x_0) + \epsilon$.

Дано означення неперервності функції, еквівалентні означенню Коші.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці x_0* , якщо

- 1) $f(x)$ визначена в точці x_0 ;
- 2) границя зліва в точці x_0 дорівнює границі справа в цій точці і дорівнює значенню в ній функції (рис. 3.8):

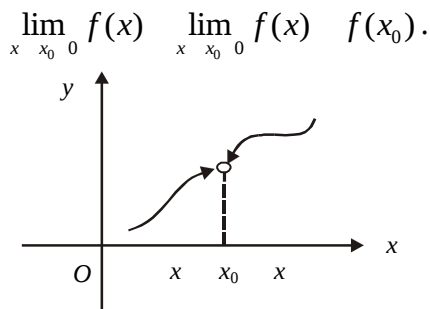


Рис. 2.8.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці x_0* , якщо нескінченно малому приросту аргументу $x - x_0$ відповідає нескінченно малий приріст функції $y - f(x_0)$.



Довести за означенням, що функції $y = x^2$ і $y = \sin x$ неперервні в будь-якій точці $x_0 \in R$.

Розв'язування. 1. Надамо аргументу $x_0 \in R$ приросту x , тоді $y - (x_0 + x)^2 - x^2 - 2x_0 x - (x)^2$.

Якщо x – нескінченно мала величина, то y – також нескінченно мала величина, оскільки коли $x \rightarrow 0$, то і $y \rightarrow 0$. Отже, $y = x^2$ – неперервна функція при будь-якому $x_0 \in R$.

2. Надамо аргументу $x_0 \in R$ приросту x :

$$y - \sin(x_0 + x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x_0 + x - x_0}{2} \cos \frac{x_0 + x - x_0}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos x_0 = \frac{x}{2}.$$

Якщо $x \rightarrow 0$, то $y \rightarrow 0$. Отже, функція $y = \sin x$ неперервна функція при будь-якому $x_0 \in R$.

Означення. Функція $y = f(x)$ *неперервна на проміжку (a, b)* , якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Означення. Функція $y = f(x)$ *неперервна на відрізку $[a, b]$* , якщо вона неперервна на проміжку (a, b) і неперервна в точці $x = a$ справа і в точці $x = b$ зліва.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці x_0 справа (зліва)*, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$



Функція $y = \arctg \frac{1}{x}, x > 0;$
 $\frac{\pi}{2}, x < 0$

неперервна в точці x_0 зліва (рис. 2.9).

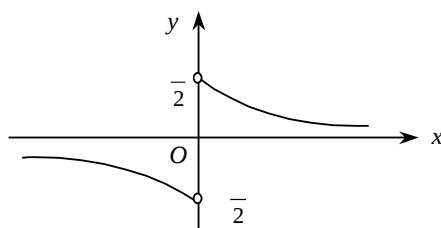


Рис. 2.9.

2.3.2. Властивості неперервних функцій.

Теорема 1. Усі елементарні функції неперервні на інтервалах визначеності.

Теорема 2. Нехай функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ – неперервні на інтервалі (a, b) . Тоді їх наведені далі комбінації також неперервні:

- 1) $f(x) + g(x)$; 3) $\text{const } g(x)$;
- 2) $f(x) - g(x)$; 4) $f(x) / g(x), g(x) \neq 0$.

Теорема 3. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в будь-якій точці x_0 і $u = F(y)$ неперервна в точці $f(x_0)$, то їх композиція $f \circ F$ – складена функція і $u = F(f(x))$ – неперервна в точці x_0 .

Доведення. За означенням

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(f(x)) \stackrel{F \text{ неперервна в т. } x_0}{=} F \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{f \text{ неперервна в т. } x_0}{=} F(f(x_0)).$$



Довести, що функція

$$y = \left| \frac{x \sin x}{x^2 - 2} \right|$$

неперервна в будь-якій точці x .

Розв'язування. Функція y є композицією двох неперервних функцій

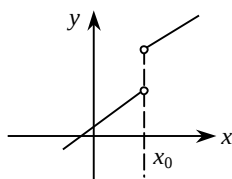
$$f(x) = \frac{x \sin x}{x^2 - 2} \text{ і } F(x) = |x|.$$

Функція $f(x)$ і $F(x)$ неперервна згідно з теоремою 1, а їх композиція $f \circ F$ неперервна за теоремою 3.

2.3.3. Розриви функції.

Означення. Функція $y = f(x)$, яка не є неперервною в точці x_0 , називається *розривною* в цій точці.

МОЖЛИВІ ВАРІАНТИ РОЗРИВУ ФУНКЦІЙ В ТОЧЦІ



$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ (рис. 2.10).}$$

Рис. 2.10.

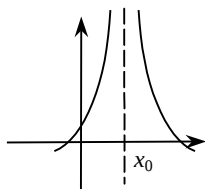


Рис. 2.11.

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \quad (\text{рис. 2.11}).$$

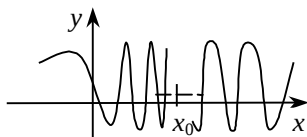


Рис. 2.12.

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \quad \text{не існує (рис. 2.12).}$$

Означення. Точка x_0 називається *точкою розриву першого роду* функції $y = f(x)$, якщо існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ і при цьому:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$$

або

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$$

або

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0) \quad \text{усувний розрив 1 го роду.}$$

Означення. Точка x_0 називається *точкою розриву 2-го роду* функції $y = f(x)$, якщо одна із границь $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ не існує або нескінченна

2.3.4. Методика дослідження функції $y = f(x)$ на неперервність.

1. Знаходимо точку x_0 – «підозрілу» на розрив. Це може бути точка, в якій функція невизначена або змінює закон визначеності.

2. Визначаємо інтервали неперервності функції.

3. Обчислюємо

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x).$$

4. Робимо висновок згідно з теоремами (якщо такі границі існують), або використовуючи означення точок розриву.



Дослідити на неперервність функцію

$$y = \begin{cases} x, & x \leq 1; \\ x-1, & x > 1. \end{cases}$$

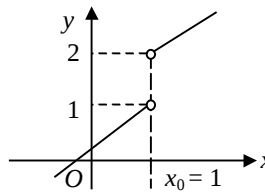


Рис. 2.13.

1. Точка $x_0=1$ є «підозрілою» на розрив, оскільки в ній функція змінює закон визначеності (на проміжку $(-\infty; 1)$ маємо $y = x$, на проміжку $(1, +\infty)$ – іншу залежність: $y=x+1$).

2. Функція неперервна на проміжках $(-\infty; 1)$ і $(1; +\infty)$.

3. Знаходимо

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2.$$

4. $1 \neq 2$, тому за означенням функція $y = \begin{cases} x, & x < 1; \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$ має в точці $x=1$ неусувний розрив 1-го роду.



Дослідити на неперервність функцію

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

1. Точка $x_0=0$ є «підозрілою» на розрив, оскільки в ній функція змінює закон визначеності.

2. $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ – множина, де функція неперервна.

3. Знаходимо

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$1 = 1 = 1$ – функція неперервна в точці $x_0 = 0$ за означенням неперервної функції. Отже, інтервалом неперервності функції $y = f(x)$ є $(-\infty; +\infty)$.

2.3.5. Наслідки з формул для визначних границь.

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1. & 2. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= e; & 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \log_a e, \\ & & \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{x} &= e. & 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1. \\ 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a, & 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1}{x} &= 1. \end{aligned}$$

Порівняння нескінченно малих величин.

2.3.6.

Розглянемо функції $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ і припустимо, що

$$\lim_{x \rightarrow a} (x) \lim_{x \rightarrow a} (x) \lim_{x \rightarrow a} (x) = 0,$$

де a – скінчена точка або нескінченність, тобто (x) , (x) , (x) – нескінченно малі величини.

Означення. Нескінченно малі величини (x) і (x) називаються *нескінченно малими величинами одного порядку мализни*, якщо

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x)}{(x)} = A, \quad A \neq 0, \quad A \neq \infty.$$

Означення. Нескінченно мала величина (x) називається *нескінченно малою величиною вищого порядку мализни*, порівняно з (x) , якщо

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x)}{(x)} = 0.$$

Означення. Якщо границя $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x)}{(x)}$ не існує, то (x) і (x) називаються *непорівнянними нескінченно малими величинами*.

Величина $(x) = \sin x^2$ – нескінченно мала вищого порядку мализни порівняно з x , оскільки

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot x = \lim_{x \rightarrow 0} 1 \cdot x = 0.$$

Величини $x \sin \frac{1}{x}$ і x нескінченно малі при $x \rightarrow 0$ та непорівнянні, оскільки

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ – не існує.}$$

Означення. Нескінченно малі величини (x) і (x) при $x \rightarrow a$ називаються *еквівалентними*, якщо

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x)}{(x)} = 1.$$

Позначення. Еквівалентність нескінченно малих величин (x) і (x) позначається $\sim$ і означає, що величина «поводиться як» величина (x) .

Величини $e^x - 1$ і x при $x \rightarrow 0$ еквівалентні, оскільки

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Теорема 1. Для того щоб дві нескінченно малі величини були еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб їх різниця була нескінченно малою величиною вищого порядку мализни порівняно з (x) .

Доведення. Необхідність. Нехай (x) і (x) – еквівалентні нескінченно малі величини при $x \rightarrow a$. Знайдемо

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x) - (x)}{(x)} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Аналогічно,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Отже, $\frac{f(x)}{g(x)}$ – нескінченно мала величина вищого порядку малості порівняно з $\frac{1}{g(x)}$.

Достатність. Нехай

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ і } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \text{ Тоді}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \cdot 1$$

Отже, $\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f(x)}{g(x)}$.

Теорема 2. Нескінченно малі величини, які входять до добутку та відношення, можна замінювати їм еквівалентними.

Доведення. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f(x)}{g(x)}$. Шукаємо границю:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Нескінченно мала величина $\frac{f(x)}{g(x)}$ замінюється еквівалентною їй величиною $\frac{f(x)}{g(x)}$. При цьому значення границі не змінюється.

Означення. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{f(x)}{g(x)}$ – нескінченно малі величини. У разі, коли

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A, A \neq 0, A \neq \infty,$$

говорять, що нескінченно мала величина $\frac{f(x)}{g(x)}$ має порядок k відносно нескінченно малої величини $\frac{f(x)}{g(x)}$ або скорочено: $\frac{f(x)}{g(x)}$ – величина порядку k . Тоді

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Величина $\frac{f(x)}{g(x)}$ – називається головною частиною нескінченно малої величини $\frac{f(x)}{g(x)}$.



Порівняємо нескінченно малі величини $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \rightarrow 0$.

$$\text{Розв'язування. } 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{2}.$$

Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2} \right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Отже, величина $1 - \cos x$ є нескінченно малою другого порядку малості відносно x . Її головна частина дорівнює $\frac{1}{2} x^2$.

2.3.7. Шкала еквівалентних нескінченно малих величин.

1. $\sin x \sim x, \quad x \rightarrow 0.$

2. $\ln(1+x) \sim x, \quad \log_a(1+x) \sim (\log_a e)x, \quad x \rightarrow 0.$

3. $e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \ln a, \quad x \rightarrow 0.$

4. $(1+x)^{-1} \sim -x, \quad x \rightarrow 0.$

5. $\arcsin x \sim x, \quad x \rightarrow 0.$

6. $\operatorname{tg} x \sim x, \quad x \rightarrow 0.$

7. $\operatorname{arctg} x \sim x, \quad x \rightarrow 0.$



Знайти границю:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt[3]{1-2x} \cdot \sqrt[4]{1-3x} \cdot \sqrt[5]{1-x} - 4}{\arcsin 2x \cdot \sin x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \ln(1-3x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2} \cdot \frac{2x}{3} \cdot \frac{3x}{4} \cdot \frac{x}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{103}{300}.$$

Зауваження. У виразі, який містить суму та різницю, заміна нескінченно малих величин еквівалентними їм може іноді призвести до помилки.



Знайдемо границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x-x^2) - \ln(1-x-x^2)}{x^2}.$$

Розв'язування. Спосіб 1-й. Скориставшись формулою $\ln(1-x) \sim -x$, запишемо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x-x^2) - \ln(1-x-x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x-x^2 - 1+x+x^2}{x^2} = 2.$$

Спосіб 2-й. У чисельнику застосуємо формулу $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x-x^2) - \ln(1-x-x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x-x^2)(1+x+x^2)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2-x^4)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-x^4}{x^2} = 1.$$

Висновок. Спосіб 1-й помилковий. Якщо в сумі або різниці при заміні нескінченно малих їм еквівалентними взаємно знищуються малі вищого порядку, то така заміна неприпустима.

2.3.8. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

Теорема 1. (Больцано-Коші). Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і на кінцях його набуває значень різних знаків. Тоді на інтервалі $(a; b)$ знайдеться точка c , в якій функція перетворюється на нуль.

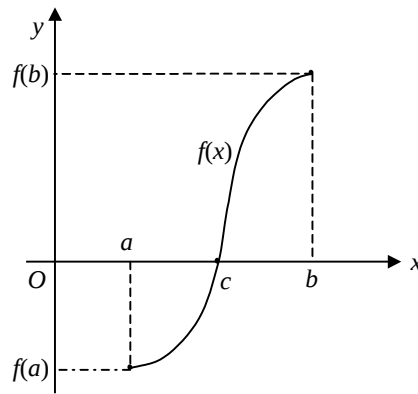


Рис. 2.14, а.

Доведення. Припустивши, для визначеності, що $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (рис. 2.14, а), розіб'ємо відрізок $[a; b]$ пополам. У точці $x = \frac{a+b}{2}$ значення функції $f(x)$ може дорівнювати нулю. У такому разі теорему доведено. Якщо ця функція не перетворюється на нуль у зазначеній точці, то позначимо $[a_1; b_1]$ ту з половин даного відрізка, де на кінцях функція $f(x)$ набуває значень різних знаків. Аналогічно відрізок $[a_1; b_1]$ також розіб'ємо пополам. Якщо в його середині функція перетворюється на нуль, то теорему доведено. Якщо в цій точці функція відмінна від нуля, то позначаємо $[a_2; b_2]$ ту з половин відрізка $[a_1; b_1]$, на кінцях якої набуває значень різних знаків. Міркуючи так, або дістанемо функцію, що стає нулем у середині одного з утворюваних відрізків, або утворимо нескінченну послідовність вкладених відрізків $[a; b]$, $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$,

Довжина цих відрізків прямує до нуля. Отже, існує точка c , така що $\lim_n a_n = c$, $\lim_n b_n = c$. За припущенням маємо $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$, тобто $f(c) \leq 0$ і $f(c) \geq 0$. Це означає, що $f(c) = 0$.

Зауваження. Точок, у яких функція перетворюється на нуль, може бути кілька (рис. 2.14, б).

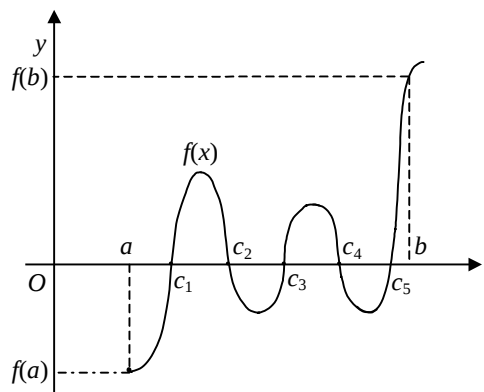


Рис. 2.14, б.

2. Алгоритм, запропонований Коші, придатний для чисельного відшукування коренів функції.

Теорема 2 (Коші). Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і на його кінцях набуває різних значень. Позначимо $f(a) = A$ і $f(b) = B$. Тоді при будь-якому $C: A < C < B$ знайдеться точка c із $[a, b]$, така що $f(c) = C$.

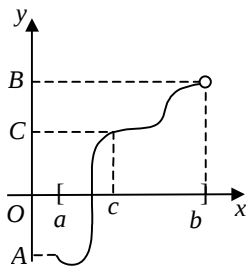


Рис. 2.15

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію $\varphi(x) = f(x) - c$. Вона неперервна як різниця неперервних функцій. Маємо:

$$(a) \quad \varphi(a) = f(a) - c \leq A - c < 0;$$

$$(b) \quad \varphi(b) = f(b) - c \geq B - c > 0.$$

Тоді за теоремою Больцано-Коші знайдеться значення c , для якого $\varphi(c) = 0$ і $f(c) = c$.

Теорема 3 (Вейєрштрасса). Якщо функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на деякому відрізку $[a, b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Доведення. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то в кожній точці x_0 цього відрізка при деякому заданому $\varepsilon > 0$ знайдеться інтервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, де функція задовольняє нерівності

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

або

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

За теоремою Бореля із нескінченного покриття відрізка інтервалами завжди можна вибрати скінченне підпокриття, тобто існує скінченна множина точок x_k з інтервалів $(x_k - \delta_k, x_k + \delta_k)$, що покривають відрізок $[a, b]$, таких що на кожному інтервалі виконується нерівність

$$f(x_k) - \varepsilon < f(x) < f(x_k) + \varepsilon.$$

Позначимо

$$M = \max_k f(x_k),$$

$$m = \min_k f(x_k).$$

За побудовою інтервалів виконується нерівність $m \leq f(x) \leq M$. Отже, функція обмежена.



Розглянемо функцію $y = \frac{1}{x}$. Вона неперервна на інтервалі $(0; 1]$, але не обмежена (рис. 2.16).

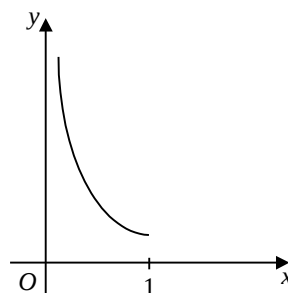


Рис. 2.16.

Теорема 4 (Вейєрштрасса). Функція $y = f(x)$, неперервна на відрізку $[a, b]$, досягає на ньому свого найбільшого та найменшого значення.

Доведення. Міркуємо від противного. Нехай функція $y = f(x)$ має точну верхню межу $M = \sup f(x)$, $x \in (a; b)$, але не досягає її, тобто при всіх x виконується нерівність $M - f(x) > 0$.

Розглянемо функцію

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

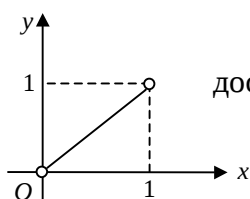
Вона не перетворюється на нуль, тому вона неперервна і згідно з теоремою 3 обмежена. Існує число $\delta > 0$, таке що при всіх x , які належать відрізку (a, b) , маємо:

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq \frac{1}{\delta} \text{ або } f(x) \leq M - \delta.$$

Маємо суперечність. Адже M не є точною верхньою межею функції $f(x)$ при будь-якому x . Отже, припущення не правильне, тобто неперервна функція досягає своєї точної верхньої межі. Це означає, що існує точка $x_m \in (a, b)$, в якій $f(x_m) = M$. Розглянемо функцію $y = f(x)$. За доведеним вона досягає свого точного нижнього значення m при $m = \inf f(x)$, $x \in (a; b)$.



Розглянемо функцію $y = x$ на інтервалі $(0; 1)$. Ця функція обмежена. Її значення мають точну верхню та точну нижню межі. Побудуємо графік (рис. 4.17).



Можна знайти $\sup x = 1$; $\inf x = 0$. Але точок, в яких функція досягає найбільшого та найменшого значень, немає.

Рис. 2.17.

2.3.9. Рівномірна неперервність.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *рівномірно неперервною* на деякому проміжку I , якщо для довільного $\epsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, таке що для будь-яких $x_1, x_2 \in I$, які задовольняють умову $|x_1 - x_2| < \delta$, виконується нерівність $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.



Розглянемо неперервну функцію $y = \frac{1}{x}$ на проміжку $(0; 1)$. Візьмемо довільне $\epsilon > 0$ і спробуємо знайти $\delta > 0$, таке щоб за умови $|x_1 - x_2| < \delta$ виконувалась нерівність $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Дістанемо:

$$\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| < \epsilon, \text{ або } \left| \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \right| < \epsilon.$$

Вираз $\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} \right|$ за умови $|x_1 - x_2|$ може бути як завгодно великим. Якщо значення

$|x_1|$ і $|x_2|$ достатньо малі, то нерівність $\left| \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \right|$ не може виконуватися при всіх $|x_1|$ і $|x_2|$

із $(0, 1)$. Отже, ця функція не є рівномірно неперервною.

Зауваження. Поняття рівномірної неперервності пов'язане з проміжком, на якому розглядається функція («рівномірно» – це приблизно однаково).

Теорема 5 (Кантора). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона рівномірно неперервна на ньому.

Доведення. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Припустимо, що функція не є рівномірно неперервною, тобто при будь-якому $\varepsilon > 0$ знайдуться значення $x_1, x_2 \in [a, b]$, такі що виконується нерівність

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon.$$

Візьмемо послідовність значень $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$. При кожному значенні x_n знаходимо значення аргументу x_n^1 і x_n^n , такі що для $|x_n^1 - x_n^n| < \varepsilon$ маємо:

$$|f(x_n^1) - f(x_n^n)| \geq \varepsilon.$$

Послідовність значень x_n^1 – обмежена, тому знайдеться частинна послідовність $x_{n_k}^1$, що має границю c . Дістанемо:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^1 = c; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^n = c;$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}^1) - f(x_{n_k}^n)| = |f(c) - f(c)| = 0.$$

Водночас має виконуватися нерівність $|f(x_{n_k}^1) - f(x_{n_k}^n)| \geq \varepsilon$. Здобута суперечність означає, що припущення неправильне, а отже, функція $f(x)$ рівномірно неперервна.



Вправи для самостійного розв'язування

1. Довести, що при $x \rightarrow 0$ нескінченно малі величини $2 \operatorname{tg} x - \sin x$ і x^3 еквівалентні:
2. Показати, що при $x \rightarrow 0$ нескінченно малі величини $\sqrt[6]{x^3} - \sqrt{x^3}$ і $\operatorname{tg} \sqrt[3]{x} \sqrt{x}$ еквівалентні.
3. Знайти границі наведених далі виразів при $x \rightarrow 0$:

$$\frac{\sin 3x}{\sin 2x}; \quad \frac{\sin \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} 2x}; \quad \frac{\arcsin x}{\sin 4x}; \quad \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\arcsin 2x}.$$

$$\text{Відповідь. } \frac{3}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{3}{2}.$$

4. Довести, що коли $\alpha \sim \beta$ і $\gamma \sim \delta$, то $\alpha + \gamma \sim \beta + \delta$.

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg \frac{2}{x} \arcsin \frac{3}{x^2} \arctg \frac{5}{\sqrt{x}}}{\sin \frac{1}{x} \operatorname{tg} \frac{5}{x\sqrt{x}} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \arctg \frac{3}{\sqrt{x}}}.$$

Відповідь. 2.

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 1 - 2x - 3x^2 - 4x^3}{\ln 1 - x - 2x^2 - 7x^3}.$$

Відповідь. -2.

$$7. \lim_{x \rightarrow 7} \sin \frac{x-7}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{14}.$$

Відповідь. $\frac{7}{2}$.

8. Довести рівності.

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x} = 2;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{3x^3} - \frac{81}{9-x} = 0;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a}, \text{ якщо } x \text{ із наближенням до } a \text{ зростає};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a}, \text{ якщо } x \text{ із наближенням до } a \text{ спадає};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 1}{2x} = -\frac{1}{2};$$

$$6) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{4y^2 - 7y - 1}{2y^2} = -\frac{1}{2};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 7x - 1} = \frac{2}{3};$$

$$8) \lim_{z \rightarrow 8} \frac{4-z}{8z-3} = \frac{1}{8};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 3x - 2}{2x^4 - 5} = 0;$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x - 7}{x^2 - 2} = 1;$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 6x^2}{2x^4 - 15x^2} = \frac{2}{5};$$

$$12) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^3 - 3t^2}{t^2} = 0;$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 2x}{x} = 0;$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x-1} - \sqrt{x} = 0;$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 1} - x = 0;$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - ax - b} - \sqrt{x^2 - cx - b} = \frac{a-c}{2};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{2} e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{x}{a}} = a;$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1 - \sin^2 x}} = 0;$$

$$19) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^2} = 0;$$

$$20) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^2} = 0;$$

$$21) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - n - 1}{3^{n-1} n^2} = \frac{1}{3};$$

$$22) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^{n-1} n} = e;$$

$$23) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-\dots+n}{n^2} = \frac{1}{2};$$

$$24) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-2} \cdot \frac{1}{2-3} \cdot \frac{1}{3-4} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n-n+1} = 1;$$

$$25) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+2-3+\dots+n-n+1}{n^3} = \frac{1}{3};$$

$$26) \lim_{t \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{t} = \frac{1}{e};$$

$$27) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{1-t} = \frac{1}{e};$$

$$28) \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n} = e;$$

$$29) \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n - 1 - \ln n = 1; \quad 30) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)^{\frac{5}{\cos x}} = e^5.$$

9. Як зміняться корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, якщо коефіцієнти b і c лишатимуться сталими $b \neq 0$, а коефіцієнт a прямуватиме до нуля?

10. У прямокутному трикутнику один із катетів дорівнює x , а другий $2\sqrt{x}$. Знайти границю різниці між гіпотенузою і катетом x , а також границю відношення гіпотенузи до цього катета при $x \rightarrow \infty$.

Знайти границі функції (11–50).

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 3x^2}{x^5 - x^3 - 2x^2}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 4x^3 - 1}{x - 1}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^2 - 3}{x^2 - 3x - 2}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x}{x - 2} - \frac{2}{x - 2}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{2x^2}{4x - 1}.$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n - 1}{n - 1}.$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 1 - n^2 - n^3}{n^3 - n^2 - 1}.$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 - n}}{n - 2}.$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3 - n} - n}.$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2 - 3 - \dots - 2n}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2 - 3 - \dots - n}{n^2} - \frac{n}{2}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1^2 - 3^2 - 5^2 - \dots - 2n - 1^2}{n^2}.$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 - 3^2 - 5^2 - \dots - 2n - 1^2}{n^3}.$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2 - 2 - 3 - 3 - 4 - \dots - n - n - 1}{n^3}.$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - a - \frac{1}{n^2} - a - \frac{2}{n^2} - \dots - a - \frac{n - 1}{n^2}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad (m \text{ і } n - \text{цілі числа}).$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{p}{q}} - 1}{x^{\frac{r}{s}} - 1}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1 - x^{n-1} - 1 - \dots - x^{n-k-1} - 1}{x - 1 - x^2 - 1 - \dots - x^k - 1}.$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 - x^i} \quad (i - \text{цілі додатні числа}).$$

$$32.1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1 - a^n}, a > 0;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{n-1}}{a^n - a^{n-1}}, a > 0;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n}}{1 - a^{2n-1}}, a > 0.$$

$$33.1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x} - 1}{x};$$

$$2) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x - x^2} - 1}{x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - 3x^2} - 1}{x^2 - x^3};$$

$$\begin{aligned}
& 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1-3x^4}}{x} \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x}{\sqrt{1-x}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt[3]{1-x} \sqrt[3]{1-x}}. \\
& 34. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3-x-x^2}}{x^2} \frac{\sqrt{9-2x-x^2}}{3x-2}. \quad 35. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1-2x}}{2} \frac{1}{x-x}. \\
& 36. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}. \quad 37. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}. \\
& 38. \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2-1} \cdot x. \\
& 39. 1) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2-1} \sqrt{x^2-1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2-x-1} \sqrt{x^2-x-1}. \\
& 40. \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{1-x^3} \cdot x. \quad 41. \lim_{x \rightarrow 1} x \sqrt{x^2-1} \cdot x. \\
& 42. \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot 1^{\frac{2}{3}} \cdot x \cdot 1^{\frac{2}{3}}. \quad 43. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{4}{3}} \cdot x^2 \cdot 1^{\frac{2}{3}}. \\
& 44. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{3}} \sqrt{x-1} \sqrt{x-1} \cdot 2\sqrt{x}. \quad 45. \lim_{x \rightarrow 1} x^3 \sqrt{x^2} \sqrt{x^4-1} \cdot x\sqrt{2}. \\
& 46. \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[k]{x \cdot a_1 \cdot x \cdot a_2 \cdot \dots \cdot x \cdot a_k} \cdot x. \\
& 47. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{a-x} \sqrt[k]{a-x}}{x}. \quad 48. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot x^m \sqrt{1-x^2} \cdot x^m}{x}. \\
& 49. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-b} \sqrt{a-b}}{x^2-a^2} \quad a-b \neq 0. \quad 50. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{a^2-ax-x^2}}{\sqrt{a-x}} \frac{\sqrt[3]{a^2-ax-x^2}}{\sqrt{a-x}} \quad a \neq 0. \\
& 51. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{3}{4}} \sqrt[3]{x^2-1} \sqrt[3]{x^2-1}. \\
& 52. Визначити і за умовою: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-x^3} \cdot x \neq 0$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[k]{a_1 x + b_1 x + c_1} \cdot x \neq 0; a_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, k$. \\
& 53. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$. \quad 54. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$. \quad 55. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} x}$. \\
& 56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$ (m і n – цілі числа). \quad 57. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$. \\
& 58. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$ (m і n – цілі числа). \quad 59. $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin \frac{x}{2^n}$. \\
& 60. $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x$. \quad 61. $\lim_{x \rightarrow 1} 1-x \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. \quad 62. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos mx}{x^2}$. \\
& 63. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$. \quad 64. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x \sin x}{x^3}$. \quad 65. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a-x \sin a-x}{x}$. \\
& 66. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a-2x-2 \sin a-x \sin a}{x^2}$. \quad 67. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}{\cos x}$.
\end{aligned}$$

68. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{1 - 2 \cos x}$.
69. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \tan^2 x}$.
70. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \sqrt{x} - \sin \sqrt{x - 1}$.
71. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}$.
72. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \tan x} - \sqrt{1 + \tan x}}{\sin x}$.
73. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{\cos ax} - \sqrt[m]{\cos 3x}}{x^2}$.
74. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.
75. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.
76. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x \sin x} - \cos x}{\sin^2 \frac{x}{2}}$.
77. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{x^x}$.
78. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 3}{2x - 1}^{x-1}$.
79. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^2}^{3x}$.
80. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - x - 1}{4x^2 - x - 1}^{\frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}}$.
81. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - x - 1}{2x^2 - x - 1}^{\frac{1 - 2x^4}{1 - x^2}}$.
82. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 1}^{\frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1}}$.
83. $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \tan p x^{ctg q x}$ p, q цілі додатні числа.
84. $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - 3 \tan^2 x^{ctg^2 x}$.
85. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\cos 2x}^{\frac{1}{x^2}}$.
86. $\lim_m \cos \frac{x}{m}^m$.
87. $\lim_m \cos \frac{x}{\sqrt{m}}^m$.
88. $\lim_m \cos \frac{x}{m} \sin \frac{q}{m}^m$.
89. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{\sin a}^{\frac{1}{x-a}}$.
90. $\lim_m \frac{\sin a - \frac{b}{m}}{\sin a}$ a, b цілі додатні числа.
91. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x^{tg 2x}$.
92. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{ctg x}{ctg a}^{ctg^3 x - a}$.
93. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} tg \frac{x}{8}^{tg 2x}$.
94. $\lim_n \sin \frac{2n-1}{3n-1}$ $tg \frac{n-1}{n-3} \frac{n}{2}$ n ціле додатне число.
95. $\lim_n tg \frac{3n-1}{8n-2}$ $tg \frac{2n-3}{2n-1} \frac{3}{2}$ n ціле додатне число.
96. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log 1 - x}{x}$.
97. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\log x - 1}{x - e}$.
98. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\log_{10} x - 1}{x - 10}$.
99. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\log tg x - 1}{\cos 2x}$.
100. $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \log 1 - ax^{\frac{1}{x}}$ a ціле додатне число.
101. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{\log \cos x}$, x цілі додатні числа.

$$102. \lim_n n^2 \log \cos \frac{1}{n}. \quad 103. \lim_n n \log \operatorname{tg} \frac{1}{4n}. \quad 104. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\log \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg} x}.$$

$$105. \lim_x \frac{\log 1 - e^x}{x}. \quad 106. \lim_x \frac{\log 1 - e^x}{\log 1 - e^{-x}}; \quad 0, \quad 0.$$

$$107. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}. \quad 108. \lim_n n \frac{1}{a^n} - 1. \quad 109. \lim_n n^2 \sqrt[n]{a} - n \sqrt[n]{a}.$$

$$110. \lim_n n^2 \frac{1}{a^n} - a^{\frac{1}{n}} - 2. \quad 111. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{3x}}{x} - a = 0. \quad 112. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}; a > 0, b > 0.$$

$$113. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x - \sin^{-x}}, \quad \text{цїлі додатні числа}.$$

$$114. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - xa^x}{1 - xb^x} \cdot \frac{1}{x^2}. \quad 115. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{\sqrt{2}} - a^{\sqrt{2}}}{x - a}. \quad 116. \lim_{x \rightarrow e} \frac{a^x - a^e}{x - e}.$$

$$117. \lim_n 1 - a^n \frac{1}{n}, a > 0. \quad 118. \lim_n \frac{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}{2}.$$

$$119. \lim_n \frac{\sqrt[n]{a_1} \sqrt[n]{a_2} \dots \sqrt[n]{a_k}}{k}.$$

$$120. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log 1 - x - x^2 - \log 1 - x - x^2}{x^2}.$$

$$121. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\log 2 - 2 \log \cos x}{\cos 2x}.$$

$$122. \lim_x x \log \frac{2a - x}{a - x} - a = 0.$$

$$123. \text{Довести, що } \lim_x \frac{\log x}{x^k} \text{ при будь-якому додатному } k.$$

Вказівка. Узяти $x = z^{\frac{2}{k}}$ і скористатися нерівністю $z = e^{\log z} = 1 + e^{-1} \log z$.

$$124. \text{Знайти } \lim_{x \rightarrow 0} x^m \log x^n; m > 0, n > 0.$$

Вказівка. Див. задачу 123.

$$125. \text{Показати, що функцій } x^4 - 2x^3 - x^2 - 6 \text{ і } \frac{5x - 2}{x^2 - 3} \text{ неперервні при всіх (дійсних)}$$

значеннях x .

$$126. \text{Показати, що функція } \operatorname{tg} \frac{1}{x} \text{ неперервна при } x = \frac{2}{\pi} \text{ і } x = \frac{2}{3\pi}.$$

$$127. \text{Співвідношенням } f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5(x^2 - 1)} \text{ функція } f \text{ визначається для всіх (дійсних)}$$

значень x , крім $x = 5$ (у цьому разі знаменник перетворюється на нуль, і дріб втрачає зміст), а тому значення $f(5)$ має бути задане додатково.

Чи буде функція неперервна в усіх точках, якщо: 1) $f(5) = 1$; 2) $f(x) = \frac{5}{13}$?

128. Побудувати графік функції, що визначається умовами $f(x) = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2x}$ при $x > 0$ і $f(0) = 1$. Дослідити функцію на неперервність.

129. Побудувати графік функції, що визначається співвідношенням $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ при $x > 0$.

1) Яким має бути значення $f(0)$, щоб функція f була скрізь неперервною?

2) Чи можна для функції, розглянутої в попередній задачі, знайти таке значення $f(0)$, щоб відновити її неперервність?

130. Функцію задано формулою $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 3$ при $0 < x < 1$. Дослідити її на неперервність і побудувати графік.

131. У теорії чисел розглядається функція $E(x)$, яка задає цілу частину числа x , точніше – найбільше ціле невід'ємне число, що не перевищує x . Наприклад: $E(2,5) = 2$; $E(5,75) = 5$; $E(4) = 4$; $E(\sqrt{10}) = 3$. Побудувати графік функції $E(x)$ і дослідити її на неперервність.

132. Чи буде функція $y = 2x$ при $0 < x < 1$ і $y = 3 - x$ при $1 < x < 2$ неперервною на проміжку $0 < x < 2$? Побудувати графік її.

133. При яких значеннях x у $y = \frac{1}{1 - 2^{x-1}}$ зазнає розриву?

134. При яких значеннях x зазнає розриву функція $y = \sqrt{x} - E\sqrt{x}$ при $x > 0$.

135. При якому значенні a функція $y = x \log(x^2)$ при $x > 0$, $y = a$, якщо $x = 0$, неперервна на проміжку $(-\infty, +\infty)$?

При яких значеннях x зазнають розрив у функції (136–141)?

136. $y = \frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x}{2\operatorname{tg}^2 x - 1}$.

137. $y = \frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\sin x}$.

138. $y = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x}$.

139. $y = \lg \lg x$.

140. $y = \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} x}$.

141. $y = \frac{x - 1 + 2^{\frac{x}{2}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{x^2 - 3x - 2}$.

3.1. Похідна. Її фізична (механічна) та геометрична інтерпретація.

I. Вважаючи, що $x \neq 0$, розглянемо в даній фіксованій точці x відношення приросту функції в цій точці до відповідного приросту аргумента Δx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.1)$$

(3.1) – це різницеве відношення (у даній точці x). Оскільки значення x ми вважаємо фіксованим, то (3.1) являє собою функцію аргумента Δx . Ця функція визначена для всіх значень аргумента Δx , що належить деякому досить малому околу точки $\Delta x=0$, за винятком самої точки $\Delta x=0$. Таким чином, ми маємо право розглянути питання про існування границі зазначеної функції при $\Delta x \rightarrow 0$.

Означення. Похідною функції $y=f(x)$ у даній фіксованій точці x називається границя при $\Delta x \rightarrow 0$ різницевого відношення (3.1) (за умови, що ця границя існує). Похідну функції $y=f(x)$ у точці x будемо позначати символом $y'(x)$ або $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.2)$$

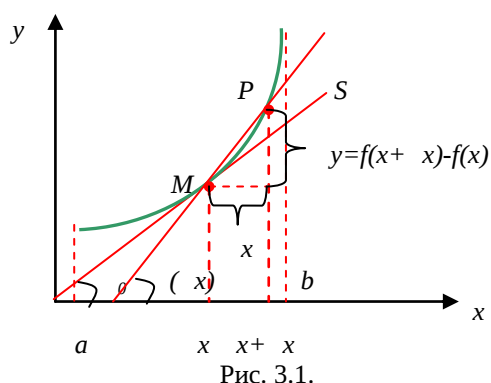
Якщо функція $y=f(x)$ визначена і має похідну для всіх x інтервала (a,b) , то ця похідна буде являти собою деяку функцію змінної x , також визначену на інтервалі (a,b) .

3.1.1. Фізичний (механічний) зміст похідної.

Розглянемо фізичні поняття додатка похідної.

а) Нехай функція $f(x)$ описує закон руху матеріальної точки. Тоді відношення (3.1) визначає середню швидкість точки за проміжок часу від x до $x + \Delta x$. У такому випадку похідна $f'(x)$, тобто границя різницевого відношення (3.1) при $\Delta x \rightarrow 0$ визначає миттєву швидкість точки в момент часу x . Отже: *Похідна функції, що описує закон руху, визначає миттєву швидкість точки.*

б) Нехай функція $y=f(x)$ визначає кількість електрики y , що протікає через поперечний переріз провідника за час x . Тоді: *Похідна $f'(x)$ буде визначати силу струму, що проходить через поперечний переріз провідника в момент часу x .*



в) Розглянемо процес нагрівання деякого тіла. Нехай функція $y=f(x)$ визначає кількість тепла (у калоріях) y , яку потрібно передати тілу для нагрівання від x_0 до $x_0 + \Delta x$. Тоді: *Похідна $f'(x)$ визначає теплоємність тіла при даній температурі x .*

3.1.2. Геометричний зміст похідної.

Функція $y=f(x)$ на деякому інтервалі (a,b) . x – значення аргументу на цьому інтервалі, Δx –

довільний приріст аргумента. $P[x+\Delta x, f(x+\Delta x)]$. Тоді дотична S у точці M – це граничне положення січної MP при $\Delta x \rightarrow 0$. Кутовий коефіцієнт MP (тобто тангенс кута до осі OX) дорівнює

$$\frac{y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.3)$$

Тоді у границі $\Delta x \rightarrow 0$ кут нахилу січної повинен переходити в кут нахилу дотичної S у такий спосіб можна зробити висновок: *Похідна $f'(x)$ дорівнює кутовому коефіцієнту, дотичній у точці M до графіка функції $y=f(x)$*

$$\tan \alpha = f'(x). \quad (3.4)$$

3.2. Похідна суми, добутку, частки, сталої, добутку сталої на функцію.

Теорема 1. Похідна $const=0$, тобто якщо $y=C$, то $y'=0$, де $C=const$. $y=C$ – пряма, паралельна осі OX і $y'=0$, тобто $f'(x)=0$.

Теорема 2. Сталій множник можна виносити за знак похідної, тобто, якщо $y=Cf(x)$, де $C=const$,

$$y = C f(x) \quad (3.5)$$

Теорема 3. Похідна алгебраїчної суми скінченної кількості функцій дорівнює відповідній сумі похідних цих функцій:

$$y = u(x) + v(x) + w(x) \quad y' = u'(x) + v'(x) + w'(x). \quad (3.6)$$

Теорема 4. Похідна від добутку двох функцій дорівнює добутку похідної першої функції на другу плюс добуток першої функції на похідну другої функції, тобто, якщо $y=v(x)u(x)$, то

$$y' = v'(x)u(x) + v(x)u'(x). \quad (3.7)$$

Аналогічно й похідна будь-якої кількості функцій, тобто

$$y = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n, \text{ то } y' = u_1' + u_2' + u_3' + \dots + u_n'$$

Доведення. $y = u + v \quad y' = (u + v)' = u' + v' \quad y' = u' + v' + u + v \quad y' = u' + v' + u + v \quad y' = u' + v' + u + v$

$$\frac{y}{\Delta x} = \frac{u}{\Delta x} + \frac{v}{\Delta x} \quad u = \frac{v}{\Delta x}, \quad u = \frac{v}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y}{\Delta x} = v' \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v}{\Delta x} = u' + v' = u' + v'$$

Теорема 5. Похідна частки від ділення двох функцій, дорівнює дробу, у якого знаменник є квадрат знаменника даного дробу, а чисельник є різниця між добутком знаменника на похідну чисельника й чисельника на похідну знаменника, тобто якщо

$$y = \frac{u}{v}, \text{ то}$$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (3.8)$$

Доведення.

$$y = y \cdot \frac{u}{v} \cdot \frac{u}{v} = y \cdot \frac{u}{v} \cdot \frac{u}{v} \cdot \frac{v}{v} \cdot \frac{u}{v} \cdot \frac{u}{v} \cdot \frac{v}{v};$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{u}{v} \cdot \frac{u}{v} \cdot \frac{v}{v} \cdot \frac{u}{v} \cdot \frac{u}{v} \cdot \frac{v}{v}}{\frac{x}{v} \cdot \frac{x}{v} \cdot \frac{x}{v}} \lim_{x \rightarrow 0} y = \frac{v \cdot u \cdot u \cdot v}{v^2},$$

3.3. Похідна складної функції.

Нехай дана складна функція $y=f(x)$, тобто така, що її можна представити у вигляді:

$$y=F(u), \text{ де } u=\varphi(x) \quad y=F[\varphi(x)] \quad (3.9)$$

u називається *проміжним аргументом*.

Теорема. Якщо функція $u=\varphi(x)$ має у деякій точці x похідну u_x в точці x , а функція $y=F(u)$ має при відповідному значенні u похідну $y_u = F'(u)$, то складна функція $y=F[\varphi(x)]$ у точці x також має похідну, що дорівнює

$$y_x = F'_u(u) \cdot u_x, \quad (3.10)$$

де замість u має бути підставлений вираз $u=\varphi(x)$. Коротко: похідна складної функції дорівнює добутку похідної даної функції по проміжному аргументу u на похідну проміжного аргумента по x .

3.4. Похідна логарифмічної функції.

Похідні тригонометричних функцій.

Теорема 1. Похідна від функції $\log_a x$ дорівнює $\frac{1}{x} \log_a e$, тобто якщо $y=\log_a x$, то

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e \quad (3.11)$$

Теорема 2. Похідна від $\sin x$ є $\cos x$, тобто якщо $y=\sin x$, то

$$y' = \cos x. \quad (3.12)$$

Доведення. $y=\sin(x+\Delta x)$; тоді

$$y=\sin(x+\Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{x+\Delta x}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos x - \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2},$$

$$\frac{y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos x - \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos x - \frac{\Delta x}{2},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos x - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{2} = \cos x,$$

Теорема 3. Похідна від $\cos x$ є $-\sin x$, тобто якщо $y=\cos x$, то

$$y' = -\sin x. \quad (3.13)$$

Теорема 4. Похідна від функції $\operatorname{tg} x$ дорівнює $\frac{1}{\cos^2 x}$, тобто якщо $y = \operatorname{tg} x$, то

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (3.14)$$

Доведення. Оскільки $y = \frac{\sin x}{\cos x}$, то $y' = \frac{\sin x \cos x - \sin x \cos x}{\cos^2 x}$

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Теорема 5. Похідна від функції $\operatorname{ctg} x$ дорівнює $-\frac{1}{\sin^2 x}$, тобто якщо $y = \operatorname{ctg} x$, то

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (3.15)$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x).$$

3.5. Похідна оберненої, показникової і оберненої тригонометричної функції. Похідна логарифмічної і степеневі функції.

Теорема 1. Нехай функція $f(x)$ в деякому околі точки x_0 зростає (чи спадає) і є неперервною. Нехай, крім того, функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x_0)$, відмінну від нуля. Тоді обернена функція $x = f^{-1}(y)$ визначена в деякому околі відповідної точки $y_0 = f(x_0)$ і має похідну, рівну

$$f^{-1}{}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (3.16)$$

Доведення. Зауважимо, що для функції $y = f(x)$ існує обернена функція $x = f^{-1}(y)$, визначена в деякому околі точки $y_0 = f(x_0)$ і неперервна в цьому околі. Надамо аргументу y цієї оберненої функції в точці y_0 довільного приросту Δy , відмінного від нуля.

Цьому приросту відповідає приріст Δx оберненої функції $x = f^{-1}(y)$, причому в силу зростання (спадання) функції $\Delta x > 0$ (чи $\Delta x < 0$). Таким чином, ми маємо право написати наступну тотожність:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x} \quad (3.17)$$

Нехай тепер у цьому виразі $\Delta y \rightarrow 0$, тоді в силу неперервності оберненої функції в точці y_0 і відповідно різницевій формі умови неперервності і $\Delta x \rightarrow 0$. Але при $\Delta x \rightarrow 0$

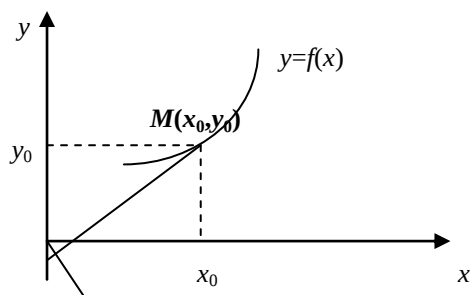


Рис. 3.2.

знаменник дробу в правій частині, за означенням похідної, має граничне значення $f'(x_0) \neq 0$. Тоді права частина у границі буде $1/f'(x_0)$. Але тоді і ліва частина при $\Delta y \rightarrow 0$ має граничне значення, яке рівне $\{f^{-1}{}'(y_0)\}$. Отже ми отримали в точці y_0 для її похідної співвідношення $f^{-1}{}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Геометричний зміст. Графік функції $y=f(x)$, точці x_0 відповідає на графіку точка M , тоді $f(x_0)=tg \alpha$, а похідна $\{f'(y_0)\}=tg \beta$, так як $\alpha + \beta = \pi/2$, то $tg \beta = \frac{1}{tg \alpha}$

$$f'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}.$$

3.5.1. Похідна показникової функції.

Показникова функція $y=a^x$, будучи визначеною на нескінченній прямій, є оберненою для логарифмічної функції $x=\log_a y$, визначеної на півпрямій $y>0$. Тоді, згідно теореми про обернену функцію, функція $y=a^x$, де в будь-якій точці $x=\log_a y$ має похідну

$$a^x = \frac{1}{\log_a y} = \frac{1}{\frac{1}{y} \log_a e} = \frac{y}{\log_a e}, \text{ тоді, остаточно}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a. \quad (3.18)$$

Якщо $a=e$, то

$$(e^x)' = e^x. \quad (3.19)$$

3.5.2. Похідні обернених тригонометричних функцій.

$y=\arcsin x$ в інтервалі $-1<x<+1$ – обернена до функції $x=\sin y$ в інтервалі $-\pi/2 < y < \pi/2$. Тоді, згідно теореми про обернену функцію

$$\arcsin x = \frac{1}{\sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \quad \left| \text{але } \sin y = x \right| = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (3.20)$$

Аналогічне виведення і для $\arccos x=y$:

$$\arccos x = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sin y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (3.21)$$

$$\arctg x = \frac{1}{tgy} = \frac{1}{1 - tg^2 y} = \frac{1}{1 - x^2} \quad (3.22)$$

$$\text{arcctg} x = \frac{1}{ctgy} = \frac{1}{1 - ctg^2 y} = \frac{1}{1 - x^2} \quad (3.23)$$

3.5.3. Поняття похідної логарифмічної функції.

Нехай функція $y=f(x)$ додатна, тоді в цій точці існує $\ln y = \ln f(x)$.

Розглядаючи $\ln f(x)$ як складну функцію аргумента x , ми можемо обчислити похідну цієї функції в точці x , приймаючи $y=f(x)$ за проміжний аргумент. Тоді отримаємо:

$$\ln f'(x) = \ln y \cdot y' = \frac{y'}{y} \quad (3.24)$$

Величина, яка визначається цією формулою, називається *логарифмічною похідною* функції $y=f(x)$ в даній точці x .



Розглянемо степеневу-показникову функцію $y=u(x)^{v(x)}$ шляхом обчислення логарифмічної похідної. Тоді $\ln y = v(x) \ln u(x)$. Звідси

$$\ln y' = \frac{y'}{y} = v(x) \ln u(x)' + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Звідки

$$y = u^v \cdot x \ln u + v \cdot x^{\frac{u}{v}} \cdot \frac{1}{u} = u^v \cdot x^{\frac{u}{v}-1} \cdot \frac{u}{v} \quad (3.25)$$

3.5.4. Похідна степеневі функції з будь-яким дійсним показником.

Нехай функція $y=x$, де x – довільний дійсний показник. Будемо обчислювати для значення x , що належать пів прямій $x>0$, маючи на увазі, що $y=x >0$, тоді $\ln y = \ln x$

$$\frac{y}{y} = \ln x = \frac{1}{x}$$

або

$$y = (x) = x^{-1}. \quad (3.26)$$

Таблиця похідних найпростіших елементарних функцій.

1.	$(x) = x^{-1}$	9.	$\arccos x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2.	$\log_a x = \frac{1}{x} \log_a e$	10.	$\arctg x = \frac{1}{1+x^2}$
3.	$(a^x) = a^x \ln a$	11.	$\text{arcctg} x = \frac{1}{1+x^2}$
4.	$(\sin x) = \cos x$	12.	$(\text{sh} x) = \text{ch} x$
5.	$(\cos x) = -\sin x$	13.	$(\text{ch} x) = \text{sh} x$
6.	$\text{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x$	14.	$\text{th} x = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$
7.	$\text{ctg} x = \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \text{ctg}^2 x$	15.	$\text{cth} x = \frac{1}{\text{sh}^2 x}$
8.	$\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		

Тепер ми можемо стверджувати, що **похідна** будь-якої **елементарної функції** являє собою також **елементарну функцію**.

3.6. Похідна функцій, заданих неявно та параметрично.

Нехай значення двох змінних x и y зв'язані між собою деяким рівнянням:

$$F(x,y)=0. \quad (3.27)$$

Якщо функція $y=f(x)$ визначена на інтервалі (a,b) така, що рівняння (3.27) при підстановці в нього замість $y = f(x)$ звертається в тотожність відносно x , то функція $y=f(x)$ є **неявна функція**, обумовлена рівнянням (3.27).

Наприклад, $x^2+y^2-a^2=0$, $y = \sqrt{a^2-x^2}$ підставимо $x^2+y^2-x^2-a^2=0$.

Зауваження 1. Відзначимо, що терміни «**явна функція**» і «**неявна функція**» характеризують не природу функції, а спосіб задання. Кожна явна функція $y=f(x)$ може бути представлена як неявна: $y-f(x)=0$.

Правило знаходження похідної неявної функції, не перетворюючи її в явну таке. Нехай функція задана рівнянням $x^2 + y^2 - a^2 = 0$. Тут y є функція від x , що визначає і цю тотожність.

Взявши похідну по x , вважаючи, що y є функція x , користуючись складною функцією, одержимо:

$$2x + 2yy' = 0 \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

Ще приклад:

$$y^6 - y - x^2 = 0 \quad 6y^5 y' - y' - 2x = 0 \quad y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}.$$

Зауваження 2. З наведених прикладів випливає, що для знаходження значення похідної неявної функції при даному значенні аргументу x потрібно знати і значення функції y при даному значенні x .

3.6.1. Похідна функції, заданої параметрично.

Нехай функція y від x задана параметричними рівняннями:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (3.28)$$

Припустимо, що ці функції мають похідні і, що функція $x = x(t)$ має обернену $t = t(x)$, що також має похідну. Тоді, визначену параметричними рівняннями функцію $y = f(x)$ можна розглядати як складну функцію $y = y(t)$, $t = t(x)$, де t – проміжний аргумент. Тоді, за правилом складної функції

$$y_x = y_t \cdot t_x \quad t_x = \frac{1}{x_t} \quad (3.29)$$

На основі теореми про похідну оберненої функції $t_x = \frac{1}{x_t}$. Підставляючи, одержимо

$$y_x = \frac{y_t}{x_t} \quad \text{або} \quad y_x = \frac{y_t}{x_t}. \quad (3.30)$$

Введена формула дає можливість знаходити похідну y_x функції, заданої параметрично, не знаходячи виразу безпосередньої залежності y від x .



Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до лінії, заданої

$$\begin{cases} x = a + t \sin t, \\ y = a + 1 - \cos t \end{cases} \quad \text{у точці } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$y_x = \frac{y_t}{x_t} = \frac{a \sin t}{a + 1 - \cos t} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \operatorname{tg} \frac{t}{2}.$$

3.7. Диференціал.

3.7.1. Означення диференціала. Формули і правила диференціювання. Використання диференціала для наближених обчислень. Основні теореми диференціального числення. Похідні і диференціали вищих порядків.

I. Диференціал функції.

Означення. Функція $f(x)$ називається диференційовною у точці x , якщо її приріст Δy у цій точці може бути представлений у вигляді:

$$\Delta y = A \Delta x + o(\Delta x), \quad (3.31)$$

де A не залежить від Δx , але в загальному залежить від x , а $o(\Delta x) = 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Тоді лінійна функція $A \Delta x$ називається диференціалом функції $f(x_0)$ і позначається $df(x_0)$ або dy , тоді

$$\Delta y = dy + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0 \text{ } dy = A \Delta x. \quad (3.32)$$



$$y = x^3, \quad y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3, \text{ при } \Delta x \rightarrow 0 \text{ одержимо } dy = 3x^2 dx.$$

Теорема. Для того, щоб функція була диференційовна в деякій точці x_0 , необхідно і достатньо, щоб вона мала в цій точці похідну, при цьому

$$dy = f'(x) dx. \quad (3.33)$$

II. Формули і правила обчислення диференціалів.

Ми визначили, що диференціал dy функції $y=f(x)$ завжди дорівнює похідній цієї функції $f'(x)$, помноженій на диференціал аргумента dx . У такий спосіб таблиця похідних, виконана нами раніше, дає таблицю диференціалів:

1.	$d(x^{-1}) = -x^{-2} dx$	8.	$d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
2.	$d \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e dx$	9.	$d \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
3.	$d(a^x) = a^x \ln a dx$	10.	$d \arctg x = \frac{dx}{1+x^2}$
4.	$d(\sin x) = \cos x dx$	11.	$d \operatorname{arcctg} x = \frac{dx}{1+x^2}$
5.	$d(\cos x) = -\sin x dx$	12.	$d(u \cdot v) = u dv + v du$
6.	$d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x dx$	13.	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$
7.	$d \operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x dx$	14.	

III. Використання диференціала для наближених обчислень.

Хоча диференціал dy функції $y=f(x)$ не дорівнює Δy цієї функції, але з точністю до нескінченно малої більш високого порядку Δx справедлива наближена рівність:

$$\Delta y \approx dy. \quad (3.34)$$

Відносна величина $\frac{\Delta y}{y}$ стає як завгодно малою при $\Delta x \rightarrow 0$. Формула (3.34)

дозволяє приблизно замінити приріст Δy функції $f(x)$ її диференціалом dy . Ми можемо додати наближеній рівності (3.34) наступний вигляд:

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x \text{ або } f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x. \quad (3.35)$$

Тоді по формулі (3.35) функція $f(x)$, для значень аргументу близьких до x (тобто для малих Δx) приблизно замінюється лінійною функцією.

Зокрема, за допомогою цього може бути отриманий ряд вже відомих наближених формул:

1.	$1 - x^{1/n} \approx 1 - \frac{x}{n}; \quad x \rightarrow 0.$	3.	$e^x \approx 1 + x$
2.	$\sin x \approx x; \quad x \rightarrow 0$	4.	$\ln(1+x) \approx x$



$$y = \sqrt[3]{26,94}, \quad x_0 = 27, \quad x = 0,06,$$

$$y \approx y_{x_0} + f'(x_0) \cdot x = 3 + \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} \cdot 0,06 = 3 + \frac{0,06}{27} = 3 + \frac{0,02}{9} = 2,998.$$

IV. Диференціал і похідні вищих порядків.

Може бути, що похідна $f'(x)$ є диференційовною функцією в деякій точці x , тобто може мати похідну. Тоді вона називається *другою похідною* або *похідною другого порядку* і позначається: $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$ або $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Послідовно можна ввести поняття похідної 3-го, 4-го, ..., n -го порядку. Тоді n -а похідна (або похідній n -го порядку) функції $y=f(x)$ у точці x називається така, що існує при взятті похідної разів від функції $y=f(x)$ і позначається:

$$f^{(n)}(x) \text{ або } y^{(n)}(x) \text{ або } \frac{d^n y}{dx^n} \quad (3.36)$$

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}] .$$

Диференціали вищих порядків визначаються в повній аналогії з похідними вищих порядків. Другий диференціал $d^2 y$ функції $y=f(x)$ визначається як диференціал від диференціала першого порядку:

$$d^2 y = d(dy) \dots d^{(n)}(y) = d(d^{(n-1)}y). \quad (3.37)$$

При цьому передбачається існування відповідних диференціалів

$$d^2 y = d(dy) = d(y \cdot dx) = (dy) \cdot dx + y \cdot d^2 x = (dx)^2 + y \cdot d^2 x.$$

V. Основні теореми диференціального числення.

По означенню, функція $f(x)$ досягає в точці $x=c$ локального *max* (*min*), якщо існує окіл цієї точки $U(c)=(c-, c+)$, на якому виконується нерівність

$$f(c) \geq f(x) \quad x \in U(c),$$

відповідно

$$f(c) \leq f(x) \quad x \in U(c). \quad (3.38)$$

Локальні *max* (*min*) називаються *локальним екстремумом*. Точка C називається *точкою локального екстремуму*.

Зауваження. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і досягає на ньому *max* (*min*) у точках, що належать цьому інтервалу, то ці точки є в той же час точками локального екстремуму $f(x)$. Але, якщо функція досягає *max* (*min*) в одній з кінцевих точок інтервалу, то вона не є в цій точці локальним екстремумом, тому що не визначена повною мірою в околі – праворуч і ліворуч від точки.

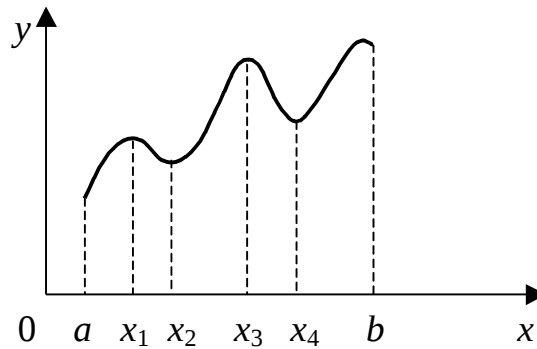


Рис.3.3.

На рис. 3.3: точки x_1, x_3 – локальний *max* функції $f(x)$;

x_2, x_4 – локальний *min* функції $f(x)$.

Теорема Ферма(П'єр Ферма (1601–1665) – французький математик, засновник аналітичної геометрії й теорії чисел (теорема Ферма). Праці по теорії ймовірностей, обчисленню нескінченно малих й оптиці). Якщо функція $f(x)$ має похідну в точці C і досягає в цій точці локального екстремуму, то $f'(c)=0$.

Теорема Ролля(Мішель Рольє (1652–1719) – французький математик. Праці по алгебраїчних рівняннях). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, диференційовна у всіх внутрішніх точках цього відрізка й на кінцях $x=a, x=b$ обертається в нуль [$f(a)=f(b)=0$], то всередині відрізка $[a, b]$ існує, принаймні, точка $x=c$, $a < c < b$, у якій $f'(x)$ перетворюється в нуль, тобто ($f'(x) = 0$).

Ця теорема справедлива і для функції, у якої на кінцях $[a, b]$ $f(a)=f(b)$.

Теорема Лагранжа(Жозеф Луї Лагранж (1736–1813) – французький математик і механік. Праці по варіаційному численню, теорії чисел, алгебрі, диференціальним рівнянням і т.д.). Якщо функція $f(x)$ безперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційовна у всіх внутрішніх точках цього відрізка, то усередині відрізка $[a, b]$ знайдеться принаймні одна

точка c , $a < c < b$, що $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Теорема Коші(Огюстен Луї Коші (1789–1857) – французький математик; теорія аналітичних функцій, диференціальні рівняння, математична фізика, теорія чисел, геометрія, математичний аналіз). Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ – дві функції, неперервні на інтервалі $[a, b]$ і диференційовні всередині нього, причому $\varphi'(x)$ ніде усередині інтервалу не дорівнює 0, то всередині інтервала $[a, b]$ знайдеться точка $x=c$, $a < c < b$, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c) \cdot (\varphi(b) - \varphi(a))}{\varphi'(c)}.$$

3.7.2. Розкриття невизначеностей. Формула Тейлора.

I. Невизначеність виду 0/0.

Теорема 1(правило Лопіталь)(Гійом Лопіталь (1661–1704) – французький математик, автор першого друкованого підручника по диференціальному численню). Нехай дві функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені й диференційовні всюди в деякому околі точки a , за винятком самої точки a . І нехай

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = 0 \quad (3.39)$$

і $f(x) \neq 0$ у зазначеному вище околі точки a . Тоді, якщо існує (скінченне або нескінченне) граничне значення $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$, то існує й граничне значення $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ і справедлива формула:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} \quad (3.40)$$

і, можна далі: $\frac{f(x)}{x}$.

Ця теорема вірна й при $x \rightarrow \infty$.

II. Невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$.

Будемо говорити, що відношення 2-х функцій $\frac{f(x)}{g(x)}$ являє собою при $x \rightarrow a$ невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$, якщо:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \quad (3.41)$$

Для розкриття цієї невизначеності, тобто для обчислення $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, справедливе твердження: якщо у формулюванні теореми 1 замінити вимоги $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ і $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ на умову (5.41), то теорема виявиться справедливою.

III. Розкриття невизначеностей інших видів.

Крім вивчених вище невизначеностей виду $0/0$ й ∞/∞ , часто зустрічаються інші види: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 і т.д. Всі ці невизначеності необхідно звести до виду, вивченому нами, тобто до $0/0$ або ∞/∞ шляхом алгебраїчного перетворення.

IV. Формула і теорема Тейлора (Тейлор Брук (1685–1731) – англійський математик. Знайшов формулу для розкладання функцій у степенні ряди).

Ця формула є однією з основних формул математичного аналізу й має численні додатки як в аналізі, так й у складних дисциплінах.

Теорема Тейлора. Нехай функція $f(x)$ має в деякому околі точки a похідну порядку $(n+1)$, де n – будь-який фіксований номер. Нехай далі x – будь-яке значення аргумента із зазначеного околу, p – довільне додатне число. Тоді, між точками a і x знайдеться точка c така, що справедлива формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_{n+1}(x), \quad (3.42)$$

де

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{p+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad (3.43)$$

Формула (5.42) називається *формулою Тейлора* (із центром у точці a), а (3.43) називається *залишковим членом*; він може бути записаний й в іншому вигляді. Прийнято називати залишковий член, записаний у вигляді (5.43), *залишковим членом у загальній формі* або *формулі Шлемільха-Роша*.

Формула Тейлора в центром у точці $a=0$ називається *формулою Маклорена* (Колін Маклорен (1698–1746) – шотландський математик, праці по математичному аналізу, теорії кривих, механіці).

3.7.3. Дослідження функції однієї змінної за допомогою першої й другої похідних.

I. Ознаки сталості зростання і спадання функції.

Теорема 1. Якщо у всіх точках проміжку $a < x < b$ похідна $f'(x) = 0$, то функція $f(x)$ зберігає в цьому проміжку постійне значення, тобто є відрізок горизонтальної прямої.

Теорема 2. Нехай функція $f(x)$ – неперервна в проміжку $a < x < b$. Якщо у всіх внутрішніх його точках $f'(x) > 0$, то функція $f(x)$ у даному проміжку зростає.

Теорема 3. Нехай функція $f(x)$ – неперервна на (a, b) , $a < x < b$. Якщо у всіх точках, внутрішніх $f'(x) < 0$, то функція $f(x)$ у даному проміжку спадає.

Умови теорем 1, 2, 3 є достатніми, а необхідними і умови 1.

II. Екстремум функції.

Означення. Говорять, що $f(x)$ має *min* у точці c , якщо $f(c) \leq f(x)$ у всіх точках, що лежать по обох сторонах від точки c у достатній близькості від неї. Говорять, що $f(x)$ має *max* у точці c , якщо $f(c) \geq f(x)$ у всіх точках, що лежать по обох сторонах від точки c у достатній близькості від неї. Максимум і мінімум поєднуються поняттям *екстремум*.

Необхідна ознака екстремума. Для того, щоб функція $f(x)$ мала екстремум у точці c , необхідно щоб $f'(x)$ оберталася в нуль або , або зовсім не існувала, але ця ознака не є достатньою.

1-ша достатня ознака наявності й відсутності екстремума.

Теорема 1. Якщо в деякому околі (a, b) точки x_0 $f'(x) > 0$ ліворуч від точки x_0 і $f'(x) < 0$ праворуч від x_0 , то функція $f(x)$ має *max*.

Якщо ж у деякому околі (a, b) точки x_0 $f'(x) < 0$ ліворуч і $f'(x) > 0$ праворуч, то $f(x)$ має *min*.

Таким чином, для того щоб неперервна функція в точці x_0 мала екстремум, необхідно, щоб знак похідної в цій точці змінився на протилежний, у самій же точці вона може бути рівна 0, або не існувати.

2-га достатня ознака екстремума.

Якщо функція $f(x)$ у критичній точці c диференційовна двічі, то можна скористатися наступною теоремою:

Теорема. Нехай у точці c $f'(x)$ функції $f(x)$ обертається в нуль: $f'(c) = 0$. Якщо при цьому $f''(c) > 0$, то в точці c $f(x)$ має *min*, якщо при $f''(c) < 0$, то в точці c $f(x)$ має *max*.

Практичні правила для знаходження всіх екстремумів функції $f(x)$ в $[a, b]$.

Функція повинна бути неперервною в цьому проміжку $[a,b]$, число критичних точок повинно бути обмежене, тоді для відшукування всіх $\max$ й $\min$ функції в $[a,b]$:

1. Знаходимо всі точки проміжку (a,b) , де $f'(x) = 0$, або не існує. Якщо їх немає, то немає і екстремумів, якщо вони є, нумеруємо їх у порядку зростання: $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b \dots$.

2. У всіх інших точках інтервалу (a,b) існує кінцева похідна $f'(x) \neq 0$. При цьому, якщо в яких-небудь 2-х точках k і l $f'(k)$ і $f'(l)$ є протилежні знаки, то між цими точками повинна щонайменше лежати одна критична точка. Тоді усередині кожної з ділянок (a, x_1) , (x_1, x_2) , $\dots$, (x_{n-1}, x_n) , (x_n, b) похідна $f'(x)$ зберігає незмінний знак. Якщо $f'(x) > 0$, то функція на цій ділянці зростає, якщо $f'(x) < 0$ – то спадає.

3. Встановлюємо наявність екстремума, або відсутність, у кожній із критичних точок $x_1, x_2, \dots, x_n$ на підставі вище викладеного.

Зауваження 1.3 цього слідує, що точки $\max$ і $\min$ чергуються один з одним і що вони розбивають проміжок (a,b) на часткові проміжки, у кожному з яких функція $f(x)$ або зростає або спадає чергуючись.

Зауваження 2. Якщо функція $f(x)$ монотонна в деякому проміжку (m,n) , то при будь-якому подовженні цього проміжку втрачає монотонності (або зовсім втрачає зміст), то говорять, що (m,n) є **проміжок монотонності** функції $f(x)$. Таким чином, точки екстремума функції $f(x)$, заданої на (a,b) , розбивають його на проміжки монотонності функції $f(x)$.

Зауваження 3. У процесі відшукування екстремумів корисно заносити результати дослідження в таблицю.

III. Інтервали опуклості й ввігнутості. Точки перегину.

А. Характер опуклості.

Означення. Говорять, що дуга AB функції $y=f(x)$ увігнута угору (угнута), якщо всі точки цієї дуги лежать вище будь-якій її дотичній MT , і ввігнута униз (опукла) CD , якщо всі точки лежать нижче будь-якої дотичної.

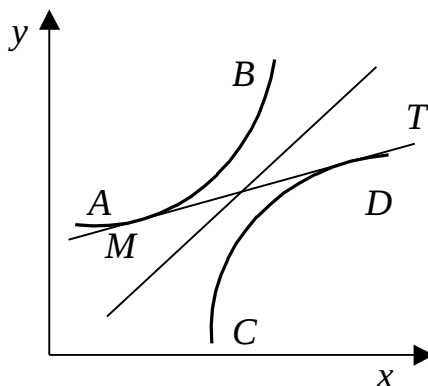


Рис.3.4.

Теорема. Для того, щоб дуга AB лінії $y=f(x)$ була ввігнута угору (униз), необхідно і достатньо, щоб похідна $f'(x)$ у відповідному проміжку зростала (спадала).

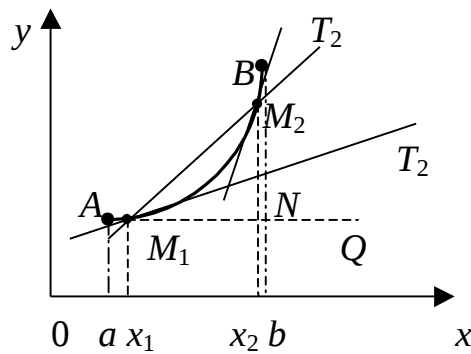


Рис.3.5.

Доведення. Необхідність. Нехай дана дуга AB , увігнута угору. Візьмемо в проміжку (a,b) дві довільні точки x_1 і x_2 . Проведемо M_1T_1 і M_2T_2 і M_1Q і M_2 вище M_1 , $QM_2 > QN$:

$$QM_2 = f(x_2) - f(x_1) : QN = M_1Q = M_1Q \quad f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(x_1);$$

$$\text{але } f(x_2) - f(x_1) > (x_2 - x_1) f'(x_1) : (x_2 - x_1)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > f'(x_1),$$

тобто кутовий коефіцієнт M_1M_2 більше кутового коефіцієнта дотичної M_1T_1 .

Тому що точки взяті довільно, те й x_1 і x_2 можна поміняти місцями:

$$f(x_1) - f(x_2) > (x_1 - x_2) f'(x_2) : (x_1 - x_2) \quad [\text{але } (x_1 - x_2) < 0],$$

то одержимо:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < f'(x_2) \quad \text{або} \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < f'(x_2),$$

тобто $f(x_2) > f(x_1)$. Тому що точки взяті довільно, то остання нерівність означає, що похідна $f'(x)$ зростає в проміжку (a,b) . Аналогічно доводиться, що якщо дуга AB увігнута вниз, то похідна $f'(x)$ убыває в (a,b) .

Достатність. Нехай похідна $f'(x)$ зростає в проміжку (a,b) , і нехай x_1 і x_2 дві довільно взяті точки цього проміжку. Потрібно довести, що точка $M_2(x_2, y_2)$ лежить вище дотичної M_1T_1 або довести нерівність:

$$QM_2 > QN \quad \text{або} \quad QM_2 - QN > 0,$$

$$\text{але } QM_2 - QN = [f(x_2) - f(x_1)] - (x_2 - x_1) f'(x_1).$$

Застосуємо до останньої різниці $[f(x_2) - f(x_1)]$ формули кінцевих приростів, c – точка між x_1 і x_2 :

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c),$$

$$\text{тоді } QM_2 - QN = (x_2 - x_1) [f'(c) - f'(x_1)].$$

За умовою $f'(x)$ зростає, значить $f'(c) - f'(x_1)$ має той же знак, що й $(c - x_1)$, а це значить, що такий же знак й $(x_2 - x_1)$, тобто $QM_2 - QN > 0$, що й було потрібно довести.

Зауваження. Якщо у внутрішніх точках проміжку (a,b) друга похідна $f''(x) > 0$, то відповідна дуга AB лінії $f(x)$ увігнута угору, якщо $f''(x) < 0$ – то дуга AB увігнута вниз.

Б. Точки перегину.

Означення. Якщо точка C лінії AB , де ця лінія має дотичну CT , служить границею двох дуг AC і CB , звернених увігнутістю в протилежні сторони, то точка C називається *точкою перегину* лінії AB .

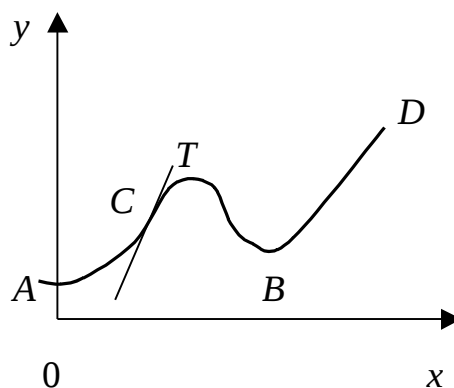


Рис.3.6.

Зауваження 1. Точка B , де лінія $ACBD$ не має двосторонню дотичну, не вважається точкою перегину, хоча вона й служить границею дуг CB й BD , увігнутих в протилежні сторони.

Зауваження 2. Дотична CT , проведена через точку перегину, перетинає лінію AB , тому що дуги AC й AB звернені увігнутістю в різні сторони, то одна з них повинна лежати вище дотичної, інша нижче.

Необхідна ознака точки перегину.

Для того, щоб у точці C лінія $f(x)$ мала перегин, необхідно, щоб у відповідній точці $x=c$ друга похідна $f''(x)=0$ або не існувала. Ця точка називається *критичною точкою* по другій похідній.

Правило для відшукування точок перегину лінії $y=f(x)$ і для судження про характер її увігнутості.

Щоб знайти усі точки перегину функції $y=f(x)$ у проміжку (a,b) і визначити на яких ділянках ця лінія увігнута угору або вниз, знаходимо в такий спосіб.

1. Знаходимо в проміжку (a,b) усі критичні точки по другій похідній. Нумеруємо їх у порядку зростання:

$$a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b.$$

Абсциси усіх точок перегину повинні міститися серед цих критичних точок.

2. У всіх точках проміжку (a,b) , де існує кінцева друга похідна $f''(x)$, відмінна від нуля, вона зберігає незмінний знак усередині кожної з ділянок (a,c_1) , (c_1, c_2) , $\dots$, (c_n,b) .

Якщо цей знак більше 0, то $y=f(x)$ на цій ділянці увігнута угору, якщо менше 0, то увігнута вниз.

3. Встановлюємо наявність або відсутність перегину в кожній із точок $c_1, c_2, \dots, c_n$. Якщо при переході через точку c_i напрямку увігнутості змінюється на протилежний, а в самій точці c_i лінії $y=f(x)$ має дотичну (тобто перша похідна $f'(x)$ існує), то c_i є точка перегину. Якщо хоча б одна із цих умов не виконана, то перегину немає.

3.7.4. Асимптоти.

1. Похилі асимптоти.

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена в інтервалі $a; +\infty$ або в інтервалі $-\infty; b$. Прямую $y = kx + b$ називатимемо *асимптотою* кривої $y = f(x)$, якщо виконується умова

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - b) = 0.$$

Геометрична ілюстрація (рис. 3.7). Різниця ординат кривої $y = f(x)$ і прямої $y = kx + b$ прямує до нуля, коли їх абсиси прямують до нескінченності: $\lim_{x \rightarrow \infty} MN = 0$.

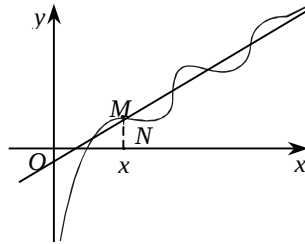


Рис. 3.7.

Теорема. Крива $y = f(x)$, $x \in a; +\infty$ тоді і тільки тоді має асимптоту $y = kx + b$, коли існують скінченні границі

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx). \quad (3.44)$$

Доведення. Необхідність. Нехай пряма $y = kx + b$ є асимптотою кривої $y = f(x)$, тобто виконується умова

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - b) = 0.$$

Тоді

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right) = 0.$$

Це можливо лише у випадку:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right) = 0,$$

звідки

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} = 0,$$

причому k – скінченне за умовою, оскільки пряму $y = kx + b$ задано. Далі за умовою $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - b) = 0$ знаходимо $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b$, причому b – скінченне.

Достатність. Нехай тепер виконується умова, де k і b – скінченні границі, тоді $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - b) = 0$, тобто, за означенням $y = kx + b$ – асимптота кривої $y = f(x)$.

Доведення теореми у випадку, коли $x \in -\infty; b$, здійснюється аналогічно, потрібно лише замінити $x \rightarrow \infty$ на $x \rightarrow -\infty$.



Знайти асимптоти функції $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Розв'язування. У точці $x = 1$ функція має розрив другого роду, тому $x = 1$ – вертикальна асимптота. Знайдемо похилу асимптоту. За теоремою

$$k = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 1, \quad k = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} - x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 - x^2 + x}{x - 1} = 1, \quad b = 1.$$

Отже, пряма $y = x - 1$ є асимптотою функції при $x \rightarrow 1$ (рис.5.8).

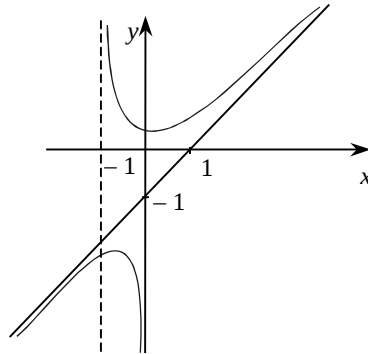


Рис. 3.8



Чи має функція $y = x \cos x$ похилі асимптоти?

Розв'язування. Функція $y = x \cos x$ похилих асимптот не має, оскільки не існує границі $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$.



Знайти похилі асимптоти кривої $y = 10x - \arcsin \frac{1}{x}$.

Розв'язування. Областю визначення кривої є частина площини, де $|x| \geq 1$. Застосовуючи теорему про побудову асимптот, дістаємо:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 10 - \frac{\arcsin \frac{1}{x}}{x} = 10,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} 10x - \arcsin \frac{1}{x} - 10x = 0.$$

Отже, пряма $y = 10x$ є асимптотою кривої при $x \rightarrow \infty$.

2. Горизонтальні асимптоти. Якщо у похилій асимптоті $y = kx + b$ функції $y = f(x)$ маємо $k = 0$, то таку похилу асимптоту називають *горизонтальною асимптотою* функції. Отже, горизонтальна асимптота – частинний випадок похилої – відшукується як похила асимптота за умов:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - kx = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

і має вигляд $y = b$. До речі, умову $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ можна не перевіряти, якщо $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ – скінченна границя, оскільки в такому разі границя $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ завжди дорівнює нулю. Звідси можемо зробити висновок.

Зауваження. Для того щоб пряма $y = b$ була горизонтальною асимптотою функції $y = f(x)$, $x \rightarrow a$; $x \rightarrow \infty$; $x \rightarrow -\infty$; a , необхідно і достатньо, щоб існувала скінченна границя $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

 **Графа.** Знайти горизонтальні асимптоти функції $y = \arctg x$.

Розв'язування. Маємо

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}.$$

Отже, $y = \pm \frac{\pi}{2}$ горизонтальні асимптоти (3.9).

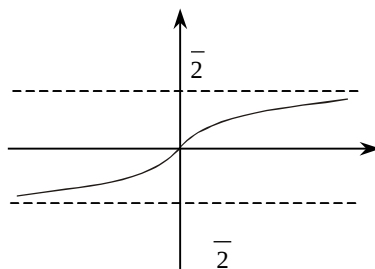


Рис. 3.9

3.8. Загальний план дослідження функції та побудова графіка.

1. Знайти область визначення та значення функції, заданої формулою, якщо таку область не зазначено.
2. Дослідити функцію на парність, непарність, періодичність.
3. З'ясувати точки перетину функції з осями координат.
4. Дослідити функцію на неперервність.
5. Знайти асимптоти графіка функції (якщо вони існують).
6. З'ясувати, як функція поводить себе на кінцях кожного з проміжків області визначення (знайти границі функції на кінцях цих проміжків, якщо вони є).
7. Дослідити функцію на диференційовність.
8. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми. Знайти екстремуми і значення функції в точках екстремуму.
9. Дослідити функцію на опуклість (угнутість): знайти інтервали опуклості (вгнутості), а також точки перегину функції.
10. Знайти найбільше і найменше значення функції (якщо вони існують).
11. Побудувати графік функції.



Побудувати графік функції $y = \frac{x^3}{1-x^2}$.

1. Функція не існує в точках $x = \pm 1$. Тому область визначення функції

$$D_x = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\}; \quad (-\infty; -1); (-1; 1); (1; \infty).$$

2. Функція непарна, оскільки $y(-x) = \frac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = -\frac{x^3}{1-x^2} = -y(x)$. З огляду на непарність функції достатньо побудувати її графік лише при $x > 0$.

Функція неперіодична.

3. Точки перетину з осями координат:

з віссю Ox : $y = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

$(0; 0)$ – точка перетину з віссю Ox .

з віссю Oy : $x = 0 \Rightarrow y = \frac{0^3}{1-0^2} = 0$.

$(0; 0)$ – точка перетину з віссю Oy .

4. Функція невизначена в точці $x = 1$, тому ці точки є «підозрілими» на розрив. Знайдемо односторонні границі в точці $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty.$$

Точки $x = \pm 1$ — точки розриву другого роду.

$D_x = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\}; \quad (-\infty; -1); (-1; 1); (1; \infty)$ — область неперервності функції.

5. Знаходимо асимптоти функції. Насамперед з'ясуємо, що прями $x = \pm 1$ – вертикальні асимптоти. (Це впливає з означення вертикальних асимптот та п. 4.)

Шукаємо похилу асимптоту $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y/x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{1-x^2} \cdot \frac{1}{x} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} - 3 \cdot \frac{x}{1-x^2} \right) = 0.$$

Отже, $y = x$ – похила асимптота.

6. В п. 4 знайдені односторонні границі функції в точках $x = \pm 1$. Залишилось знайти границі функції, коли $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{1 - x^2}.$$

7. Знайдемо першу похідну від функції y (вона існує на $D(x)$):

$$y' = \frac{3x^2 - 1 - x^2 - x^3 - 2x}{1 - x^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 - 2x^4}{1 - x^2} = \frac{3x^2 - x^4}{1 - x^2}.$$

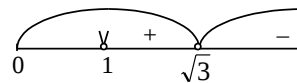
8. Дослідимо функцію на монотонність і знайдемо точки екстремуму. Для знаходження стаціонарних точок прирівнюємо першу похідну до нуля:

$$y' = 0 \quad 3x^2 - x^4 = 0,$$

$$x^2(3 - x^2) = 0$$

$$x_{1,2} = 0, \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{3}.$$

Зважаючи на зауваження п. 2, розглядатимемо дослідження функції при $x \geq 0$.



$y' > 0$, коли $x \in (0; 1)$; $y' < 0$, коли $x \in (1; \sqrt{3})$,

$y' < 0$, коли $x > \sqrt{3}$.

Тому $x_{\max} = \sqrt{3}$ – точка максимуму, $x_{\min} = 1$ – точка мінімуму.

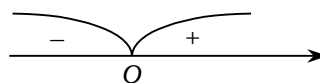
$$f(x_{\max}) = f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}^3}{1 - \sqrt{3}^2} = \frac{3\sqrt{3}}{1 - 3} = -\frac{3}{2}\sqrt{3},$$

$$f(x_{\min}) = f(1) = \frac{1^3}{1 - 1^2} = \frac{1}{0} \rightarrow \infty.$$

9. Знайдемо другу похідну функції y :

$$y' = \frac{3x^2 - x^4}{1 - x^2} \Rightarrow y'' = \frac{(3x^2 - x^4)'(1 - x^2) - (3x^2 - x^4)(1 - x^2)'}{1 - x^2} = \frac{(6x - 4x^3)(1 - x^2) - (3x^2 - x^4)(-2x)}{1 - x^2} = \frac{6x - 4x^3 - 6x^3 + 4x^5 + 6x^3 - 2x^5}{1 - x^2} = \frac{6x - 4x^3}{1 - x^2} = \frac{2x(3 - 2x^2)}{1 - x^2}.$$

Точка $x=0$ може бути точкою перегину, бо $y''(0) = 0$. Перевіримо це за критерієм. Визначимо знак y'' в околі точки $x = 0$:



Друга похідна змінює в точці $x=0$ свій знак, тому функція $y = \frac{x^3}{1 - x^2}$ має точку перегину $x = 0$, на проміжку $(0; 1)$ функція угнута, $(1, +\infty)$ – функція опукла.

10. Найбільше та найменше значення функції не існують.

11. Побудуємо графік функції, враховуючи дослідження.

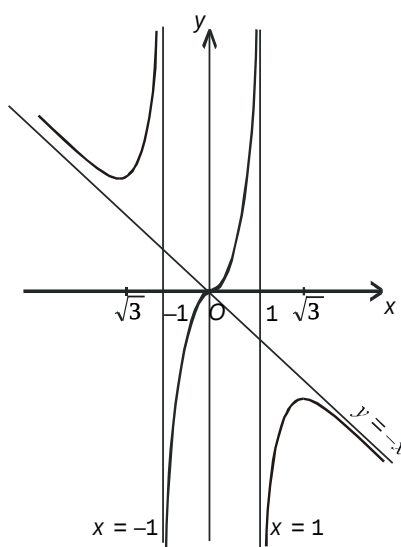


Рис. 3.10

3.8.1. Дослідження та побудова графіка функції, заданої параметрично.

Функцію, задану параметрично, досліджують так само, як явно задані функції. Обчислюють першу та другу похідні і за їх допомогою будують графік.



Побудувати графік функції

$$\begin{aligned} y &= 1 - \cos t \\ x &= t - \sin t. \end{aligned}$$

Розв'язування. Зауважимо, що в разі заміни t на $t + 2\pi$ змінна x набуває приросту 2π :

$$\begin{aligned} y(t + 2\pi) &= y(t); \\ x(t + 2\pi) &= t + 2\pi - \sin(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi. \end{aligned}$$

Тому достатньо побудувати частину графіка при $t \in [0, 2\pi]$. Решту графіка дістаємо, перенісши вісь x .

1. При скінченних значеннях t значення x, y обмежені. Оскільки величина y завжди обмежена, то вертикальних асимптот немає. Відшукуємо похилі асимптоти:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos t}{t - \sin t} = 0; \\ b &= \lim_{t \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - \cos t) \text{ не існує;} \end{aligned}$$

похилих асимптот також немає.

2. Знайдемо проміжки додатності та від'ємності функцій

$$y - 1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2} \geq 0, \quad t \in [0, 2\pi].$$

3. Знайдемо проміжки зростання та спадання функцій. Знайдемо критичну точку.

$$y_x = \frac{d}{dt} \frac{1 - \cos t}{\sin t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

Якщо $t = 0, t = 2$, то $\sin \frac{t}{2} = 0$.

Отже, y_x при $t = 0, t = 2$ не існує.

При $t = \pi$ $\cos \frac{t}{2} = 0$. Отже, $y_x = 0$ при $t = \pi$.

Визначаємо характер критичних точок.

У загальному випадку зі зростанням параметра t функція x зростає:

у точці $t = 0$ при $t = 0$ $y_x = 0$ і при $t = 0$ $y = 0$, отже, у точці $t = 0$ — маємо *min*;

у точці $t = \pi$ при $t = \pi$ $y_x = 0$ при $t = \pi$ $y_x = 0$, отже, у точці $t = \pi$ — маємо *max*;

у точці $t = 2$ при $t = 2$ $y_x = 0$ при $t = 2$ $y_x = 0$, отже, у точці $t = 2$ — маємо *min*;

у точках $t = 0, t = 2$ маємо вертикальну дотичну, а в точці $t = \pi$ — горизонтальну.

4. Обчислюємо екстремальні значення функції:

$$t = 0 \quad y = 0 \quad x = 0;$$

$$t = \pi \quad y = 2 \quad x = \pi;$$

$$t = 2 \quad y = 0 \quad x = 2.$$

5. Знаходимо проміжки опуклості та угнутості.

Обчислюємо другу похідну:

$$y_x = \frac{d}{dt} \frac{\operatorname{ctg} \frac{t}{2}}{\sin t} = \frac{-\frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \cos t} = \frac{-1}{4 \sin^4 \frac{t}{2}} < 0.$$

Похідна скрізь від'ємна, крива опукла (рис. 5.11).

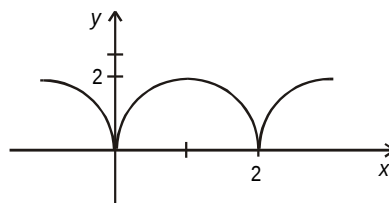


Рис. 3.11.



Вправи для самостійного розв'язування

1. Для функції $f(x) = 2x^2 - 7$ знайти приріст, що відповідає переходу незалежної змінної від значення $x = 3$ до значення $x = 5$.

2. Побудувати графік функції $y = 2x - 3$. Надаючи абсцисі послідовно значення $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, знайти приріст ординат: $y_2 - y_1$, $y_3 - y_2$, $y_4 - y_3$, $y_3 - y_1$, $y_2 - y_1$, $y_2 - y_1$ і відношення приростів: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$, $\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$, $\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. З'ясувати геометричний зміст результату.

3. Побудувати графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$. Надаючи абсцисі послідовно значення $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, знайти приріст ординат $y_2 - y_1$, $y_3 - y_2$, $y_4 - y_3$, $y_3 - y_1$ і відношення приросту $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$, $\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$, $\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$.

4. Знайти відношення приросту функції до приросту незалежної змінної $\frac{y}{x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ у кожному з таких випадків:

	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>
y	$23 - 5x$	$3x - 10$		$x^2 + 1$	$1 : x$	$\log_{10} x$
x_1	2	1	2	-2	5	7
x_2	4	2	1	-3	6	14

5. Чи можна визначити y , знаючи лише, що $x = 3$, якщо: 1) $y = 4x - 9$, 2) $y = x^2$, 3) $y = \frac{1}{x}$? Проілюструвати відповідь рисунком.

Продиференціювати функції (6–14):

$$6. y = (1 - \sqrt[3]{x})^3 \quad y = 1 - \sqrt[3]{x}^2 \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

$$7. y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \quad y = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

$$8. y = \sqrt[3]{(x-1)^2} \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2} \quad y = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{3}}$$

$$9. y = 5x^4 - 3x^2 - 6; \quad \frac{dy}{dx} = 20x^3 - 6x$$

$$10. y = 3cx^2 - 8dx - 5e; \quad \frac{dy}{dx} = 6cx - 8d$$

$$11. y = x^{a-b}; \quad \frac{dy}{dx} = (a-b)x^{a-b-1}$$

$$12. y = x^n - nx - n; \quad \frac{dy}{dx} = nx^{n-1} - n$$

$$13. f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 5;$$

$$f'(x) = 2x^2 - 3x.$$

$$14. f(x) = (a - b)x^2 - cx - d;$$

$$f'(x) = 2(a - b)x - c.$$

Довести: (15–26):

$$15. \frac{d}{dx}(a - bx - cx^2) = b - 2cx.$$

$$16. \frac{d}{dy}(5y^m - 3y - 6) = 5my^{m-1} - 3.$$

$$17. \frac{d}{dx}(2x^2 - 3x^3) = 4x - 9x^4.$$

$$18. \frac{d}{ds}(3s^4 - s) = 12s^3 - 1.$$

$$19. \frac{d}{dx} 4x^{\frac{1}{2}} - x^2 = 2x^{-\frac{1}{2}} - 2x.$$

$$20. \frac{d}{dy} y^2 - 4y^{\frac{1}{2}} = 2y - 2y^{-\frac{1}{2}}.$$

$$21. \frac{d}{dx}(2x^3 - 5) = 6x^2.$$

$$22. \frac{d}{dt}(3t^5 - 2t^2) = 15t^4 - 4t.$$

$$23. \frac{d}{d}(a^4 - b) = 4a^3 - b.$$

$$24. \frac{d}{d} 5 - 2^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}}.$$

$$25. \frac{d}{dt} 9t^{\frac{5}{3}} - t^{-1} = 15t^{\frac{2}{3}} - t^{-2}.$$

$$26. \frac{d}{dx}(2x^{12} - x^9) = 24x^{11} - 9x^8.$$

Продиференціювати функції (27–39):

$$27. r = c^3 - d^2 - e;$$

$$\frac{dr}{d} = 3c^2 - 2d - e.$$

$$28. y = 6x^{\frac{7}{2}} - 4x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}};$$

$$\frac{dy}{dx} = 21x^{\frac{5}{2}} - 10x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}.$$

$$29. y = \sqrt{3x} - \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2\sqrt{3x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2}.$$

$$30. y = \frac{a - bx - cx^2}{x};$$

$$\frac{dy}{dx} = c - \frac{a}{x^2}.$$

$$31. y = \frac{(x - 1)^3}{x^{\frac{1}{3}}};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}.$$

$$32. y = \frac{x^{\frac{5}{2}} - x - x^{\frac{1}{2}} - a}{x^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^{\frac{5}{2}} - x - 2x^{\frac{1}{2}} - 3a}{2x^{\frac{5}{2}}}.$$

$$33. y = (2x^3 - x^2 - 5)^3.$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x(3x - 1)(2x^3 - x^2 - 5)^2.$$

$$34. f(x) = (a - bx^2)^{\frac{5}{4}};$$

$$f'(x) = \frac{5bx}{2}(a - bx^2)^{\frac{1}{4}}.$$

$$35. f(x) = (1 - 4x^3)(1 - 2x^2);$$

$$f'(x) = 4x(1 - 3x - 10x^3).$$

$$36. f(x) = (a - x)\sqrt{a - x}.$$

$$f'(x) = \frac{a - 3x}{2\sqrt{a - x}}.$$

$$37. f(x) = (a - x)^m(b - x)^n;$$

$$f'(x) = (a - x)^m(b - x)^n \left(\frac{m}{a - x} - \frac{n}{b - x} \right).$$

$$38. y = \frac{1}{x^n};$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

$$39. y = x(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^4 - a^2x^2 - 4x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Обчислити похідні (40–47).

$$40.a) \frac{d}{dx}(2x^3 - 4x - 6); \text{ б) } \frac{d}{dt}(b - at^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$3) \frac{d}{dx} x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}};$$

$$6) \frac{d}{dt}(at^7 - bt^5 - 9);$$

$$e) \frac{d}{dx}(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}};$$

$$и) \frac{d}{dt}(5 - 2t)^{\frac{9}{2}};$$

$$в) \frac{d}{d} 3^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{1}{2}} - 6;$$

$$e) \frac{d}{d} 4^{\frac{2}{5}};$$

$$i) \frac{d}{dt} \sqrt{a - b\sqrt{s}};$$

$$г) \frac{d}{dx}(2x^3 - x)^{\frac{5}{3}};$$

$$ж) \frac{d}{dt} \sqrt{1 - 9t^2};$$

$$ї) \frac{d}{dx} 2x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{5}{3}}.$$

$$41. y = \frac{2x^4}{b^2 - x^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8b^2x^3 - 4x^5}{(b^2 - x^2)^2}.$$

$$42. y = \frac{a - x}{a + x};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{(a + x)^2}.$$

$$43. s = \frac{t^3}{(1 - t)^2};$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3t^2 - t^3}{(1 - t)^3}.$$

$$44. f(s) = \frac{(s - 4)^2}{s - 3};$$

$$f'(s) = \frac{(s - 2)(s - 4)}{(s - 3)^2}.$$

$$45. f(x) = \sqrt{a - b^2};$$

$$f'(x) = \frac{a}{(a - b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$46. F(r) = \sqrt{\frac{1}{1 - r}};$$

$$F'(r) = \frac{1}{(1 - r)\sqrt{1 - r^2}}.$$

$$47. (y) \frac{y}{1-y}{}^m;$$

$$(y) \frac{my^{m-1}}{(1-y)^{m-1}}.$$

Продиференціювати функції (48–97):

$$48. y = \ln(x-a);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-a}.$$

$$49. y = \ln(ax-b);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax-b}.$$

$$50. y = \ln \frac{1-x}{1+x};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1-x^2}.$$

$$51. y = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{1-x^4}.$$

$$52. y = e^{ax};$$

$$\frac{dy}{dx} = ae^{ax}.$$

$$53. y = e^{4x-5};$$

$$\frac{dy}{dx} = 4e^{4x-5}.$$

$$54. y = \ln(x^2-x);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-1}{x^2-x}.$$

$$55. y = \ln(x^3-2x-5);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-2}{x^3-2x-5}.$$

$$56. y = \log_a(2x-x^3);$$

$$\frac{dy}{dx} = \log_a e \frac{2-3x^2}{2x-x^3}.$$

$$57. y = x \ln x;$$

$$\frac{dy}{dx} = \ln x + 1.$$

$$58. f(x) = \ln(x^3);$$

$$f'(x) = \frac{3}{x}.$$

$$59. f(x) = \ln^3 x;$$

$$f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x}.$$

$$60. f(x) = \ln \frac{a-x}{a+x};$$

$$f'(x) = \frac{2a}{a^2-x^2}.$$

$$61. f(x) = \ln(x - \sqrt{1-x^2});$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$62. y = a^{e^x};$$

$$\frac{dy}{dx} = \ln a \cdot a^{e^x} e^x.$$

$$63. y = b^{x^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \ln b \cdot b^{x^2}.$$

$$64. y = 7^{x^2-2x};$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \ln 7 (x-1) 7^{x^2-2x}.$$

$$65. y = c^{a^2-x^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xc^{a^2-x^2} \ln c.$$

$$66. r = a ;$$

$$\frac{dr}{d} = a \ln a .$$

$$67. r = a^{\ln} ;$$

$$\frac{dr}{d} = \frac{a^{\ln} \ln a}{d} .$$

$$68. s = e^{b^2 t^2} ;$$

$$\frac{ds}{dt} = 2te^{b^2 t^2} .$$

$$69. u = ae^{\sqrt{v}} ;$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{ae^{\sqrt{v}}}{2\sqrt{v}} .$$

$$70. p = e^{q \ln q} ;$$

$$\frac{dp}{dq} = e^{q \ln q} (1 + \ln q) .$$

$$71. \frac{d}{dx} [e^x (1 - x^2)] = e^x (1 - 2x - x^2) .$$

$$72. \frac{d}{dx} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} .$$

$$73. \frac{d}{dx} (x^2 e^{ax}) = xe^{ax} (ax + 2) .$$

$$74. y = \ln \frac{e^x}{1 - e^x} ;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - e^x} .$$

$$75. y = \frac{a}{2} e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} ;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} .$$

$$76. y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} ;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} .$$

$$77. y = x^n a^x ;$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x x^{n-1} (n + x \ln a) .$$

$$78. y = x^x ;$$

$$\frac{dy}{dx} = x^x (\ln x + 1) .$$

$$79. y = x^{\frac{1}{x}} ;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x^x} (1 - \ln x)}{x^2} .$$

$$80. y = x^{\ln x} ;$$

$$\frac{dy}{dx} = \ln x^2 + x^{\ln x + 1} .$$

$$81. f(y) = \ln y e^y ;$$

$$f'(y) = e^y \ln y + \frac{1}{y} .$$

$$82. f(s) = \frac{\ln s}{e^s} ;$$

$$f'(s) = \frac{1 - s \ln s}{se^s} .$$

$$83. f(x) = \ln(\ln x) ;$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln x} .$$

$$84. F(x) = \ln^4(\ln x) ;$$

$$F'(x) = \frac{4 \ln^3(\ln x)}{x \ln x} .$$

$$85. (x) \ln(\ln^4 x);$$

$$(x) \frac{4}{x \ln x}.$$

$$86. (y) \sqrt{\frac{1-y}{1+y}};$$

$$(y) \frac{1}{1-y^3}.$$

$$87. f(x) \ln \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}-x};$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$88. y = x^{\frac{1}{\ln x}};$$

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

$$89. y = e^{x^x};$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^x(1+\ln x)} x^x.$$

$$90. y = \frac{c^x}{x^x};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c^x}{x^x} \ln \frac{c}{x} - 1.$$

$$91. y = \frac{x}{n}^{nx};$$

$$\frac{dy}{dx} = n \frac{x^{nx}}{n} - 1 \ln \frac{x}{n}.$$

$$92. w = v^{e^v};$$

$$\frac{dw}{dv} = v^{e^v} e^v \frac{1+v \ln v}{v}.$$

$$93. z = \frac{a}{t}^t;$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{a}{t}^t (\ln a - \ln t + 1).$$

$$94. y = x^{x^n};$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{x^n} n^{-1} (n \ln x + 1).$$

$$95. y = x^{x^x};$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{x^x} x^x \ln x + \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}.$$

$$96. y = a^{\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy \ln a}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$97. y = e^x [x^n - nx^{n-1} - n(n-1)x^{n-2} - \dots]; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy \ln a}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

98. Обчислити похідні.

$$1) \frac{d}{dx} x^2 \ln x;$$

$$6) \frac{d}{dx} e^x \ln x;$$

$$11) \frac{d}{dx} \ln(a^x - b^x);$$

$$2) \frac{d}{dx} (e^{2x} - 1)^4;$$

$$7) \frac{d}{dx} x^3 3^x;$$

$$12) \frac{d}{dx} \lg(x^2 - 5x);$$

$$3) \frac{d}{dx} \ln \frac{3x-1}{x-3};$$

$$8) \frac{d}{dx} \frac{1}{x \ln x};$$

$$13) \frac{d}{dx} \frac{2-x^2}{e^{3x}};$$

$$4) \frac{d}{dx} \ln \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x}};$$

$$9) \frac{d}{dx} \ln x^3 \sqrt{1-x^2};$$

$$14) \frac{d}{dx} (x^2 - a^2) e^{x^2 - a^2};$$

$$5) \frac{d}{dx} x^{\sqrt{x}};$$

$$10) \frac{d}{dx} \frac{1}{x}^x;$$

$$15) \frac{d}{dx} (x^2 - 4x)^x.$$

$$99. y = \frac{(x-1)^2}{(x-2)^3(x-3)^4};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)(5x^2-14x-5)}{(x-2)^4(x-3)^5}.$$

Вказівка. У цьому і наступних прикладах (**100–104**), перш ніж диференціювати, потрібно прологарифмувати обидві частини рівності, якою задано функцію.

$$100. y = \frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{(x-2)^{\frac{3}{4}}(x-4)^{\frac{7}{3}}};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)^2(7x^2-30x-97)}{12(x-2)^{\frac{7}{4}}(x-3)^{\frac{10}{3}}}.$$

$$101. y = x\sqrt{1-x}(1-x);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-x-5x^2}{2\sqrt{1-x}}.$$

$$102. y = \frac{x(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-3x^2-2x^4}{(1-x^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

$$103. y = x^5(a-3x)^3(a-2x)^3;$$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4(a-3x)^2(a-2x)(a^2-2ax-12x^2).$$

$$104. y = \frac{\sqrt{(x-a)^3}}{\sqrt{x-a}};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-2a)\sqrt{x-a}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}.$$

Продиференціювати функції (105–140).

$$105. \arcsin \sqrt{1-4x^2};$$

$$106. xe^{x^2}.$$

$$107. \ln \sin \frac{y}{2}.$$

$$108. \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{3} \ln \sec^2 \frac{\theta}{3}.$$

$$109. \ln \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad 110. \operatorname{arctg} \frac{1}{2} e^{2x} - e^{2x}.$$

$$111. e^{ax} \ln \sin ax.$$

$$112. \frac{3}{x}^{2x}.$$

$$113. \sin^3 \cos.$$

$$114. x^{\operatorname{tg} x}.$$

$$115. \frac{a}{2\sqrt{b-cx^n}}. \quad 116. \frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}(x^2-1)^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

$$117. \frac{m-x}{1-m^2} \frac{e^{\operatorname{marctg} x}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$118. e^{\sec^{-1} 3x}.$$

$$119. \operatorname{tg}^2 x \ln \sec^2 x.$$

$$120. \operatorname{arctg} \sqrt{1-x^2}.$$

$$121. \frac{3 \ln 2 \cos x - 3 \sin x - 2x}{13}.$$

$$122. \frac{z^2}{\cos z}.$$

$$123. \operatorname{arctg} \frac{a}{x} \ln \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}.$$

$$124. e^{\operatorname{tg} x^2}.$$

$$125. \ln \operatorname{tg} 3x - x^2.$$

$$127. \frac{2-3t^{\frac{1}{2}}-4t^{\frac{1}{3}}-t^2}{t}.$$

$$128. \frac{\sqrt[3]{a^2-x^2}}{\cos x}.$$

$$129. \frac{1-x-1-2x-2-x}{3-x-2-3x}.$$

$$130. e^x \ln \sin x.$$

$$131. \operatorname{arctg} \ln 3x.$$

$$132. \arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$133. \sqrt[3]{a-bx^n{}^m}.$$

$$134. \operatorname{arctg} a^2.$$

$$135. \ln \sqrt{a^2-bx^n{}^m}.$$

$$136. \operatorname{ctg}^3 \ln ax.$$

$$137. \ln \sqrt{\frac{y^2-1}{y^2+1}}.$$

$$138. 1-3x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

$$139. \sqrt{\frac{2-3x^3}{1-4x}}.$$

$$140. \ln \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}}.$$

Обчислити за допомогою правила Лопіталя (141–174):

Відповіді

$$141. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x^2-x-20}$$

$$\frac{8}{9}.$$

$$142. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1};$$

$$\frac{1}{n}.$$

$$143. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1};$$

$$1.$$

$$144. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x};$$

$$2.$$

$$145. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x \sin x};$$

$$2.$$

$$146. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{2x^2};$$

$$\frac{1}{8}.$$

$$147. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x};$$

$$\ln \frac{a}{b}.$$

$$148. \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 - ar^2 + a^2r - a^3}{r^2 - a^2};$$

$$0.$$

$$149. \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\arcsin \theta}{\sin^3 \theta};$$

$$\frac{1}{6}.$$

$$150. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x};$$

$$\cos \frac{\pi}{2}.$$

$$151. \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y \sin y - y}{\ln 1 - y};$$

$$2.$$

$$152. \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \theta - \sec \theta}{\operatorname{tg} \theta - \sec \theta - 1};$$

$$1.$$

$$153. \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta - 2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \cos 4\theta};$$

$$\frac{1}{2}.$$

Відповіді

154. $\lim_{z \rightarrow a} \frac{az - z^3}{a^4 - 2a^3z + 2az^3 - z^4};$ $-\infty.$
155. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^{2/3}}{x^4 - e^x - e^{2x}};$ $6e^4.$
156. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x^2}{x^2 - 1}.$ $2.$
157. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^5 - 32}.$ $\frac{3}{20}.$
158. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}.$ $2.$
159. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$ $\frac{1}{6}.$
160. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos x - 1}{1 - \sin \frac{x}{2}}.$ $\frac{4}{2}.$
161. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}.$ $1.$
162. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/x};$ $\frac{1}{e}.$
163. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\operatorname{tg} x}};$ $1.$
164. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin^{\operatorname{tg} x};$ $1.$
165. $\lim_{y \rightarrow a} 1 - \frac{a}{y};$ $e^a.$
166. $\lim_{x \rightarrow 0} e^x - x^{\frac{1}{x}};$ $e^2.$
167. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \frac{1}{\ln x};$ $\frac{1}{e}.$
168. $\lim_{z \rightarrow 0} 1 - nz^{\frac{1}{z}};$ $e^n.$
169. $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4};$ $\frac{1}{e}.$
170. $\lim_{n \rightarrow 0} \cos m^{\frac{n}{2}};$ $e^{\frac{1}{2}m^2n}.$
171. $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \sin x^{\operatorname{ctg} x};$ $e.$

Відповіді

$$172. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x} x^x;$$

1.

$$173. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctgx}^x;$$

1.

$$174. \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{x}{a} \operatorname{tg} \frac{x}{2a};$$

 $\frac{2}{e}.$ **Знайти максимуми і мінімуми функцій (175–207):****Відповіді**

$$175. 3x^3 - 9x^2 - 27x - 30;$$

при $x = -1$ маємо $\max = 45$; $x = 3 - \min = -51$.

$$176. 2x^3 - 21x^2 - 36x - 20;$$

 $x = 1 - \max = -3$; $x = 6 - \min = -128$.

$$177. \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 3x - 1;$$

 $x = 1 - \max = \frac{7}{3}$; $x = 3 - \min = -1$.

$$178. 2x^3 - 15x^2 - 36x - 10;$$

 $x = 2 - \max = 38$; $x = 3 - \min = 37$.

$$179. x^3 - 9x^2 - 15x - 3;$$

 $x = 1 - \max = 4$; $x = 5 - \min = -28$.

$$180. x^3 - 3x^2 - 6x - 10;$$

функція не має ні $\max$ ні $\min$. $x = 1 - \max = 2$;
 $x = 3 - \min = -26$.

$$181. x^5 - 5x^4 - 5x^3 - 1;$$

 $x = 3 - \min = -26$; $x = 0$ ні $\max$ ні $\min$.

$$182. 3x^5 - 125x^3 - 2160;$$

при $x = -4$ і $x = 3$ маємо $x = -3$ і $x = 4 - \min$.

$$183. x^3 - 3x^2 - x - 2;$$

 $x = \frac{7}{3} - \max = \frac{4}{27}$; $x = 3 - \min = 0$.

$$184. x^3 - x^2 - x - 2;$$

 $x = 3 - \min = 0$; $x = \frac{8}{5} - \max$;

$$185. x^4 - x^2 - x - 2;$$

 $x = -2 - \max$; $x = \frac{2}{3} - \min$;

$$186. x^2 - 2x - 1 - 4;$$

при $x = 4$ функція не має ні $\max$ ні $\min$.

$$187. x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{2}} - 5 - 2;$$

 $x = \frac{1}{2} - \max$; $x = \frac{11}{18} - \min$ при $x = 2$ функція не має ні $\max$ ні $\min$. $x = \frac{1}{2} - \max$; $x = 1$ і $x = 5 - \min$.

$$188. 2x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}} - a, a > 0;$$

 $x = \frac{2a}{3} - \max$; $x = a - \min$

$$189. x^a - x^2 - a - x^3, a > 0;$$

 $x = -1$ функція не має ні $\max$ ні $\min$. $x = -a$ і $\frac{a}{3} - \min$; $x = \frac{a}{2} - \max$; при $x = a$ функція не має ні $\max$ ні $\min$.

Відповіді

190. $b - c(x - a)^{\frac{2}{3}}, (a > 0, c > 0);$

при $x = a$ маємо $\max = b$.

191. $a - b(x - c)^{\frac{1}{3}};$

функція не має ні $\max$ ні $\min$.

192. $\frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10};$

$x = 4 - \max; x = 16 - \min;$

193. $\frac{(a - x)^3}{a - 2x} (a > 0);$

при $x = 10$ функція не має ні $\max$ ні $\min$;

$x = \frac{a}{4} - \min$; при $x = a$ і $x = \frac{a}{2}$ функція не має ні $\max$ ні $\min$.

194. $\frac{1 - x + x^2}{1 - x + x^2};$

$x = \frac{1}{2} - \min$; при $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ функція не має ні $\max$ ні $\min$.

195. $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 3x + 2};$

$x = \sqrt{2} - \min; x = \sqrt{2} - \max$

196. $\frac{(x - a)(b - x)}{x^2} (a > 0, b > 0);$

$x = \frac{2ab}{a + b} - \max; x = 0 - \min.$

197. $\frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x};$

$x = 1 - \max = 10; x = \frac{1}{2} - \min = 8.$

198. $\frac{1}{3x^5 - 20x^3 + 60x - 1};$

Функція не має ні $\max$ ні $\min$.

199. $\sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 + 36x - 17};$

$x = 2 - \min = -3; x = -3 - \max \sqrt[3]{98}.$

200. $\frac{x}{\ln x};$

$x = e - \min$

201. $ae^{kx} - be^{-kx} (a > 0, b > 0, k > 0);$

$x = \frac{\ln b - \ln a}{2k} - \min = 2\sqrt{ab}.$

202. $x^x, (1 < x < e);$

$x = \frac{1}{e} - \min;$

203. $x^{\frac{1}{x}}, (1 < x < e);$

при $x = e$ маємо $\max$.

204. $\cos x - \sin x (0 < x < \frac{\pi}{2});$

$x = \frac{\pi}{4} - \max = \sqrt{2}; x = \frac{5\pi}{4} - \min = -\sqrt{2}.$

205. $\sin 2x - x - \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2};$

$x = \frac{\pi}{6} - \max; x = \frac{\pi}{6} - \min.$

206. $x - \operatorname{tg} x.$

Функція не має ні $\max$ ні $\min$.

207. $\sin x - \cos 2x \geq 0 \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right];$

$x = \arcsin \frac{1}{4} - \max; x = \frac{\pi}{2} - \min. \quad x = \frac{\pi}{2} - \max.$

208. Узявши до уваги опір повітря, закон відхилення маятника від вертикалі можна подати у вигляді:

$$ae^{-kt} \cos(nt).$$

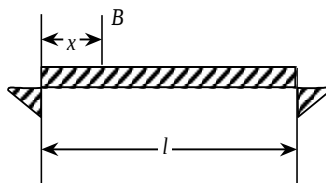
Показати, що найбільші елонгації відбуваються через рівні проміжки часу.

209. Потрібно якомога точніше виміряти деяку невідому величину x . Нехай для цього було викладено n однаково точних спостережень цієї величини, що дали результати: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Похибки цих спостережень, напевне, такі: $x - a_1, x - a_2, x - a_3, \dots, x - a_n$, причому як додатні так і від'ємні. Відомо, що найбільш імовірним значенням x є те, при якому сума квадратів похибок: $(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + (x - a_3)^2 + \dots + (x - a_n)^2$ набуває найменшого значення. Показати, що найбільш імовірним значенням x буде середнє арифметичне результатів спостережень.

210. Згинальний момент у точці B рівномірно навантаженого бруска завдовжки l задається формулою:

$$M = \frac{1}{2}wx \cdot \frac{1}{2}wx^2,$$

де w — навантаження на одиницю довжини цього бруска.



Показати, що максимум згинального моменту досягається в центрі бруска.

211. Якщо повні витрати на кожну милю (1,596 км) для електричного провідника подаються залежністю

$$W = i^2 t \frac{t}{r} b,$$

де i — сила струму; r — опір провідника; t і b величини, не залежні від i і r , то якого опору провідник є найвигіднішим з економічного погляду; мінімальним при даних i , t і b ?

$$\text{Відповідь } r = \frac{t}{i}.$$

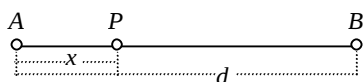
212. Підводний телеграфний кабель складається із серцевини, виготовленої з мідного дроту, та оболонки, виготовленої з непровідного матеріалу. Нехай x — відношення радіуса серцевини до товщини оболонки. Тоді швидкість сигналізації пропорційна до

$$x^2 \ln \frac{1}{x}.$$

Показати, що найбільша швидкість досягається, коли

$$x = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

213. У точках A та B вміщено два джерела теплових потоків, потужності яких дорівнюють відповідно a та b . Повна потужність теплового потоку на відстані x від A задається формулою



$$I = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(d - x)^2}.$$

Показати, що температура в P буде найменша, якщо

$$\frac{d - x}{x} = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

тобто коли відстані BP і AP відносяться як кубічні корені з відповідних потужностей потоків. Відстань P від A подається у вигляді:

$$x = \frac{a^{\frac{1}{3}} d}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}.$$

214. Довести, що при будь-якому значенні x

$$\left| x - \frac{1}{x} \right| \geq 2.$$

215. Потрібно обгородити парканом прямокутну ділянку землі площею 216 м^2 , а далі поділити її на дві рівні частини стіною, загородкою, паралельною одній зі сторін цієї ділянки. Якої довжини слід узяти сторони ділянки, щоб на цю споруду пішла найменша кількість матеріалу?

Відповідь. 12 і 18 м.

216. Дротом завдовжки 20 м потрібно обгородити клумбу, що має форму кругового сектора. Який слід узяти радіус кола, щоб площа клумби була найбільшою?

Відповідь. 5 м.

217. Потрібно обгородити парканом прямокутну ділянку даної площі. Якщо частину вже зведеної кам'яної стіни взяти за одну зі сторін паркана, то якими мають бути розміри ділянки, щоб будівництво обійшлося найдешевше?

Відповідь. Сторона, паралельна стіні, має бути вдвоє довшою за кожну з двох інших сторін.

218. Резервуар, який повинен мати квадратне дно і бути відкритим зверху, потрібно обкласти всередині свинцем. Якими мають бути його виміри, щоб обкладання потребувало найменшої кількості свинцю, якщо він має вміщувати 32 л води?

Відповідь. Висота 2 м, сторона основи 4 м, тобто вдвічі більша за висоту.

219. Якщо внутрішня поверхня резервуара, заданого умовами попередньої задачі, дорівнює 48 м^2 , то яка найбільша можлива його місткість?

Відповідь. 32 м^3 .

220. Які найбільш економічно вигідні розміри циліндричного парового котла даної місткості?

Відповідь. Діаметр дорівнює довжині котла.

221. З куска картону $30 \times 14 \text{ см}^2$ потрібно виготовити коробку (без кришки) найбільшої місткості, вирізавши рівні квадрати по кутках, а потім зігнувши картон для утворення боків коробки.

Відповідь. Квадрати, що вирізаються, мають бути $3 \times 3 \text{ см}$.

222. Вважаючи, що міцність бруса з прямокутним поперечним перерізом прямо пропорційна його ширині та кубу висоти, знайти ширину бруса найбільшої міцності, який можна вирізати з колоди діаметром 16 см.

Відповідь. Ширина дорівнює 8 см.

223. Із круглого залізного диска радіусом r потрібно зробити конус найбільшого об'єму. Який має бути радіус основи цього конуса?

Відповідь. $r\sqrt{\frac{2}{3}}$.

224. Потрібно побудувати палатку у формі правильної чотирикутної піраміди. Знайти відношення висоти палатки до сторони основи, за якою при даній площині бічної поверхні об'єм палатки є найбільшим.

Відповідь. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

225. Дріт завдовжки 12 м розрізаний на шість частин, із яких дві одного розміру, чотири іншого. Перші два куски зігнули у вигляді квадратів, сполучивши їх вершини чотирма кусками, що залишилися. У результаті утворився прямокутний паралелепіпед. Як розрізали дріт, коли відомо, що об'єм цього паралелепіпеда найбільший з усіх можливих?

Відповідь. Чотири частини по 1 м, дві частини по 4 м.

226. Довжина і периметр поперечного перерізу поштової посилки у сумі мають становити 60 см. Знайти найбільший об'єм посилок: 1) якщо посилка має форму прямокутного паралелепіпеда з квадратним поперечним перерізом; 2) посилка має форму циліндра.

Відповідь. 1) 2000 см^3 ; 2) $\frac{8000}{3} \text{ см}^3$.

227. Щоб тертя рідини об стінки каналу було якомога меншим, площу його, що зрошується водою, потрібно зробити якнайменшою. Показати, що найраціональнішою формою відкритого прямокутного каналу із заданим периметром поперечного перерізу є така, при якій ширина каналу вдвічі перевищує його висоту.

228. Стіна, висота якої 27 м, на 8 м віддалена від будинку, який вищий за стіну. Знайти найменшу довжину драбини за такою умовою: вона має одним кінцем спиратися об землю із зовнішнього щодо будинку боку стіни, дотикатися до стіни у деякій проміжній точці останньої, а другим іншим кінцем торкатися будинку.

Відповідь. $13\sqrt{13}$.

229. Колода завдовжки 20 м має форму зрізаного конуса, діаметри основ якого дорівнюють відповідно 2 м і 1 м. Із цієї колоди потрібно вирубати балку з квадратним поперечним перерізом, вісь якої має збігатися з віссю колоди, а об'єм бути найбільшим. Знайти розміри балки.

Відповідь. Довжина балки $13\frac{1}{2}$ м; сторона основи поперечного перетину $1\frac{1}{3}$ м.

230. Електростанція розміщується на одному березі річки, ширина якої b кілометрів, а фабрика – на протилежному її березі на відстані a кілометрів, якщо лічити від проекції на той берег, де розташована станція. Знайти найбільш економний спосіб для підведення струму до фабрики, якщо вартість підвішування проводів над землею становить m грн., а прокладання кабелю під водою – n грн./км.

Відповідь. $a - \frac{bm}{\sqrt{h^2 - m^2}}$ км по землі; $\frac{bn}{\sqrt{n^2 - m^2}}$ км під водою.

231. Картину, висота якої 1,4 м, повішено на стіну так, що її нижній край на 1,8 м вищий від ока спостерігача. На якій відстані від стіни має стати спостерігач, щоб його положення було найсприятливішим для розглядання картини?

Відповідь. 2,4 м.

232. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ у точці (3, 2).

233. До параболи $y = x^2 - 3x + 1$ провести дотичні через точки: 1) (4, 1); 2) (4, 7). З'ясувати геометричний зміст здобутих результатів.

234. Показати, що нормаль до кривої $3y = 6x - 5x^3$, проведена в точці $1, \frac{1}{3}$, проходить через початок координат.

235. На кривій $y = f(x)$ знайти таку точку, щоб нормаль до кривої в цій точці проходила через початок координат. Здобутий результат застосувати до кривої $3y = 6x - 5x^3$, розглянутої в попередній задачі.

236. Показати, що промені, які падають на параболічне дзеркало з його фокуса, відбиваються паралельним пучком.

237. Накреслити (у достатньому масштабі) дугу кривої $y^5 - y + x = 0$, яка лежить у першому квадранті. Побудувати дотичні до цієї дуги в її кінцях.

238. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^2 - 2xy + 3y^2 - 2y - 16 = 0$ у точці (1, 3).

239. Скласти рівняння нормалі до кривої $y^4 = ax^3$ у точці (a, a).

240. До еліпса $x^2 + 4y^2 = 400$ проведені дотичні в точках, абсциса кожної з яких дорівнює 15. Визначити кут між цими дотичними.

241. Показати, що рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ може бути написане у вигляді $\frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = 1$.

242. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої, заданої (параметрично) рівняннями $x = t^2, y = t^3$ («напівкубічна парабола»), у точці, для якої $t = 2$.

243. Дано криву $x = t^4 - 2t + 2, y = t^2 + 2t$. Скласти рівняння дотичної до неї в точці (1, 3).

244. Рівносторонню гіперболу $x^2 - y^2 = a^2$ можна подати параметричними рівняннями $x = \frac{a}{\cos t}, y = a \operatorname{tg} t$. Записати рівняння її дотичної в будь-якої точці.

245. Показати, що гіпербола $xy = 8$ і парабола $y = x^2$ перетинаються в точці (2, 4) під кутом, який дорівнює наближено 40°,5.

246. Знайти кути, які утворюються параболою $4y = 3x^2 - x - 6$ і $2y = x^2 - 4x + 3$ в точках їх перетину. (Тут і далі нехтуємо уявними та нескінченно віддаленими точками зустрічі двох кривих.)

247. У параболі $4y = x^2$ проведено хорду, абсциси кінців якої дорівнюють відповідно 2 і 5. Які кути утворює ця хорда з параболою?

248. Під яким кутом синусоїда $y = \sin x$ перетинає пряму $2y = 1$?

249. Під яким кутом перетинаються криві $y = a^x$ і $y = b^x$ $a > b$?

250. Під якими кутами перетинаються параболи $y^2 = ax$ і $x^2 = by$? Розглянути частинний випадок, коли $a = b$.

Під якими кутами перетинаються криві в даній точці? (251–254).

251. $x = t^2 - 3t + 4$, $y = t^2 - 4t + 4$ – у точці $x = 2$, $y = 1$?

252. $x = t^3 - 1$, $y = t^2 - t - 1$ – у точці $x = 2$, $y = 1$?

253. $x = \cos t$, $y = \sin t$ – у точці $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

254. $x = 2\cos t$, $y = \sin t$ – у точці $x = 1$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

255. Знайти точки кривої, $x = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 1$, $y = t^2 - t - 1$, в яких дотична паралельна осі Oy.

256. Знайти точки кривої $x = t^2 - t - 1$, $y = t^3 - 3t - 1$, в якій дотична паралельна осі Ox.

257. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $x = t^4 - 2t^3 + t^2 - 4t + 2$, $y = t^4 - 2t^3 + t^2 - 4t + 2$ у точці $x = 0$, $y = 0$.

Дано функцію. Знайти її похідну вищого порядку (258–268).

258. $y = 3x^2 + 1 - \frac{1}{5}x^3 - x^2 - 3x + 1^3$; $y^{(8)}$?

259. $y = 3x + 1^2 - 2x^2 - 3x + 7$; $y^{(6)}$?

260. $y = 3x + 1^2 - 2x^2 - 3x + 7^2$; $y^{(6)}$?

261. $y = \sqrt[5]{x^3}$; $y^{(3)}$?

262. $y = a^{3x}$; $y^{(3)}$?

263. $y = \frac{x^3}{x - 1}$; $y^{(3)}$?

264. $y = x^2 e^{2x}$; $y^{(4)}$?

265. $y = x^2 e^{2x}$; $y^{(50)}$?

266. $y = \sin x \cos x$; $y^{(50)}$?

267. $y = \sin x \cos^2 x$; $y^{(4)} = ?$

268. $y = e^x \sin x$; $y^{(4)} = ?$

269. Довести, що функція $y = C \cos 2x + C \sin 2x$ задовольняє рівняння $y'' - 4y = 0$.

270. Довести, що функція $y = C e^{-x} + C e^{2x}$ задовольняє рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$.

271. Довести, що функція $y = e^{-x} \cos x$ задовольняє рівняння $y^{(4)} - 4y = 0$.

272. Довести, що коли $y = e^x \sin x$ і $z = e^x \cos x$, то $y'' = 2z$ і $z'' = -2y$.

Знайти диференціал функцій (273–285).

Відповіді

273. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $dy = (3ax^2 + 2bx + c) dx$.

274. $y = 2x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}} - 6x^{-1} + 5$; $dy = (5x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{3}} - 6x^{-2}) dx$.

275. $y = a^2 - x^{2.5}$; $dy = (-10x^{-0.5}) dx$.

276. $y = \sqrt{1 - x^2}$; $dy = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

277. $y = \frac{x^{2n}}{1 - x^{2n}}$; $dy = \frac{2nx^{2n-1}}{(1 - x^{2n})^2} dx$.

278. $y = \ln \sqrt{1 - x^2}$; $dy = \frac{-x dx}{x^2 - 1}$.

279. $y = e^x - e^{-x^2}$; $dy = (2e^{2x} - e^{-x^2}) dx$.

280. $y = e^x \ln x$; $dy = (e^x \ln x + \frac{1}{x}) dx$.

281. $s = t \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$; $ds = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt$.

282. $\operatorname{tg} \theta = \sec \theta$; $d = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$.

283. $r = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \theta - \operatorname{tg} \theta$; $dr = (\sec^4 \theta - 1) d\theta$.

284. $f(x) = \ln x^3$; $f'(x) = \frac{3 \ln x^2}{x}$.

285. $t = \frac{t^3}{1 - t^{\frac{3}{2}}}$; $t' = \frac{3t^2 dt}{(1 - t^{\frac{3}{2}})^2}$.

Довести:

$$286. d \frac{x \ln x}{1-x} \ln 1-x = \frac{\ln x dx}{1-x^2}.$$

$$287. d \arctg \ln y = \frac{dy}{y(1-\ln y)^2}.$$

$$288. d \frac{\cos}{2\sin^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Intg} \frac{1}{2} = \frac{d}{\sin^3}.$$

Знайти другий диференціал функцій:

289. 1) $x^2 y^2 a^2$; 6) $2a \operatorname{tg} \sin$; 11) $4k y^3$;
 2) $x^2 4ay$; 7) $\sec^3 \frac{1}{3}$; 12) $\sec^2 \frac{1}{2}$;
 3) $y e^x e^{-x}$; 8) $x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}$; 13) $1 \sin$;
 4) $xy a$; 9) $y^2 ax^3$; 14) a .
 5) $y \ln \sec x$; 10) $y \ln x$;

290. Обчислити наближено приріст функції $y = x^3 - 5x - 80$ при переході змінної x від значення $x = 4$ до значення $x = 4,001$. Порівняти наближений результат із точним.

Відповідь. $y = 0,008$. Точне значення відрізняється від наближеного шостим десятковим знаком.

291. Знаючи, що $\lg_{10} 200 = 2,30103$, обчислити $\lg_{10} 200,4$. Порівняти отриманий результат з даними таблиці.

292. Пояснити походження часто застосовуваної в техніці наближеної формули $\sqrt{a^3 + b} \approx a + \frac{b}{3a^2}$, де $|b|$ є число мале порівняно з $|a|$.

293. Для функції $y = 2x^3 - 6$ знайти значення x , якому відповідає y , що зростає у 24 рази швидше за x .

Відповідь. $x = 2$.

294. Ордината точки, яка описує криву $x^2 + y^2 = 25$, спадає зі швидкістю 1,5 см/с. З якою швидкістю змінюється абсциса точки, коли ордината дорівнює 4 см?

Відповідь. $\frac{dx}{dt} = 2$ см/с.

295. При якому значенні x функція $2x^2 - 4$ спадає в 5 раз швидше, ніж x зростає?

Відповідь. $x = \frac{5}{4}$.

296. Знайти значення x у точках, де швидкість зміни функції $x^3 - 12x^2 - 45x + 13$ дорівнює нулю.

Відповідь. $x = 3$ і 5 .

297. Якому значенню x відповідають точки, де $x^3 - 5x^2 - 17x$ і $x^3 - 3x$ змінюються з однаковою швидкістю?

298. В якій точці еліпса $16x^2 + 9y^2 = 400$ ордината y спадає з такою самою швидкістю, як x зростає?

Відповідь. $3, \frac{16}{3}$.

299. Дано $y = x^3 - 6x^2 - 3x + 5$. Знайти точки, в яких швидкість зміни ординати дорівнює швидкості зміни тангенса кута дотичної до кривої з віссю Ox .

Відповідь. $x = 1$ і 5 .

Точка рухається по кривій, рівняння якої задано. Як змінюється дуга? (300–304)

Відповіді

300. $y^2 = 2x$; $\frac{dx}{dt} = 2$; $x = 2$;

$\frac{ds}{dt} = \sqrt{5}$.

301. $xy = 6$; $\frac{dy}{dt} = 2$; $y = 3$;

$\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3}\sqrt{13}$.

302. $x^2 + 4y^2 = 20$; $\frac{dx}{dt} = 1$; $y = 1$;

$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2}$.

303. $y = x^3$; $\frac{dx}{dt} = 3$; $x = 3$

304. $y^2 = x^3$; $\frac{dy}{dt} = 4$; $y = 8$

305. Сторона рівностороннього трикутника завдовжки 24 см збільшується зі швидкістю 3 см/год. Обчислити приріст площини.

Відповідь. $36\sqrt{3}$ см²/год.

306. Знайти швидкість зміни площі квадрата, якщо сторона b збільшується зі швидкістю a одиниць за секунду.

Відповідь. $2ab$ од². / с.

307. 1) Об'єм сферичної мильної бульбашки збільшується в кілька разів швидше за радіус. У скільки саме? 2) Якщо радіус бульбашки дорівнює 10 см і збільшується зі швидкістю 1,25 см/с, то який приріст об'єму?

Відповідь. 1) У $4r^2$ разів швидше;
2) 500 см³/с.

308. Драбина довжиною у 10 м одним кінцем притулена до вертикальної стіни, а другим спирається на горизонтальну підлогу. Нижній кінець відсувають від стіни зі швидкістю 2 м/хв.

1) З якою швидкістю опускається верхній кінець драбини, якщо основа її міститься на відстані 6 м від стіни?

2) Коли обидва кінці драбини рухаються з однаковою швидкістю?

3) Коли верхній кінець драбини опускається зі швидкістю 1 м/хв?

Відповідь. 1) $1\frac{1}{2}$ м/хв; 2) коли драбина розміщена на $5\sqrt{2}$ м від стіни; 3) коли драбина розміщена на $2\sqrt{5}$ м від стіни.

309. Баржу, палуба якої на 3 м нижча за рівень доку, тягнуть до нього канатом, прив'язаним до кільця у підлозі доку, причому канат рухають зі швидкістю 2 м/хв. за допомогою волюка, який міститься на палубі. З якою швидкістю баржа наближається до доку, якщо віддалена від нього на 4 м?

Відповідь. 2,5 м/хв.

310. Вагон, який стоїть на верхньому шляху, міститься на висоті 10 м прямо над нижнім вагоном, причому їхні шляхи перетинаються під прямим кутом. Якщо швидкість верхнього вагона дорівнює 30 км/год, а нижнього 18 км/год, то з якою швидкістю вони віддаляються один від одного через 4 хв. після зустрічі?

Відповідь. 34,9 км/год.

311. Один корабель пливе в південному напрямі зі швидкістю 6 км/год., інший – у східному зі швидкістю 8 км/год. О 16.00 другий перетинає шлях першого в точці, в якій перший побував 2 год. тому. Як змінювалася відстань між кораблями: а) о 15.00; б) о 17.00; в) коли відстань між ними не змінювалася?

Відповідь. а) зменшувалася на 2,8 км/год; б) збільшувалася на 8,73 км/год; в) о 15.28.

312. Нехай об'єм стовбура дерева пропорційний до куба його діаметра і останній рівномірно збільшується з року в рік зі зростанням дерева. Показати, що швидкість зростання об'єму стовбура, коли діаметр дорівнює 0,9 м, у 25 разів більша, ніж коли діаметр дорівнює 18 см.

313. Показати, що функція $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ зростає на проміжку $\left[\frac{2}{3}, \dots\right]$ і спадає на проміжку $\left[\dots, \frac{2}{3}\right]$.

314. Показати, що функція e^x зростає на будь-якому проміжку.

315. Визначити проміжки зростання і спадання функції $y = 1 + x + x^2$. Результати проілюструвати за допомогою рисунка.

316. Показати, що функція $y = \frac{1}{12}x^3 - x + 3$ зростає на проміжках $[-2, 2]$ і $[2, \dots]$ і спадає на проміжку $[-2, 2]$. Результати проілюструвати за допомогою рисунка.

317. На яких проміжках зростають і на яких спадають функції $\sin x$; $\sin^2 x$; $\sin 3x$; якщо x змінюється від 0 до 2π ?

318. Визначити проміжки зростання та спадання для кожної з функцій:

$$\frac{2x^3 - 15x^2 + 24x + 1}{10}; \quad \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 2; \quad x^3 - x^2 - x + 1$$

і проілюструвати результати графічно.

319. Показати, що функція $f(x) = \frac{6}{x^3 - 1}$ зростає на будь-якому проміжку, який не містить значення $x = 1$.

320. Дослідити на зростання та спадання функцію a^x , $a > 0$.

321. Дослідити на зростання та спадання функцію $1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$. Скористатися здобутим результатом для доведення твердження: $1 - \cos x \geq \frac{x^2}{2}$.

322. Скористатися нерівністю попередньої задачі для доведення того, що при $x > 0$ справджується нерівність:

$$\sin x \leq x - \frac{x^3}{6}.$$

323. Визначити напрям угнутості ланцюгової лінії $y = \frac{a}{2} e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}$, де $a > 0$.

324. Для кривої $y = (x - 2)(x - 4)(x - 5)$ дослідити напрям угнутості і скористатися здобутими результатами при побудові графіка.

325. Для кривої $12y = x^4 - 6x^3 - 25x - 24$ дослідити напрям угнутості.

326. Показати, що крива $y = \frac{1}{3}x^4 - x^2 - 3x - 1$ не має точок перегину.

327. Показати, що крива $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ має три точки перегину, які лежать на одній прямій.

328. Знайти точки перегину «кривої ймовірності» $y = e^{-x^2}$.

329. Показати, що крива $12x^3y - 12\ln x - 5 = 0$ має точку перегину при $x = e$.

330. Знайти точки перегину кривих:

$$1) y = a \sqrt[5]{(x - b)^3}; \quad 2) y = a \sqrt[5]{(x - b)^2}.$$

331. Визначити напрям угнутості циклоїди

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t)$$

в точках, що не лежать на осі абсцис.

332. Визначити напрям угнутості і точки перегину для «вкороченої циклоїди»:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad \text{де } 0 \leq t \leq 1.$$

333. Визначити напрям угнутості кривої $y = x^5 - 5x^3 - 15x^2 - 30$.

334. Показати, що точка $(2, 1)$ є для кривої $6y = x^3 - 6x^2 - 12x - 2$ точкою перегину.

335. Для кривої $y = 2 - \frac{1}{3}x^2$ дослідити напрям угнутості.

336. Показати, що синусоїда $y = \sin x$ звернена угнутістю вниз у точках, що лежать вище від осі абсцис, і вгору – у точках, що лежать нижче від цієї осі. Знайти точки перегину синусоїди.

Довести нерівності (337–341).

337. $(y - x)\cos y \leq \sin y \leq \sin x \leq (y - x)\cos x$, якщо $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$.

338. $\frac{y - x}{\cos^2 x} \leq \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x \leq \frac{y - x}{\cos^2 y}$, якщо $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$.

339. $(y - x)a^x \log a \leq a^y - a^x \leq (y - x)a^y \log a$, якщо $y > x$.

340. $\frac{y - x}{1 - y^2} \leq \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x \leq \frac{y - x}{1 - x^2}$, якщо $y > x$.

341. $\frac{y - x}{y} \leq \log y - \log x \leq \frac{x - y}{x}$, якщо $y > x > 0$.

342. Що можна сказати про корені похідної функції $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$, не знаходячи цієї похідної?

343. Що можна сказати про корені похідної функції $y = (x - 1)^2(x - 1)^3$, не знаходячи цієї похідної?

344. Що можна сказати про корені похідної функції $y = \sin x e^x$, не знаходячи цієї похідної?

345. Довести, що $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ при $x > 0$ і $-\frac{\pi}{2}$ при $x < 0$.

346. Довести рівність $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + xy}$, де $xy > -1$, якщо $xy > -1$; $\frac{\pi}{2}$, якщо $xy = -1$ і $x > 0$; $-\frac{\pi}{2}$, якщо $xy = -1$ і $x < 0$.

347. Довести рівність $\arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1 - y^2} - y\sqrt{1 - x^2})$, де $x, y \in [-1, 1]$, якщо $xy > 0$ або $x^2 + y^2 = 1$; $\frac{\pi}{2}$, якщо $x^2 + y^2 = 1$ і $x > 0, y = 0$; $-\frac{\pi}{2}$, якщо $x^2 + y^2 = 1$ і $x < 0, y = 0$.

348. Довести, що сума $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ дорівнює $\frac{\pi}{4}$, якщо $0 < x < 1$, і дорівнює $\frac{3\pi}{4}$, якщо $x > 1$.

349. Перевірити рівність $\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$.

350. Перевірити рівність $2\operatorname{arctg} 10 = \arcsin \frac{20}{101}$.

351. Перевірити рівність $2\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$ при $x > 0$.

352. Перевірити рівність $\arccos x = \arccos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3 - 3x^2}$ при $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Дослідити функції і побудувати їх графіки (353–365).

353. $y = \arcsin(\sin x)$.

354. $y = \arccos(\cos x)$.

355. $y = \arctg(\tg x)$.

356. $y = \frac{2x-1}{2} - \frac{1}{2} \arctg \tg \frac{2x-1}{2}$, де x не дорівнює цілому числу, і $y = x$, де x – ціле число, при $0 \leq x \leq 1$.

357. а) $y = \frac{1}{x-2}$; б) $y = \frac{x-1}{x}$; в) $y = \frac{2x-1}{x-1}$; г) $y = \frac{3-2x}{1-x}$.

358. а) $y = \frac{3x-2}{x-1}$; б) $y = \frac{2-3x}{1-x}$; в) $y = \frac{2-3x}{1-x}$.

359. а) $y = \sqrt{x^2 - 3x - 2}$; б) $y = \sqrt{9 - x^2}$; в) $y = \sqrt{4x - x^2 - 5}$.

360. а) $y = \sqrt{x^2 - 1}$; б) $y = \sqrt{x-1} \sqrt{x+1}$; в) $y = \sqrt{x-1} - \sqrt{1-x}$.

361. а) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x} \sqrt{1+x}}$; б) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$; в) $y = \sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}$.

362. а) $y = \frac{1}{x^2 - 2x - 8}$; б) $y = \frac{1}{4x - x^2 - 5}$; в) $y = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$.

363. а) $y = \frac{1}{\log_2 x}$; б) $y = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x}$; в) $y = \log_3 \frac{1}{x}$; г) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x}$.

364. а) $y = \log_2 \log_2 x$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}} \log_2 x$; в) $y = \log_2 \log_{\frac{1}{2}} x$.

365. а) $y = \log_2 \frac{1-x}{1+x}$, б) $y = \log_2^2 x$; в) $y = \log_3 (x^2 - 1)$.

4.1. Основні поняття.

4.1.1. Простір R^n .

Одне з фундаментальних понять математики – поняття функції однієї змінної – цілком природно, за аналогією, узагальнюється на довільну кількість n змінних з одночасним переходом від простору R^2 (площини) до n -вимірного простору R^n . Подано далі докладне теоретичне обґрунтування такого узагальнення.

Множину, елементами якої є всі можливі набори впорядкованих n дійсних чисел, позначають R^n . У цій множині означають поняття відстані між будь-якими двома її елементами.

Відстань між елементами

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \text{ і } y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n, \\ x_i, y_i \in R, i = 1, 2, \dots, n,$$

подається у вигляді

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \quad (4.1)$$

Означення. Множина R^n із введеною на ній відстанню називається n -вимірним простором R^n , число n – розмірністю цього простору. Елемент $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ називається точкою простору R^n , число $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, – i -ю координатою цієї точки. Точки $x = (0, 0, \dots, x_i, \dots, 0) \in R^n$ утворюють i -ту координатну вісь простору. Точка $0 = (0, 0, \dots, 0)$ називається початком координат.

Простір R^1 з елементами $x = x_1$ — числова пряма. Простори R^2 і R^3 з елементами $x = (x_1, x_2)$ і $x = (x_1, x_2, x_3)$ являють собою відповідно площину і тривимірний простір.

У просторі R^n можна означити поняття суми елементів і добутку елемента на дійсне число:

якщо

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n, \quad \alpha \in R,$$

то

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in R^n, \quad \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \in R^n. \quad (4.2)$$

4.1.2. Означення функції багатьох змінних.

Означення. Якщо кожній точці множини $D \subset R^n$ n -вимірного простору R^n за деяким законом $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ поставлено у відповідність одне і тільки одне дійсне число $z \in R$, то говорять, що в області $D \subset R^n$ задано функцію n незалежних змінних.

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

При цьому D називають областю визначення функції, а E —областю значень функції.

Згідно з означенням функцію $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна розглядати як функцію точки і записувати як $z = f(P)$.

Зокрема, коли $n = 2$, маємо функцію двох змінних $z = f(x, y)$, якщо кожній парі $(x, y) \in D$ на площині поставлено у відповідність одне і тільки одне число z .

4.1.3. Графічне зображення функції двох змінних.

Означення. Графіком функції двох змінних $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок $(x, y, f(x, y))$ простору R^3 , де $(x, y) \in R^2$.

Щоб зобразити графічно функцію двох змінних, розглянемо систему координат x, y, z у тривимірному просторі (рис. 4.1).

Кожній парі чисел x і y відповідає точка $P(x, y)$ площини xy . Узявши в цій точці значення функції $z = f(x, y)$, дістанемо точку у просторі R^3 з координатами (x, y, z) , яка позначається символом $Q(x, y, z)$. Усі такі точки, що відповідають різним значенням незалежних змінних x і y , утворюють певну поверхню у просторі R^3 . Ця поверхня і є графічним зображенням функції $z = f(x, y)$.

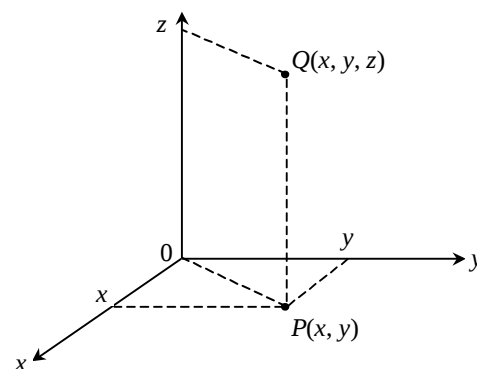


Рис. 4.1



Графік

Графічним зображенням функції $z = 4 - x - y$ є площина, що проходить через точки $(0, 0, 4)$, $(0, 4, 0)$, $(4, 0, 0)$ (рис. 6.2).

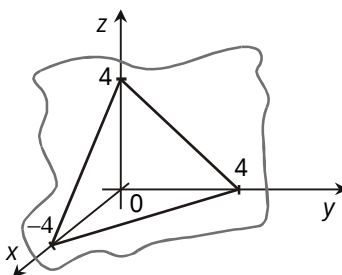


Рис. 4.2



Графік

Графічним зображенням функції $z = y^2 - x^2$ є сідло (рис. 4.3).

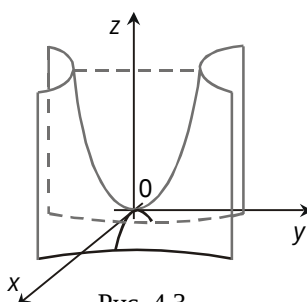


Рис. 4.3

Зауваження. На практиці побудувати графік функції двох змінних буває нелегко, оскільки потрібно зобразити на площині просторову фігуру, а це не завжди вдається.

Існує й інший спосіб геометричного зображення функції двох змінних – за допомогою ліній рівня.

Означення. Лінією рівня називається множина всіх точок площини, в яких функція $z = f(x, y)$ набуває однакових значень. Рівняння ліній рівня записують у вигляді $f(x, y) = c$. Для функції трьох змінних розглядають *поверхні рівня*.

Накресливши кілька ліній рівня та задавши значення на них функції, дістанемо певне уявлення про характер зміни функції.

Григор Один з найпростіших прикладів зображення функції за допомогою ліній рівня – задання рельєфу місцевості на географічній карті. Висота місцевості над рівнем моря є функцією координат точки земної поверхні. За лініями однакової висоти, нанесеними на карту, легко уявити рельєф відповідної місцевості.

Григор Побудувати лінії рівня функції $z = \sqrt{\frac{6y}{x^2 + y^2 + 4}}$.

Розв'язування. Шукане рівняння має вигляд

$$\sqrt{\frac{6y}{x^2 + y^2 + 4}} = c.$$

1. Якщо $c < 0$, то ліній рівня немає.

2. Якщо $c = 0$, то лінії рівня становлять множину всіх точок осі Ox , крім двох: $(-2, 0)$.

3. Якщо $c > 0$, маємо $\frac{6y}{x^2 + y^2 + 4} = c^2 \Rightarrow c^2(x^2 + y^2 + 4) = 6y \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{6}{c^2}y + 4 = 0$, або $x^2 + (y - \frac{3}{c^2})^2 - 4\frac{9}{c^4} + 4 = 0$. Отже, лініями рівня є кола радіусом $\sqrt{4\frac{9}{c^4} - 4}$ із центром у точці

$(0, \frac{3}{c^2})$, з яких вилучено точки $(-2, 0)$. Узявши $c = 1, 2, \dots$, дістанемо сім'ю ліній рівня (рис. 5.4).

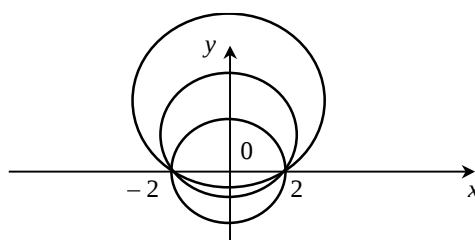


Рис. 4.4

4.1.4. Знаходження області визначення функції двох змінних.

Розглянемо алгоритм знаходження області визначення функції двох змінних на такому прикладі.

Григор Знайти область визначення функції $z = \frac{\ln(x^2 + y^2 - 9)}{\sqrt{9x^2 + y^2}}$ та надати відповідну геометричну інтерпретацію.

1. Запишемо область визначення функції аналітично:

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9, 0.9x \leq y\}.$$

2. Замінивши нерівності в D рівностями, побудуємо лінії, що відповідають їм на координатній площині:

$$x^2 + y^2 = 9; \quad y = 0.9x.$$

3. За допомогою контрольних точок $P_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$ і $P_2(1, 3)$ з'ясуємо розміщення D на площині й виділимо її штриховкою (рис. 5.5).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}^2 + \frac{3}{2}^2 &= \frac{10}{4} < 9 & P_1 \in D; \\ \frac{9}{2} + \frac{9}{2} &= 9 & P_2 \in D. \end{aligned}$$

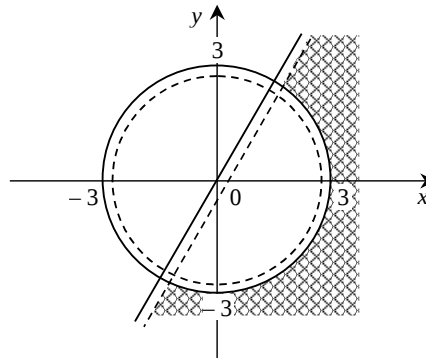


Рис. 4.5

4.1.5. Границя функції двох змінних.

Означення. Число A називається *границею функції* $z = f(x, y)$ при $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке, що в разі виконання нерівності

$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2,$$

справджується нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Позначають:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A, \text{ або } \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A.$$

Наслідок. $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} c = c$ ($c = \text{const}$);

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x = x_0; \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} y = y_0.$$

Теорема 1. Якщо функція $f(x, y)$ має границю при $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, то така границя тільки одна.

Теорема 2. Якщо функція $f(x, y)$ має границю при $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, то вона обмежена в деякому околі точки $f(x_0, y_0)$.

Теорема 3. Якщо $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = b$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y) = c$, і в деякому виколотому околі точки (x_0, y_0) виконується нерівність $f(x, y) > g(x, y)$, то $b > c$.

Наслідок. Якщо $f(x, y) \neq 0$ ($f(x, y) = 0$) у деякому околі точки (x_0, y_0) і $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$

існує, то ця границя невід'ємна (недодатна).

Теорема 4. Якщо $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = b$ і у деякому виколотову δ -околі точки (x_0, y_0) справджуються нерівності $f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$, то і $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y) = b$.

Теорема 5. Якщо $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = b$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y) = c$, то виконуються рівності:

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} [f(x, y) + g(x, y)] = b + c;$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)g(x, y) = bc;$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{b}{c} \quad (c \neq 0).$$

Означення. Якщо $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = 0$, то функція $z = f(x, y)$ називається нескінченно малою при $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$.

 Обчислити $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} \frac{x^2 - 4y^5}{12x - 3y}$.

Розв'язування. Застосувавши теорему про арифметичні операції над границями, а також узявши до уваги те, що границя сталої величини дорівнює цій сталій, тобто

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} x = 1, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} y = 2$$

дістанемо:

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} \frac{x^2 - 4y^5}{12x - 3y} &= \frac{\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} (x^2 - 4y^5)}{\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} (12x - 3y)} \\ &= \frac{\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} x^2 - \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} 4y^5}{\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} 12x - \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} 3y} = \frac{1^2 - 4 \cdot 2^5}{12 \cdot 1 - 3 \cdot 2} = \frac{1 - 128}{12 - 6} = \frac{-127}{6}. \end{aligned}$$

 Обчислити $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 - 2xy)}{\sin 2xy}$.

Розв'язування. Візьмемо $xy = t$. Тоді з того, що $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, випливає $t \rightarrow 0$ і задану границю можна подати у вигляді $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2t)}{\sin 2t}$. При $t \rightarrow 0$ маємо: $\ln(1 - 2t) \sim -2t$, $\sin 2t \sim 2t$. Отже,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2t)}{\sin 2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2t}{2t} = -1.$$

Звідси, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\ln(1 - 2xy)}{\sin 2xy} = -1$.

Зауваження. Поняття границі в точці для функції однієї змінної та функції багатьох змінних мають багато спільного, але існує й принципова різниця, з огляду на яку

поняття границі функції кількох змінних є істотно більш обмеженим, ніж поняття границі функції однієї змінної.

Так, для функції багатьох змінних справджуються теореми про границю суми, добутку та частки, які аналогічні відповідним теоремам для функції однієї змінної.

Водночас маємо такі розбіжності між цими поняттями:

Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ($f(x)$ – функція однієї змінної), то це означає, що і лівостороння і правостороння границі її дорівнюють b . Обернене твердження також правильне: з існування та збігу двох односторонніх границь випливає існування границі функції в точці.

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$ наближення до точки (x_0, y_0) можливе нескінченною кількістю способів: і справа, і зліва, і згори, і знизу, і під деяким кутом до осі x тощо (рис.5.6).

Більш того, до точки можна наближатися не лише по прямій, а й по складніших траєкторіях (рис. 5.7).

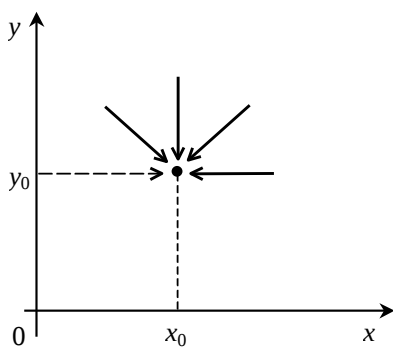


Рис. 4.6

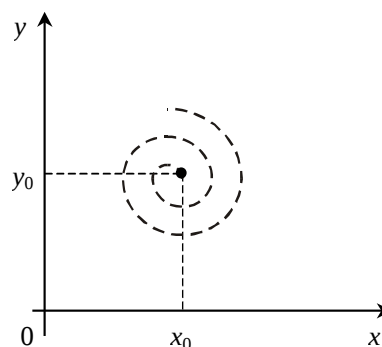


Рис. 4.7

Очевидно, що рівність $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = b$ справджується тоді й тільки тоді, коли границя досягається в результаті наближення до точки (x_0, y_0) по будь-якій траєкторії. Отже, маємо істотне обмеження порівняно зі збігом двох односторонніх границь у разі функції однієї змінної.



Довести, що $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5xy}{x^2 - y^2}$ не існує.

Розв'язування. Наближатимемося до точки $(0, 0)$ по прямій $y = kx$.

Якщо $y = kx$, то

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5xy}{x^2 - y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5xkx}{x^2 - k^2x^2} = \frac{5k}{1 - k^2}.$$

Зауважимо, що значення границі залежить від кутового коефіцієнта прямої, наприклад:

при $k = 1$ границя дорівнює $\frac{5}{2}$,

при $k = 2$ границя дорівнює $\frac{10}{5}$ і т. д.

Отже, наближаючись до точки $(0, 0)$ у різних напрямках, дістаємо різні границі. Це означає, що $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ не існує.

Зауваження. Для функцій $n > 1$ змінних можна розглядати $n!$ так званих «повторних границь».

У частинному випадку для функції двох змінних $z = f(x, y)$ можна розглядати дві повторні границі в точці (x_0, y_0) :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)) \text{ і } \lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)).$$

Наприклад, для функції $z = \frac{2x}{2x + y}$ маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2x}{2x + y} = 1; \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2x + y} = 1.$$

Отже, змінювати порядок граничних переходів загалом не можна.

Скажімо, у попередньому прикладі $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{5xy}{x^2 + y^2}$ не існує, але повторні границі

$$\text{існують: } \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{5xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5xy}{x^2 + y^2} = 0.$$

4.1.6. Неперервність функції двох змінних.

Означення. Функція $z = f(x, y)$ називається неперервною в точці $P_0(x_0, y_0)$, якщо

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Означення. Функція $z = f(x, y)$ називається неперервною в області (замкненій чи відкритій), якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Означення. Функцію $z = f(x, y)$, визначену на множині $D \subset R^2$, називають неперервною за множиною $E \subset D$ в точці $(x_0, y_0) \in E$, якщо

$$\lim_{\substack{x, y \rightarrow x_0, y_0 \\ (x, y) \in D}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Означення. Точка x_0, y_0 називається точкою розриву функції $z = f(x, y)$, якщо:

- 1) функція $z = f(x, y)$ не визначена в точці x_0, y_0 ;
- 2) функція $z = f(x, y)$ визначена в точці x_0, y_0 , проте:

$$\text{а) } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \text{ не існує;}$$

$$\text{б) } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \text{ існує, але не дорівнює } f(x_0, y_0).$$

Означення. Точка x_0, y_0 називається *точкою усувного розриву* функції $f(x, y)$, якщо $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ існує, але або $f(x, y)$ не визначена в точці x_0, y_0 , або $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$.



Розглянемо функцію двох незалежних змінних

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x^2 + y^2 \neq 0); \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ця функція має розрив у точці $(0,0)$, бо в ній для функції $f(x, y)$ границі не існує.

Тут ми стикаємося з цікавим явищем: розглядувана функція не є неперервною в точці $(0,0)$ за двома змінними водночас, але є неперервною за кожною зі змінних x і y окремо.



Точки розриву можуть бути не лише ізольованими, як у попередньому прикладі, а можуть заповнювати лінії, поверхні тощо. Так, функції двох

змінних $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 4}$ мають розриви: перша – прямі $y = x$, друга – окіл $x^2 + y^2 = 4$. Для функції трьох змінних

$$f(x, y, z) = \frac{x - y + z}{xyz}, \quad f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

розриви заповнюють відповідно гіперболічний параболоїд $z = xy$ і конус $z^2 = x^2 + y^2$.



Знайти $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 y}{x^4 + y^4}$.

Розв'язування. Для будь-якого $\epsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке що для всіх точок (x, y) , які задовольняють умову $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ і відмінні від початку координат, справджується нерівність

$$\left| \frac{x^4 y}{x^4 + y^4} \right| \leq \frac{x^4}{x^4 + y^4} |y| \leq |y| \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отже,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 y}{x^4 + y^4} = 0.$$



Знайти границю функції $f(x, y) = y \sin \frac{1}{y - x}$ в точці $(0,0)$ за множиною, на якій функція визначена.

Розв'язування. Зауважимо, що функція не визначена в точках прямої $y = x$. Тому звичайної границі в точці $(0,0)$ не існує. Але границя за множиною точок $D = \{(x, y) \mid x \neq y\}$, на якій функція визначена, існує і дорівнює нулю, оскільки

$$\left| y \sin \frac{1}{y - x} \right| \leq |y|.$$



Знайти значення a , при якому функція $z = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, якщо $x^2 + y^2 = 0$; в
 a , якщо $x^2 + y^2 = 0$

точці $(0,0)$:

- 1) є неперервною за прямою $x = t, y = t, t^2 + t^2 = 0$;
- 2) неперервною за кривою $y = x^2$;
- 3) неперервною.

Розв'язування. 1. Наближатимемося до точки $(0,0)$ по прямій $x = t, y = t, t^2 + t^2 = 0$. Це означає, що виконуються рівності:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 t}{t^4 + t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} t = 0.$$

Якщо $a = 0$, то дана функція буде неперервною за даною прямою.

2. Наближатимемося до точки $(0,0)$ по кривій $y = x^2$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Якщо $a = \frac{1}{2}$, то розглядувана функція буде неперервною за даною прямою.

3. У точці $(0,0)$ функція $\frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ має розрив, оскільки в ній границя не існує. Це

впливає з 1 і 2.



Знайти точки розриву, а також точки усувного розриву функції двох змінних:

- 1) $z = \frac{x^5}{x^4 + y^4}$;
- 2) $z = \frac{1}{\cos^2 x + \cos^2 y}$.

Розв'язування. 1. Функція $z = \frac{x^5}{x^4 + y^4}$ в точці $(0,0)$ не існує, тому вона має в цій точці розрив. Знайдемо границю $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^5}{x^4 + y^4}$.

Для будь-якого $\epsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке що для всіх точок x, y , які задовольняють умову $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ і відмінні від початку координат, виконується нерівність

$$\left| \frac{x^5}{x^4 + y^4} \right| \leq \frac{x^4}{x^4 + y^4} |x| \leq |x| \sqrt{x^2 + y^2} < \delta^2.$$

Отже, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^5}{x^4 + y^4} = 0$ і функція має в точці $(0,0)$ усувний розрив, якщо $z = 0$ у цій

точці.

2. Функція $z = \frac{1}{\cos^2 x - \cos^2 y}$ не існує, якщо $\cos^2 x - \cos^2 y = 0$, тобто $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Тому вона має розриви. Знайдемо границю $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y \rightarrow \frac{\pi}{2} + n\pi}} \frac{1}{\cos^2 x - \cos^2 y}$.

Отже, функція $\frac{1}{\cos^2 x - \cos^2 y}$ має в точці $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ неусувний розрив.

4.1.7. Неперервність складеної (складної) функції двох змінних.

Означення. Нехай функція $z = f(u, v)$ визначена на множині E , а змінні u і v , у свою чергу, залежать від змінних x і y : $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, причому обидві функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ визначені на множині D . Якщо для будь-якого $(x, y) \in D$ існує значення $(u, v) \in E$ (рис. 5.8), то говорять, що на множині визначено складену (складну) функцію $z = f(u, v)$, де $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$; u, v – проміжні, x, y – незалежні змінні.

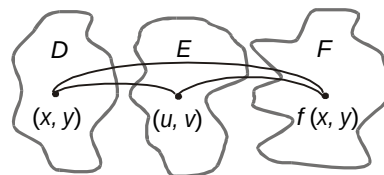


Рис. 4.8

Приклад. Функція $z = u^3 - v^3$, де $u = \sin^2 x - y^2$, $v = \cos^4 x^2 - y^2$. Це складена функція, яка визначена на координатній площині. Її можна записати у вигляді

$$z = \sin^6 x - y^2 - \cos^{12} x^2 - y^2.$$

Теорема. Нехай на множині D визначено складену функцію $z = f(u, v)$, де $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ і нехай функції $u(x, y)$, $v(x, y)$ неперервні в точці $(x_0, y_0) \in D$, а функція $f(u, v)$ неперервна в точці (u_0, v_0) , де $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. Тоді складена функція $z = f(u(x, y), v(x, y))$ неперервна в точці (x_0, y_0) .

Доведення. За умовою теореми функція $z = f(u, v)$ неперервна. За означенням неперервності функції в точці (u_0, v_0) візьмемо довільне число $\epsilon > 0$, тоді існує таке $\delta > 0$, що з нерівності

$$\sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} < \delta \quad (4.3)$$

випливає нерівність

$$|f(u, v) - f(u_0, v_0)| < \epsilon.$$

Аналогічно, функції $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$ за умовою теореми неперервності, тому існують такі $\delta_1 > 0$ і $\delta_2 > 0$, що з нерівностей

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_1 \quad \text{і} \quad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_2$$

випливають нерівності

$$|u(x, y) - u(x_0, y_0)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}. \quad (4.4)$$

$$|v(x, y) - v(x_0, y_0)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}. \quad (4.5)$$

Нехай $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тоді з нерівності

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta, \quad (4.6)$$

дістанемо нерівності (4.4) і (4.5).

З урахуванням нерівностей (4.4) і (4.5) для нерівності (4.3) запишемо:

$$\sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}} = \epsilon.$$

Отже, якщо виконується нерівність (5.6), маємо

$$|f(u(x, y), v(x, y)) - f(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))| < \epsilon,$$

а це означає, що складена функція $z = f(u(x, y), v(x, y))$ неперервна в точці (x_0, y_0) .

4.1.8. Властивості неперервної функції двох змінних.

Теорема. Якщо функція неперервна в точці, то вона обмежена деяким оточенням цієї точки.

Теорема. Якщо функції $f(x, y)$ та $g(x, y)$ неперервні в точці x_0, y_0 , то в цій точці будуть неперервними функції:

- 1) $f(x, y) \pm g(x, y)$;
- 2) $f(x, y) \cdot g(x, y)$;
- 3) $f(x, y) / g(x, y)$ при $g(x_0, y_0) \neq 0$.

Теорема. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна на замкненій множині, то вона обмежена на цій множині.

Теорема (про нуль неперервної функції). Нехай функція $f(x, y)$ неперервна на зв'язній множині D і набуває у двох точках A і B цієї множини значень різних знаків. Тоді у множині D знайдеться така точка, що в ній функція перетворюється на нуль.

Доведення. Побудуємо на зведенні до випадку функції однієї незалежної змінної.

Оскільки область D зв'язна, точки M_0 та M_1 можна сполучити ламаною, усі точки якої лежать у D . Якщо поступово перебирати вершини ламаної, то або з'ясується, що в деякій із них функція перетворюється на нуль — і тоді теорему доведено, або цього не буде. В останньому випадку знайдеться така ланка ламаної, на кінцях якої функція

набуває значень різних знаків. Замінивши позначення точок, вважатимемо, що M_0 і M_1 саме і є кінцями цієї ланки. Її рівняння мають вигляд:

$$\begin{matrix} x & x_0 & t(x_1 - x_0), & y & y_0 & t(y_1 - y_0). \\ & & (0 \leq t \leq 1) \end{matrix}$$

Якщо точка $M(x, y)$ рухається вздовж цієї сторони, то початкова функція $f(x, y)$ перетворюється на складену функцію однієї змінної t :

$$F(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0)) \quad (0 \leq t \leq 1),$$

очевидно, неперервну за теоремою 1.6 з огляду на неперервність як функції $f(x, y)$, так і лінійних функцій від t , підставлених замість її аргументів. Але для $F(t)$ маємо:

$$F(0) = f(x_0, y_0) = 0, \quad F(1) = f(x_1, y_1) = 0.$$

Застосовуючи до функції $F(t)$ однієї змінної доведену для одновимірного випадку аналогічну теорему маємо, що $F(t) = 0$ при деякому значенні t між 0 та 1. Тоді згідно з означенням функції $F(t)$ можемо записати:

$$f(x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0)) = 0.$$

Точка $M(x, y)$, де $x = x_0 + t(x_1 - x_0)$, $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$, і є шуканою.

Теорема (про проміжне, або середнє значення). Нехай функція $f(x, y)$ неперервна на зв'язній множині D й у двох будь-яких точках A та B цієї множини набуває нерівних значень $f(A)$ і $f(B)$. Тоді на цій множині вона набуває деякого значення M , яке лежить між $f(A)$ і $f(B)$, тобто існує така точка $(x_0, y_0) \in D$, що $f(x_0, y_0) = M$.

Доведення аналогічне доведенню теореми Коші для функції однієї змінної.

4.1.9. Рівномірна неперервність.

Нагадаємо, що неперервність функції $f(x, y)$ у певній точці (x_0, y_0) множини M , де функцію задано, ми сформулювали так: для будь-якого $\epsilon > 0$ має існувати таке $\delta > 0$, що нерівність

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$$

виконується для будь-якої точки $(x, y) \in M$, яка перебуває в δ -околі точки (x_0, y_0) :

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в усій множині M . Тоді постає запитання: чи можна за даним $\epsilon > 0$ знайти таке $\delta > 0$, яке годилося б – у зазначеному розумінні – для всіх точок $(x_0, y_0) \in M$ одночасно? Якщо це можливо (при будь-якому ϵ), тоді говорять, що функція $f(x, y)$ в M *рівномірно неперервна*.

Теорема. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D , то вона й рівномірно неперервна в D .

Доведення (від супротивного). Припустимо, що для деякого числа $\epsilon > 0$ не існує числа $\delta > 0$, яке годилося б одночасно для всіх точок $(x_0, y_0) \in D$.

Візьмемо послідовність додатних чисел, що прямує до нуля:

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, \dots, 0, \quad \epsilon_n > 0.$$

Оскільки жодне з чисел ϵ_n не може годитися – у зазначеному розумінні – одночасно для всіх точок (x_0, y_0) області D , то для кожного ϵ_n знайдеться в D така конкретна точка (x_n, y_n) , для якої ϵ_n не годиться. Це означає, що в D існує точка (x_n, y_n) , така, що виконуються нерівності

$$|x_n - x_0| < \epsilon_n, \quad |y_n - y_0| < \epsilon_n,$$

а, водночас, і нерівність

$$|f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0)| > \epsilon_n. \quad (4.7)$$

З обмеженої послідовності точок (x_n, y_n) , за теоремою Больцано-Вейєрштрасса, вилучимо таку частинну послідовність $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$, що $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$, $y_{n_k} \rightarrow \bar{y}$, причому гранична точка $(\bar{x}, \bar{y})$ обов'язково належить області D (згідно з її замкненістю).

Далі дістаємо:

$$|x_{n_k} - x_{n_k}| < \epsilon_{n_k}, \quad |y_{n_k} - y_{n_k}| < \epsilon_{n_k};$$

причому зі зростанням k маємо: $\epsilon_{n_k} \rightarrow 0$ і $\epsilon_{n_k} \rightarrow 0$. Тому

$$x_{n_k} - x_{n_k} \rightarrow 0, \quad y_{n_k} - y_{n_k} \rightarrow 0,$$

а, отже,

$$x_{n_k} \rightarrow \bar{x}, \quad y_{n_k} \rightarrow \bar{y}.$$

З огляду на неперервність функції $f(x, y)$ в точці $(\bar{x}, \bar{y})$, що належить області D , мають одночасно виконуватися такі співвідношення:

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}),$$

звідки

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) - f(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow 0,$$

а це суперечить нерівності (5.7).

4.2. Диференційовність функції двох змінних.

4.2.1. Частинні та повні прирости функції двох змінних.

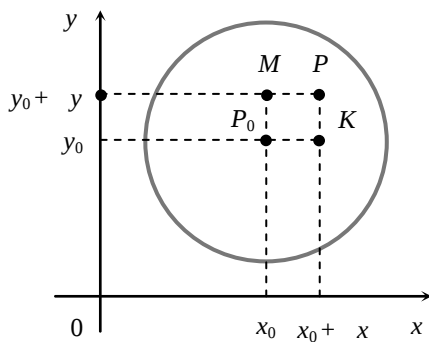


Рис. 4.9

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0, y_0)$. Надамо незалежним змінним x та y приростів Δx і Δy так, щоб точка $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ не виходила за межі зазначеного околу. Тоді й точки $K(x_0 + \Delta x, y_0)$, $M(x_0, y_0 + \Delta y)$ та $N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ також потраплять у цей окіл (рис. 4.9).

Означення. Різницю $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ називають повним приростом функції за x та y при переході від точки (x_0, y_0) до точки $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ і позначають Δz . Різницю $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ називають частинним приростом за x функції $z = f(x, y)$, а різницю $f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ – частинним приростом за y цієї функції. Позначають ці прирости відповідно $\Delta_x z$ і $\Delta_y z$. Отже,

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0);$$

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0);$$

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Зауваження. Аналогічно визначаються прирости функції більш ніж двох змінних.

4.2.2. Частинні похідні двох змінних.

Нехай функція $z = f(x, y)$ задана в деякому околі точки (x_0, y_0) .

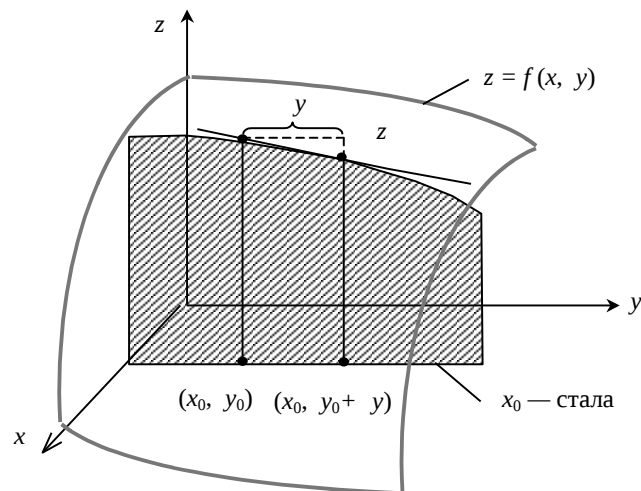


Рис. 4.10

Означення. Якщо існують скінченні границі

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x};$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

то їх називають *частинними похідними* функції $z = f(x, y)$ у точці x_0, y_0 відповідно за змінними x і y та позначають: $\frac{f(x_0, y_0)}{x}$, $\frac{f(x_0, y_0)}{y}$ або $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ або $D_x f$, $D_y f$. (Символ « ∇ » - так зване «де» кругле - вперше застосував Якобі).

4.2.3. Повний диференціал функції двох змінних.

Означення. Функція $z = f(x, y)$ називається *диференційовною* в точці x_0, y_0 , якщо її повний приріст Δz можна подати у вигляді:

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + o(\rho),$$

де A, B - деякі числа; $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ - нескінченно малі при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$. Головна лінійна частина приросту функції, тобто $A \Delta x + B \Delta y$, називається *повним диференціалом функції* (точніше - *першим диференціалом*) $z = f(x, y)$ у точці x_0, y_0 ; позначається $df(x_0, y_0)$ або dz . Таким чином,

$$dz = A \Delta x + B \Delta y. \quad (4.8)$$

Диференціалом незалежної змінної x або y називають її приріст, тобто за означенням беруть $dx = \Delta x, dy = \Delta y$.

Якщо функція f диференційовна в кожній точці множини $D \subset \mathbb{R}^2$, то її називають *диференційовною на множині D* .

Отже, у кожній точці, де виконується рівність (4.2.1), повний диференціал функції $z = f(x, y)$ обчислюється за формулою

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (4.9)$$

Теорема. Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці x_0, y_0 і $dz = A dx + B dy$, то в точці x_0, y_0 існують частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = A, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = B.$$

Доведення. За означенням диференційовної функції $z = f(x, y)$ маємо:

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + o(\rho). \quad (4.10)$$

Узявши у (4.10) $\Delta y = 0, \Delta x = \Delta x$, дістанемо $\Delta z = A \Delta x + o(\Delta x)$:

$$\Delta z = \frac{\Delta z}{\Delta x} \Delta x = A \Delta x + o(\Delta x).$$

Звідси

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Якщо частинні похідні функції f існують у кожній точці множини $D \subset \mathbb{R}^2$, то говорять, що *функція f має частинні похідні на множині D* .

Аналогічно визначають і позначають частинні похідні трьох і більше змінних.

4.2.4. Частинні похідні та повний диференціал функції n -змінних.

Означення. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + x_k, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{x_k},$$

то її називають *частинною похідною функції f у точці $x_1, x_2, \dots, x_n$ за змінною x_k* і позначають $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ або $f_{x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Похідні $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, називають *похідними першого порядку*.

Правило знаходження частинних похідних першого порядку.

Для обчислення частинної похідної $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ звичайно користуються відомими формулами і правилами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи всі змінні, крім x_k , сталими.



Знайти частинні похідні функції $z = x^3 \ln 2x y^2$.

Розв'язування. Функція визначена в області $y^2 > 2x$. Вважаючи, що y устале, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \cdot \frac{1}{2x} y^2 = \frac{y^2}{2x}.$$

Вважаючи, що x устале, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y - \frac{1}{2x} y^2 = 3x^2 y - \frac{y^2}{2x}.$$



Знайти частинні похідні функції $u = x^2 y \sin ax + by + cz + \operatorname{tg} z$.

Розв'язування. Вважаючи, що $y = \operatorname{const}$, $z = \operatorname{const}$, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy \cos ax + by + cz + a.$$

Вважаючи, що $x = \operatorname{const}$, $z = \operatorname{const}$, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \cos ax + by + cz + b.$$

Вважаючи, що $x = \operatorname{const}$, $y = \operatorname{const}$, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \cos ax + by + cz + c \cdot \frac{1}{\cos^2 z}.$$

Геометрична інтерпретація частинних похідних.

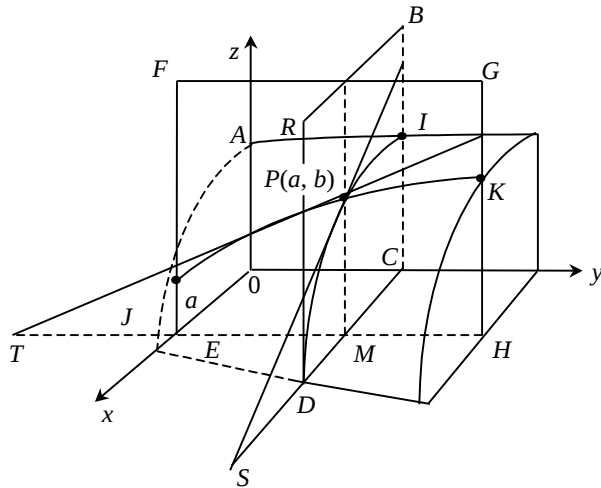


Рис. 4.11

Проведемо площину $EFGH$ через точку $P(a, b)$ даної поверхні паралельно площині yOz . Рівняння цієї площини

$$x = a.$$

Отже, рівняння кривої, утвореної в перерізі JPk , буде

$$z = f(a, y),$$

якщо EF розглядати як вісь z , а EH - як вісь y . У цій площині $\frac{f(x, y)}{y}$ означає те саме, що

$$\frac{z}{y}, \text{ а тому } \frac{z}{y} = \operatorname{tg} \angle MTP.$$

Отже, **частинна похідна $\frac{z}{y}$ дорівнює тангенсу кута нахилу до осі y , дотичної до перерізу JK у точці P .**

Аналогічно, якщо провести площину BCD через P паралельно площині xOz , її рівняння буде

$$y = b,$$

і в площині перерізу DPI частинна похідна $\frac{f(x, y)}{x}$ означатиме те саме, що й $\frac{z}{x}$. Звідси

$$\frac{z}{x} = \operatorname{tg} \angle MSP.$$

Отже, **частинна похідна $\frac{z}{x}$ дорівнює тангенсу кута нахилу до осі x , дотичної до перерізу DJ в точці P .**

Для **повного диференціала** формула (5.2.2) узагальнюється на випадок диференційовної функції n змінних $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n. \quad (4.11)$$



Знайти df , якщо $f(x, y) = \frac{z}{x^3 y^3}$.

Розв'язування. Знайдемо спочатку $\frac{f}{x}, \frac{f}{y}, \frac{f}{z}$:

$$\frac{f}{x} = 1 - z = \frac{1}{x^3 y^3} - 3x^2;$$

$$\frac{f}{y} = z = \frac{1}{x^3 y^3} - 3y^2;$$

$$\frac{f}{z} = \frac{1}{x^3 y^3}.$$

Звідси дістанемо:

$$dx = 1 - \frac{3x^2 z}{x^3 y^3} dx = \frac{3y^2 z}{x^3 y^3} dy = \frac{1}{x^3 y^3} dz.$$

Властивості повного диференціала.

Для будь-яких диференційовних функцій $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v = v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ справджуються рівності:

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \text{ де } u, v - \text{сталі}; \quad (4.12)$$

$$d(uv) = vdu + u dv;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

Властивість інваріантності форми повного диференціала: Формула (4.11) виконується не лише тоді, коли x та y - незалежні змінні, а й тоді, коли x і y є диференційовними функціями будь-яких змінних.

4.2.5. Достатня умова диференційовності функції двох змінних у точці.

Для функції однієї змінної диференційовність та існування похідної є рівносильними твердженнями. У разі функції багатьох змінних маємо інше: існування частинних похідних - необхідна, але не достатня умова диференційовності функції в точці. Наприклад, для функції

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

у точці $(0, 0)$ маємо: $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Проте ця функція розривна в точці $(0, 0)$, а тому

вона не може бути диференційовною в цій точці. Отже, для диференційовності функції $z = f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) не достатньо самого лише існування частинних похідних. Для диференційовності доводиться додатково вимагати неперервності частинних похідних, як це впливає з поданої далі теореми.

Теорема. Якщо функція $z = f(x, y)$ у деякому околі точки x_0, y_0 має неперервні частинні похідні, то вона диференційовна в цій точці.

Доведення. Розглянемо в координатній площині xOy точки $P(x_0, y_0)$, $Q(x_0 + \Delta x, y_0)$ і $R(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ (рис. 4.12).

Нехай частинні похідні визначені в деякому околі точки P і точка R належить даному околу. Оскільки Δ -окол точки P - це круг радіусом Δ із центром у точці P , то відрізки PQ і QR цілком належать цьому околу. Отже, функція $f(x, y)$ визначена на відрізках PQ і QR .

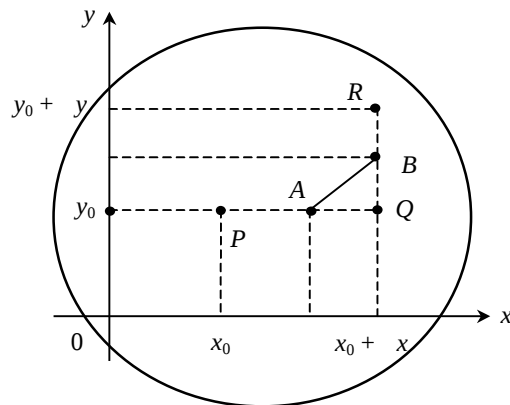


Рис. 4.12

Подамо повний приріст функції $z = f(x, y)$ у точці x_0, y_0 у вигляді

$$z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) + f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0). \quad (4.13)$$

На відрізку PQ змінна y має сталі значення $y = y_0$, тому функція $f(x, y)$ на цьому відрізку є функцією однієї змінної x . Застосовуючи формулу Лагранжа про середнє значення, дістаємо:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, y_0) \Delta x \quad (4.14)$$

для деякого значення ξ з інтервалу $x_0, x_0 + \Delta x$. Аналогічно, на відрізку QR функція $f(x, y)$ залежить лише від y . Тому на проміжку $y_0, y_0 + \Delta y$ знайдеться точка η , для якої

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = f_y(x_0 + \Delta x, \eta) \Delta y \quad (4.15)$$

Згідно з (4.14) і (4.15) запишемо формулу (6.13) у вигляді:

$$z = f_x(\xi, y_0) \Delta x + f_y(x_0 + \Delta x, \eta) \Delta y.$$

Звідси

$$z = f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + \Delta x \Delta y \left(\frac{f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0)}{\Delta x} + \frac{f_y(x_0 + \Delta x, \eta) - f_y(x_0, y_0)}{\Delta y} \right),$$

де $f_x(\xi, y_0) = f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0 + \Delta x, \eta) = f_y(x_0, y_0)$.

Очевидно, що при $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$ точки A і B прямують до точки P . Частинні похідні неперервні, тому $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, коли $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$.

Разом з та прямує до нуля і величина

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{y^2}.$$

Тому з рівності

$$z \, dz = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{y}{y^2} \sqrt{x^2 + y^2} \, dz$$

впливає диференційовність функції $z = f(x, y)$ у точці x_0, y_0 .

4.2.6. Диференціювання складеної функції.

Теорема. Нехай на множині D визначено складену функцію $z = f(u, v)$, де $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, і нехай функції $u(x, y)$, $v(x, y)$ мають у деякому околі точки $x_0, y_0 \in D$ неперервні частинні похідні, а функція $f(u, v)$ має неперервні частинні похідні в деякому околі точки u_0, v_0 , де $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. Тоді складена функція $z = f(u(x, y), v(x, y))$ диференційовна в точці x_0, y_0 , причому

$$\frac{z}{x} = \frac{z}{u} \frac{u}{x} + \frac{z}{v} \frac{v}{x}; \quad (4.16)$$

$$\frac{z}{y} = \frac{z}{u} \frac{u}{y} + \frac{z}{v} \frac{v}{y}. \quad (4.17)$$

Доведення. За умовою теореми функції $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$ мають неперервні частинні похідні в деякому околі точки x_0, y_0 . Тому за теоремою вони диференційовні в точці x_0, y_0 :

$$u = \frac{u}{x} \Delta x + \frac{u}{y} \Delta y + o_1(\Delta x, \Delta y),$$

$$v = \frac{v}{x} \Delta x + \frac{v}{y} \Delta y + o_2(\Delta x, \Delta y),$$

де $o_1, o_2 \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$.

Надавши приріст лише аргументу x , дістанемо

$$\begin{aligned} \Delta_x u &= \frac{u}{x} \Delta x + o_1(\Delta x), \\ \Delta_x v &= \frac{v}{x} \Delta x + o_2(\Delta x), \end{aligned} \quad (4.18)$$

де $o_1, o_2 \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Знайдемо приріст функції $z = f(x, y)$ за x . За умовою теореми функція $z = f(u, v)$ має неперервні частинні похідні в деякому околі точки u_0, v_0 , а тому вона диференційовна в цій точці:

$$\Delta_x z = \frac{z}{u} \Delta_x u + \frac{z}{v} \Delta_x v + o(\Delta_x u, \Delta_x v). \quad (4.19)$$

Підставляючи у (4.19) рівності (4.18), дістаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{z}{u} \frac{u}{x} \frac{x}{1} \frac{z}{v} \frac{v}{x} \frac{x}{2} \frac{u}{x} \frac{x}{1} \frac{x}{1} \\ & \frac{v}{x} \frac{x}{2} \frac{z}{u} \frac{u}{x} \frac{z}{v} \frac{v}{x} \frac{x}{1} \frac{x}{1}, \end{aligned}$$

де

$$\frac{z}{u} \frac{1}{1} \frac{z}{v} \frac{1}{2} \frac{u}{x} \frac{1}{1} \frac{v}{x} \frac{1}{2} =$$

нескінченно мала величина при $x \rightarrow 0$.

Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{z}{u} \frac{u}{x} \frac{z}{v} \frac{v}{x}.$$

Диференційовність функції $z = f(u, v)$ впливає з неперервності частинних похідних $\frac{z}{u}$ і $\frac{z}{v}$.



Знайти f_x і f_y для функції $f(u, v)$, якщо $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

Розв'язування. За формулами (4.16) і (4.17) маємо:

$$\begin{aligned} f_x &= f_u u_x + f_v v_x = f_u xy_x + f_v \frac{x}{y}_x = f_u y + f_v \frac{1}{y}; \\ f_y &= f_u u_y + f_v v_y = f_u xy_y + f_v \frac{x}{y}_y = f_u x + f_v x \frac{1}{y^2}. \end{aligned}$$



Знайти повний диференціал функції $f(u, v)$, якщо $u = y/x$, $v = x^2 + y^2$.

Розв'язування. Дістаємо:

$$\begin{aligned} d &= f_u du + f_v dv = f_u d \frac{y}{x} + f_v d(x^2 + y^2) = f_u \frac{x dy - y dx}{x^2} + f_v (2x dx + 2y dy) \\ &= f_u \frac{xdy - ydx}{x^2} + f_v (2x dx + 2y dy). \end{aligned}$$

4.2.7. Похідна за напрямом. Градієнт.

Означення. Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0, y_0)$; l - деякий промінь з початком у точці (x_0, y_0) ; $P(x, y)$ - точка на цьому промені, яка належить околу точки (x_0, y_0) (рис. 5.13); l - довжина відрізка P_0P . Якщо існує $\lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{l}$, то ця границя називається похідною функції $z = f(x, y)$ за напрямом l у точці $P_0(x_0, y_0)$ і позначається $\frac{z}{l}$.

Зокрема, $\frac{z}{x}$ - похідна функції $z = f(x, y)$ за додатним напрямом осі x , а $\frac{z}{y}$ - похідна функції $z = f(x, y)$ за додатним напрямом осі y .

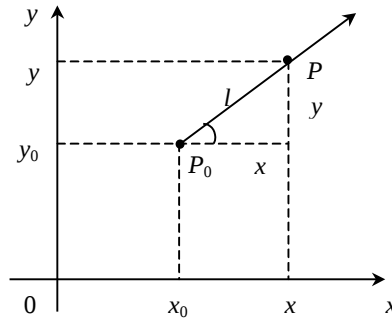


Рис. 4.13

Похідна за напрямом $\frac{z}{l}$ характеризує швидкість зміни функції $z = f(x, y)$ у точці $P_0(x_0, y_0)$ за напрямом l .

Теорема. Якщо функція $z = f(x, y)$ має в точці $P_0(x_0, y_0)$ неперервні частинні похідні, то в цій точці існує похідна $\frac{z}{l}$ за будь-яким напрямом $l = \cos \alpha_1, \cos \alpha_2$, причому

$$\frac{z}{l} = \frac{z}{x} \cos \alpha_1 + \frac{z}{y} \cos \alpha_2, \quad (4.20)$$

де $\frac{z}{x}$ і $\frac{z}{y}$ - значення частинних похідних у точці $P_0(x_0, y_0)$.

Доведення. За умовою теореми функція $z = f(x, y)$ має в точці x_0, y_0 неперервні частинні похідні, тому вона диференційовна в цій точці:

$$z - \frac{z}{x} \Delta x - \frac{z}{y} \Delta y = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}),$$

де $\Delta x, \Delta y$ - нескінченно малі величини при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$. Тоді

$$\frac{z}{l} = \frac{z}{x} \frac{\Delta x}{l} + \frac{z}{y} \frac{\Delta y}{l} + o\left(\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{l}\right).$$

Із трикутника P_0PK (рис. 4.13) маємо:

$$\frac{\Delta x}{l} = \cos \alpha_1, \quad \frac{\Delta y}{l} = \sin \alpha_1 = \cos \alpha_2.$$

Звідси

$$\frac{z}{l} = \frac{z}{x} \cos \alpha_1 + \frac{z}{y} \cos \alpha_2 + o(1).$$

Якщо $l \rightarrow 0$, то $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$, а отже $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0$. Звідси

$$\frac{z}{l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{l} = \frac{z}{x} \cos \alpha_1 + \frac{z}{y} \cos \alpha_2.$$



Знайти похідну функції $u = x \sin x - y$ у точці $M(1, 1)$ за напрямом

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Розв'язування. Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці $(1, 1)$ функції $u = x \sin x - y$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{u}{x} \right|_{1,1} &= \sin x - y - x \cos x - y \Big|_{1,1} = \sin 2 - \cos 2; \\ \left. \frac{u}{y} \right|_{1,1} &= x \cos x - y \Big|_{1,1} = \cos 2. \end{aligned}$$

Тоді за формулою (5.2.13) маємо:

$$\frac{z}{l} = \sin 2 - \cos 2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin 2}{\sqrt{2}}.$$

Означення. Вектор з координатами $\left. \frac{z}{x} \right|_{P_0}, \left. \frac{z}{y} \right|_{P_0}$, який характеризує напрям максимального зростання функції $z = f(x, y)$ в точці $P_0(x_0, y_0)$, називається *градієнтом функції* $z = f(x, y)$ у цій точці і позначається **grad z**:

$$\text{grad } z = \left. \frac{z}{x} \right|_{P_0} i + \left. \frac{z}{y} \right|_{P_0} j, \quad (4.21)$$

де i, j - одиничні орти.



Знайти градієнт функції $f = ux^y$ у точці $M(2, 1)$.

Розв'язування. Запишемо та обчислимо частинні похідні в точці $M(2, 1)$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{f}{x} \right|_M &= y u x^{y-1} \Big|_M = 2^0 = 1; \\ \left. \frac{f}{y} \right|_M &= x^y - y x^y \ln x \Big|_M = 2 - 2 \ln 2. \end{aligned}$$

Тоді згідно з (5.2.14) $\text{grad } f = 1i + (2 - 2 \ln 2)j$, або $\text{grad } f = (1, 2 - 2 \ln 2)$.

Аналогічно для диференційовної функції $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у точці $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ похідна за напрямом довільного одиничного вектора $l = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_n)$, $\sum_{k=1}^n \cos^2 \alpha_k = 1$ подається так:

$$\frac{f}{l} = \sum_{k=1}^n \left. \frac{f}{x_k} \right|_{P_0} \cos \alpha_k.$$

Означення. Градієнтом диференційовної функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у точці $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ називають вектор $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_{P_0}$, де i_k - одиничні орти, а значення частинних похідних $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ обчислені в точці $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$.

Властивості:

1. $\frac{\partial}{\partial l} \text{grad } f = \text{grad } f \cdot l$.
2. $\max_l \frac{\partial f}{\partial l} = |\text{grad } f|$.
3. Якщо $\text{grad } f = 0$, то похідна $\frac{\partial f}{\partial l}$ досягає найбільшого значення при $l = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$.

4.2.8. Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків.

Нехай функція $z = f(x, y)$ має частинні похідні в усіх точках множини D . Візьмемо будь-яку точку $(x, y) \in D$. Якщо в цій точці існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, то вони залежать від x і y , тобто вони є функціями двох змінних. Отже, можна ставити питання про відшукання їх частинних похідних. Якщо вони існують, їх називають *частинними похідними другого порядку* і позначають відповідно $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (читаємо: «де два зет по де ікс квадрат») або z_{xx} , $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ або z_{yy} , $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ або z_{xy} , $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ або z_{yx} . Аналогічно визначаються і позначаються частинні похідні третього і вищих порядків.

Нехай функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в околі точки $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ має частинну похідну першого порядку $\frac{\partial u}{\partial x_k}$.

Означення. Частинну похідну функції $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ за змінною x_l називають *частинною похідною другого порядку за змінними x_l і x_k* і позначають $\frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k}$ або $f_{x_l x_k}$.

Отже, за означенням:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right).$$

Якщо $l = k$, похідну $\frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2}$ позначають $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$.

Означення. Частинною похідною порядку m називають частинну похідну першого порядку за будь-якою змінною від будь-якої похідної $(m-1)$ -го порядку.

Частинні похідні за різними змінними називають *мішаними частинними похідними*.

Теорема. Якщо дві мішані похідні порядку m , що відрізняються лише порядком диференціювання, неперервні в деякій точці, то їх значення в цій точці збігаються.

 Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, якщо $z = x^3 y^4$.

Розв'язування. Маємо: $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x}$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} 3x^2 y^4 = \frac{\partial}{\partial y} 12x^2 y^3 = 36x^2 y^2.$$

 Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = \cos x^2 y^2$.

Розв'язування. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x \sin x^2 y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy \cos x^2 y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x \sin x^2 y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4xy \cos x^2 y^2$$

Означення. Диференціалом другого порядку функції $z = f(x, y)$ називається диференціал її повного диференціала:

$$d^2 z = d(dz).$$

Аналогічно визначаються диференціали третього і вищих порядків:

$$d^3 z = d(d^2 z),$$

$$d^m z = d(d^{m-1} z).$$

Для диференціала порядку m справджується залежність:

$$d^m u = \sum_{k=1}^m C_m^k \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-k} \partial y^k} dx^{m-k} dy^k. \quad (4.22)$$

У частинному випадку при $m = 2$ формула (4.22) набирає вигляду:

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2. \quad (4.23)$$

Зауваження. Для складеної функції $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, другий її диференціал, загалом, не подається через dx і dy згідно з формулою (4.23). Отже, для порядку $m = 2$ не виконується властивість інваріантності форми диференціала щодо вибору змінних.

У разі функції n змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ формула (4.22) набирає вигляду:

$$d^m u = \sum_{i_1, \dots, i_m} C_m^{i_1, \dots, i_m} \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_m}, \quad \text{де } C_m^{i_1, \dots, i_m} = \frac{m!}{i_1! i_2! \dots i_m!}, \quad (4.24)$$

де підсумовування виконується за всіма цілими невід'ємними i_k , такими що $\sum_{k=1}^m i_k = m$.

При $m = 2$ формула (4.24) подається так:

$$d^2 u = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} dx_k^2 + 2 \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k.$$

 Знайти $d^2 z$, якщо $z = \cos x \operatorname{tg} y$.

Розв'язування. $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin x \operatorname{tg} y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos x \frac{1}{\cos^2 y}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \cos x \operatorname{tg} y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin x \frac{1}{\cos^2 y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \cos x \frac{2 \sin y}{\cos^3 y}.$$

Згідно з (4.2.16) маємо:

$$d^2 z = \cos x \operatorname{tg} y dx^2 + 2 \sin x \frac{1}{\cos^2 y} dx dy + \frac{2 \cos x \sin y}{\cos^3 y} dy^2.$$

4.2.9. Диференціювання неявної функції.

I. Функція двох змінних. Функція $f(x, y) = 0$ визначає одну зі змінних x або y як неявну функцію іншої змінної. Поданий вираз - це деяке рівняння, що містить x та y і всі члени якого перенесені в ліву частину. Нехай $u = f(x, y)$. Тоді $\frac{du}{dx} = \frac{f}{x} = \frac{f}{y} \frac{dy}{dx}$. Проте

оскільки $f(x, y) = 0$, то $u = 0$ і $\frac{du}{dx} = 0$. Звідси

$$\frac{f}{dx} - \frac{f}{y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (4.25)$$

Розв'язавши рівняння (4.25) відносно $\frac{dy}{dx}$ (вважаючи, що $\frac{f}{x}$ і $\frac{f}{y}$ існують), знайдемо залежність

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{f}{x}}{\frac{f}{y}} = \frac{f}{y} \cdot \frac{y}{x} = \frac{f}{x}. \quad (4.26)$$

Це так звана **формула диференціювання неявної функції**.

Нею подаються відносні швидкості зміни значень x щодо значень y , чим забезпечується незмінність $f(x, y)$. Геометрично це означає, що точка (x, y) рухається вздовж кривої, рівняння якої є $u = f(x, y)$, а (4.26) визначає для будь-якого моменту напрям її руху.

 Для функції $x^2 y^4 \sin y = 0$ знайти $\frac{dy}{dx}$.

Розв'язування. Нехай

$$f(x, y) = x^2 y^4 \sin y,$$

$$\frac{f}{x} = 2xy^4, \quad \frac{f}{y} = 4x^2 y^3 \cos y.$$

З рівняння (4.26) знаходимо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^4}{4x^2y^3 \cos y}.$$



Відомо, що змінна x , проходячи через значення $x = 3$ дм, зростає зі швидкістю 2 дм/с. З'ясуємо, з якою швидкістю має змінюватись y при $y = 1$ дм, щоб функція $2xy^2 - 3x^2y$ лишалася сталою.

Розв'язування. Нехай

$$f(x, y) = 2xy^2 - 3x^2y;$$

знаходимо частинні похідні цієї функції за x і за y :

$$\frac{f}{x} = 2y^2 - 6xy, \quad \frac{f}{y} = 4xy - 3x^2.$$

Підставляючи в (4.26), маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - 6xy}{4xy - 3x^2}, \quad \text{або} \quad \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2y^2 - 6xy}{4xy - 3x^2}.$$

За умовою $x = 3, y = 1, \frac{dx}{dt} = 2$, звідки $\frac{dy}{dt} = \frac{32}{15}$ (дм/с).



Знайти похідні від функцій:

$$1. \quad u = z^2 y^3 - zy, \\ z = \sin x, y = e^x.$$

$$\text{Розв'язування. } \frac{du}{dx} = 3e^{3x} - e^x(\sin x - \cos x) = \sin 2x.$$

$$2. \quad u = \arctg(xy), y = e^x.$$

$$\text{Розв'язування. } \frac{du}{dx} = \frac{e^x(1 - x)}{1 - x^2 e^{2x}}.$$

$$3. \quad u = \ln(a^2 - z^2), \quad a = \sin x.$$

$$\text{Розв'язування. } \frac{du}{dx} = -2tg x.$$

$$4. \quad u = v^3 - vy, v = \ln s, y = e^s.$$

$$\text{Розв'язування. } \frac{du}{ds} = \frac{3v^2 - y}{s} = ve^s.$$

$$5. \quad u = \frac{e^{ax}(y - z)}{a^2 - 1},$$

$$y = a \sin x, z = \cos x.$$

$$\text{Розв'язування. } \frac{du}{dx} = e^{ax} \sin x.$$

II. Функція трьох змінних. Нехай $P(x, y, z)$ - точка на поверхні, заданій рівнянням:

$$u = F(x, y, z) = 0 \quad (4.27)$$

і, нехай, PC і AP - перерізи, що утворюються площинами, проведеними через точку P паралельно площинам YOZ і XOZ (рис. 4.14). Для точок кривої AP змінна u лишається сталою. Отже, згідно з (4.27) z є неявною функцією лише x , а на підставі (4.24) виконується рівність:

$$\frac{z}{x} = \frac{\frac{F}{x}}{\frac{F}{z}}. \quad (4.28)$$

Геометрична інтерпретація. Формула (4.28) визначає тангенс кута нахилу кривої AP у точці P до осі Ox .

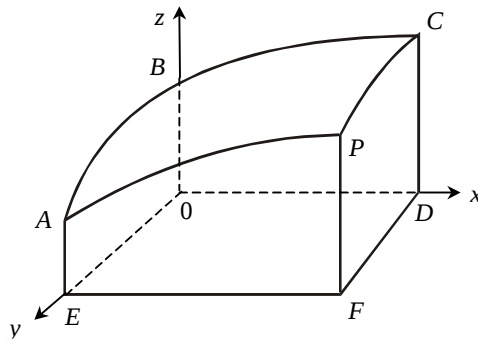


Рис. 4.14

У лівій її частині замість $\frac{dz}{dx}$ записано $\frac{z}{x}$, оскільки згідно з (4.27) змінна z була спочатку неявною функцією x і y (формулу (4.28) виведено за припущення, що величина u лишається сталою).

Аналогічно нахил кривої PC до осі Oy у точці P задається рівнянням:

$$\frac{z}{y} = \frac{\frac{F}{y}}{\frac{F}{z}} \quad (4.29)$$



Завдання. Знайти в точці $(1, 1)$ частинні похідні функції $u = f(x, y)$, заданої неявно: $u^3 - 5u^2x - uxy - 5 = 0$.

Розв'язування. Маємо $F(x, y, u) = u^3 - 5u^2x - uxy - 5$. З умови знайдемо значення функції u в точці $(1, 1)$:

$$\begin{aligned} u^3 - 5u^2 - u - 5 &= 0, \\ u^2(u - 5) - u - 5 &= 0, \\ (u - 5)(u^2 - 1) &= 0 \quad u = 5. \end{aligned}$$

Функція $F(x, y, u)$ дорівнює 0 в точці $(1, 1, 5)$ і неперервна в її околі, а частинні похідні цієї функції

$$F_x = -5u^2 - uy, \quad F_y = -ux, \quad F_u = 3u^2 - 10ux - xy$$

також неперервні.

Отже, частинні похідні неявної функції можна знайти за формулами (4.28) і (4.29). Частинні похідні функції $F(x, y)$ у точці $(1, 1, 5)$ такі: $F_x = 70$, $F_y = 5$, $F_u = 75$.

Тоді частинні похідні функції $u = f(x, y)$ у цій точці такі: $f_x = \frac{70}{26}$, $f_y = \frac{5}{26}$.

4.2.10. Формула Тейлора для функції двох змінних.

Нехай функція двох змінних $z = f(x, y)$ в околі точки (x_0, y_0) має неперервні похідні всіх порядків до m включно. Тоді в цьому околі справджується рівність:

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} C_k^i \frac{f(x_0, y_0)}{x^{k-i} y^i} (x - x_0)^{k-i} (y - y_0)^i + O(\rho^m), \quad (4.30)$$

де $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, $x = x_0$, $y = y_0$.

Означення. Многочлен

$$P_m(x, y) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} C_k^i \frac{f(x_0, y_0)}{x^{k-i} y^i} (x - x_0)^{k-i} (y - y_0)^i$$

називають *многочленом Тейлора m -го порядку* функції $f(x, y)$, а функцію

$$r_m(x, y) = f(x, y) - P_m(x, y)$$

залишковим членом m -го порядку формули Тейлора.

Формулу (4.30) називають *формулою Тейлора m -го порядку* функції $f(x, y)$ в околі точки (x_0, y_0) із залишковим членом у формулі Пеано. Зокрема, при $x_0 = y_0 = 0$ формулу (4.30) називають *формулою Маклорена*.

Якщо функція $f(x, y)$ має в околі точки (x_0, y_0) неперервні похідні до $(m+1)$ -го порядку включно, то для будь-якої точки (x, y) із цього околу знайдеться точка $(\xi, \eta) = (x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))$, $0 < \theta < 1$, така що

$$f(x, y) - P_m(x, y) = \frac{1}{(m+1)!} C_{m+1}^i \frac{f(\xi, \eta)}{x^{m+1-i} y^i} (x - x_0)^{m+1-i} (y - y_0)^i, \quad (4.31)$$

де $P_m(x, y)$ - многочлен Тейлора.

Формулу (4.31) називають *формулою Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа*. Якщо функція $f(x, y)$ подається у вигляді (4.30), (4.31), то говорять, що вона розкладена за *формулою Тейлора в околі точки (x_0, y_0)* .

Для функцій трьох і більшої кількості змінних формула Тейлора виводиться аналогічно.

Наприклад, для функції $z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ у точці $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ формула (4.30) набуває вигляду

$$f = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{x_1^{k-i_1} \dots x_n^{k-i_n}} (x_1 - x_1^0)^{i_1} \dots (x_n - x_n^0)^{i_n} + O(\rho^m),$$

де $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2}$, $x_i = x_i^0 + \theta_i (x_i - x_i^0)$, $\theta_i = \theta$, $i = 1, 2, \dots, n$ і підсумовування виконується за всіма цілими

невід'ємними i , такими що $\sum_{i=1}^n i = k$.

4.2.11. Визначник Якобі (якобіан).

Важливим формальним засобом дослідження функцій є визначники, утворені з частинних похідних.

Нехай дано n функцій n змінних:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1; x_2; \dots; x_n) \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$y_n = f_n(x_1; x_2; \dots; x_n)$$

які визначені в деякій n -вимірній області D і мають у ній неперервні похідні за всіма змінними. Складемо із цих похідних визначник

$$\begin{vmatrix} \frac{y_1}{x_1} & \frac{y_1}{x_2} & \dots & \frac{y_1}{x_n} \\ \frac{y_2}{x_1} & \frac{y_2}{x_2} & \dots & \frac{y_2}{x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{y_n}{x_1} & \frac{y_n}{x_2} & \dots & \frac{y_n}{x_n} \end{vmatrix} \quad (4.33)$$

Визначник (4.33) називають *функціональним визначником Якобі*, або *якобіаном*, системи функцій (4.32) за ім'ям німецького математика Якобі, який уперше вивчив його властивості.

Позначають якобіан символом

$$\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Якобіан має властивості, які подібні до властивостей звичайної похідної. Глибша аналогія між похідними та якобіанами розкривається в теорії неявних функцій, особливо коли йдеться про заміну змінних у кратних інтегралах.

4.3. Дослідження функцій багатьох змінних.

4.3.1. Поняття екстремуму функцій багатьох змінних.

Означення. Точка $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ називається *точкою максимуму функції* $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо існує окіл точки $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, для всіх точок якого виконується нерівність

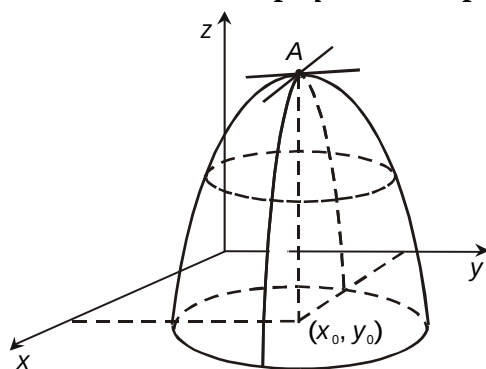
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0).$$

Означення. Точка $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ називається *точкою мінімуму функції* $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо існує окіл точки $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, для всіх точок якого виконується нерівність

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0).$$

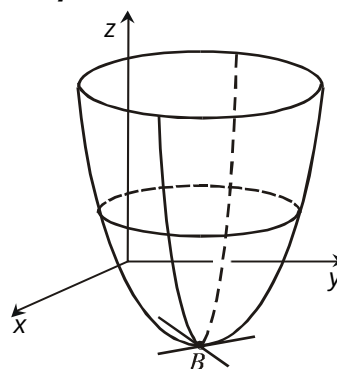
Точки максимуму і мінімуму називаються *точками екстремуму*.

Графічна інтерпретація.



Точка А- точка максимуму

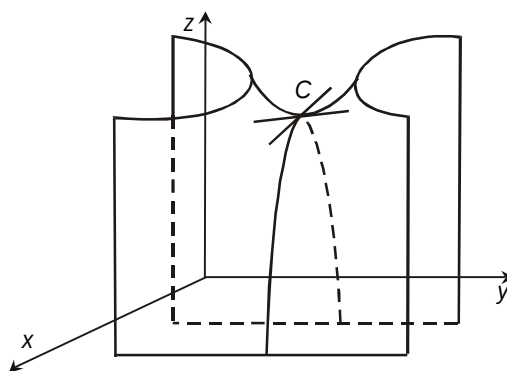
Рис. 4.15



Точка В- точка мінімуму

Рис. 4.16

Можливий ще й такий варіант екстремальної точки: так звана *сідлова точка* (рис. 4.17).



Точка С - сідлова точка

Рис. 4.17

4.3.2. Необхідні умови існування екстремуму.

Теорема. Для точки екстремуму $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ функції $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ для $i = 1, 2, \dots, n$ або дорівнюють нулю, або не існують.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)$ однієї змінної, визначеної умовами теореми в деякому околі точки x_1^0 дійсної осі. У точці x_1^0 функція f має екстремум. Тоді, оскільки $f(x_1^0) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, то або $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, або $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ не існує (за теоремою для функції однієї змінної).

Аналогічно доводимо випадки $i = 2, \dots, n$.

Означення. Точки, в яких функція визначена, а її частинні похідні дорівнюють нулю або не існують, називають *критичними точками* цієї функції.



Для функції $z = |y|$ усі точки осі x є критичними, бо в кожній такій точці функція визначена, $f_x = 0$, а f_y не існує. Точки екстремуму функції слід

шукати лише серед її критичних точок.



Вправи для самостійного розв'язування

Знайти повний диференціал функцій (1–5).

1. $x^2 y \sin z - e^y \ln z.$

2. $f(s, t) = \ln \frac{s}{t} - \frac{t}{s}.$

3. $x, y = x^y - y^x.$

4. $F(u, v) = \operatorname{tg} 3u - v - 5^v.$

5. $x_1, x_2, x_3, x_4 = x_2^{x_3 - x_1} \sin x_4.$

6. Показати, що правила диференціювання для функцій u і v однієї змінної

$$d(u \cdot v) = u dv + v du, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2},$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

виконуються, коли u і v – функції багатьох (наприклад, трьох) змінних (d - символ повного диференціала).

Знайти повний диференціал функцій (7–10).

7. $v = x^y - y^z - x^z.$

8. $f(x, y) = xy \frac{x^3}{y}.$

9. $f(x, y, z) = \frac{4xz}{2y - 3z}.$

10. $r, s = \frac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2}.$

11. Довести, що коли f – функція однієї змінної, а u – трьох змінних, то повний диференціал складеної функції $u = f(x, y, z)$ подається так:

$$du = f'(x, y, z) dx + f'(y, z) dy + f'(z) dz.$$

Знайти повний диференціал функцій (12–15).

12. $\sin ax - by - cz.$

13. $t, r, s = e^{\frac{r-s}{t}}.$

14. $u = \arcsin \frac{x}{y}.$

15. $z = \operatorname{Intg} \frac{y}{2x}.$

16. У зрізаному конусі радіуси основ $R=30$ см, $r=20$ см, висота $h=40$ см. Як зміниться об'єм конуса, якщо збільшити R на 3мм, r – на 4мм, h – на 2 мм? Яку частку початкового об'єму конуса становить цей приріст до його об'єму?

17. Відомі сторони прямокутника $a=10$ см, $b=24$ см. Як зміниться його діагональ, якщо сторону a збільшити на 4мм, а b зменшити на 1 мм? Знайти наближене значення зміни і порівняти з її точним значенням.

18. Центральний кут кругового сектора, що дорівнює 80° , потрібно зменшити на 15° . На скільки доведеться подовжити радіус, який дорівнює 30 см, щоб компенсувати зміну площі?

19. Щоб знайти густину тіла, вимірюють його масу (у грамах) у повітрі (результат $-p$) та у воді (результат $-q$) й визначають

$$\frac{p}{p-q}.$$

Який вплив на значення мають невеликі похибки, що їх припускаються під час обох зважувань?

20. Площа S трикутника за відомими стороною a і кутами B, C подається формулою

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin B \sin C}.$$

Як позначаться на результаті обчислення невеликі відхилення даних від істинних значень a, B і C ?

21. Показати, що в результаті обчислення періоду T коливання маятника за формулою

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (l - \text{довжина маятника; } g - \text{гравітаційна стала, або прискорення сили тяжіння})$$

відносна похибка (у відсотках) може бути оцінена з надлишком півсумою відносних похибок, з якими було взято значення l і g (за припущення, що ці похибки достатньо малі).

Знайти повну похідну складної функції (22–25).

22. Знайти $\frac{du}{dt}$, якщо $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$.

23. Знайти $\frac{dz}{dx}$, якщо $z = uvw$, $u = x^2 - 1$, $v = e^x$, $w = \cos x$.

24. Знайти $\frac{dy}{dx}$, якщо $y = \sin x^{\ln x}$, $\sin x = u$, $\ln x = v$.

25. Виразити $\frac{dw}{dx}$ через функції, та їх похідні, якщо $w = x^x$.

26. Дано $z = \ln e^x - e^y$; знайти: 1) $\frac{z}{x}$; 2) $\frac{dz}{dx}$, якщо $y = x^3$.

27. Дано $f(t) = \lg 3t - 2x^2 - y$, де $x = \frac{1}{t}$; $y = \sqrt{t}$; знайти $f'(t)$.

28. Дано $x = \arcsin \frac{x}{z}$, де $z = \sqrt{x^2 - 1}$; знайти x .

29. Радіус r основи конуса зростає рівномірно зі швидкістю 2 см/с; висота h - зі швидкістю 3 см/с. З якою швидкістю зростають: 1) об'єм V , 2) повна поверхня S конуса в момент, коли $r = 20$ см, $h = 12$ см?

30. Дано $u = F(r)$, де r - відстань точки $M(x, y, z)$ від початку прямокутної системи координат. Якщо точка M рухається і має в момент t швидкість, складові якої за осями координат v_x, v_y і v_z , то яка в цей момент швидкість зміни величини u ?

Знайти частинні похідні даних функцій (31–34).

31. $\frac{z}{u}; \frac{z}{v}$, якщо $z = x^2 \ln y$, де $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$.

32. $\frac{z}{x}; \frac{z}{y}$, якщо $z = F(x^2 - y^2, e^{xy})$.

$$33. \frac{t}{r}; \frac{r}{s}; \frac{s}{t}, \text{ якщо } t, r, s = F \sqrt{t-r}, \sin 2t, \frac{t}{r-s}.$$

$$34. \frac{f}{x}; \frac{f}{y}; \frac{f}{z}, \text{ якщо } f(x, y, z) = \Phi(x, x^2 y z^3, \frac{x}{z}).$$

35. Дано $u = \sin F \sin \sin$. Довести, що $\cos \frac{u}{\cos} = \cos \frac{u}{\cos} \cos \cos$ для довільної функції F .

$$36. \text{ Дано } z = \frac{y}{f(x^2 y^2)}. \text{ Довести, що } \frac{1}{x} \frac{z}{x} = \frac{1}{y} \frac{z}{y} = \frac{z}{y^2} \text{ для довільної функції } f.$$

Перевірити, чи правильно знайдені повні диференціали функцій (37-47).

Відповіді:

$$37. u = by^2x - cx^2 - gv^3 - ex. \quad du = by^2 - 2cx - e \, dx - 2byx - 3gy^2 \, dy.$$

$$38. u = \ln x^y. \quad du = \frac{y}{x} dx - \ln x \, dy.$$

$$39. u = y^{\sin x}. \quad du = y^{\sin x} \ln y \cos x \, dx + \frac{\sin x}{y^{1-\sin x}} dy.$$

$$40. u = x^{\ln y}. \quad du = u \frac{\ln y}{x} x - \frac{\ln x}{y} dy.$$

$$41. u = \frac{s}{s-t}. \quad du = \frac{2 \, s \, dt - t \, ds}{(s-t)^2}.$$

$$42. u = \sin pq. \quad du = \cos pq \, q \, dp - p \, dq.$$

$$43. u = x^{yz}. \quad du = x^{yz-1} yz \, dx - zx \ln x \, dy - xy \ln x \, dz.$$

$$44. u = \operatorname{tg}^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{tg}^2. \quad du = 4u \frac{d}{\sin 2} - \frac{d}{\sin 2} - \frac{d}{\sin 2}.$$

$$45. u = \frac{x}{y} \frac{y}{z} \frac{z}{x}. \quad du = \frac{1}{y} \frac{z}{x^2} dx - \frac{1}{z} \frac{x}{y^2} dy + \frac{1}{x} \frac{y}{z^2} dz.$$

$$46. u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad du = 0.$$

$$47. u = \arcsin \frac{x}{y}. \quad du = \frac{y \, dx - x \, dy}{y \sqrt{y^2 - x^2}}.$$

48. Рівняння $V_p = RT$ характеризує ідеальний газ (V - об'єм газу; p - тиск; T - абсолютна температура; R - деяка стала). Знайти співвідношення між диференціалами dV , dp і dT .

$$\text{Відповідь. } Vdp = pdV - RdT.$$

49. Скориставшись результатом задачі 48, знайти, як змінюється p за таких умов: $t = 300^\circ \text{C}$, $p = 1000 \text{ кг/м}^2$, $V = 14,4 \text{ м}^3$, коли відомо, що під час зміни t до 301°C і V до $14,5 \text{ м}^3$ значення p змінюється рівномірно.

$$\text{Відповідь. } -3,25 \text{ кг/м}^2.$$

50. Сторона трикутника завдовжки 2,4 м зростає зі швидкістю 10см/с, а друга його сторона завдовжки 1,5м зменшується зі швидкістю 5см/с. Кут між цими сторонами становить 60° і зростає зі швидкістю $2^\circ/\text{с}$. Як змінюється площа трикутника?

Відповідь. Зростає зі швидкістю $443 \text{ см}^2/\text{с}$.

51. Як змінюється третя сторона трикутника, заданого умовами попередньої задачі?

Відповідь. Зростає зі швидкістю $12,32 \text{ см/с}$.

52. Сторона прямокутника завдовжки 25 см зростає зі швидкістю 5см/с. Друга його сторона завдовжки 37,5см зменшується зі швидкістю 2,5см/с. Як змінюється площа прямокутника наприкінці другої секунди?

Відповідь. Зростає зі швидкістю $74,82 \text{ см}^2/\text{с}$.

53. Ребра прямокутного паралелепіпеда завдовжки 7,5, 10 і 12,5см зростають з однаковою швидкістю 0,5см/с. Як змінюється об'єм паралелепіпеда?

54. Повітряний змій переміщується горизонтально зі швидкістю 0,6м/с і піднімається вертикально вгору зі швидкістю 1,5м/с. З якою швидкістю розкручується мотузка, що його утримує?

Відповідь. $1,61 \text{ м/с}$.

55. Людина, яка стоїть на пристані, притягує човен за мотузку зі швидкістю 0,6 м/с. Руки її перебувають на висоті 1,8 м над носом човна. З якою швидкістю рухається човен у момент, коли відстань його від пристані дорівнює 2,4 м?

Відповідь. $0,75 \text{ м/с}$.

56. Об'єм і радіус циліндричного котла зростають відповідно зі швидкістю $27 \text{ дм}^3/\text{хв}$ і $0,003 \text{ дм/хв}$. Як змінюється довжина котла в момент, коли об'єм його становить $1,18 \text{ м}^3$, а радіус - $0,6 \text{ м}$?

Відповідь. $0,234 \text{ дм/хв}$.

57. Вода з конічного фільтра, висота якого 20см, а діаметр основи 15см, витікає зі швидкістю $0,0125 \text{ см}^3/\text{год}$. З якою швидкістю зменшується площа поверхні води, коли рівень води знижується на 10см?

58. Нехай x і y - координати деякої точки у прямокутній системі координат, а r і φ - полярні координати цієї точки. Довести, що

$$x dy - y dx = r^2 d\varphi^2; \quad dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

59. Закритий ящик, довжина якого 10, ширина 8 і висота 7см, зроблений із дощечок завтовшки $\frac{1}{2} \text{ см}$. Визначити наближено об'єм затраченого на ящик матеріалу.

Відповідь. 206 см^3 .

60. Прискорення g обчислено за формулою $s = \frac{1}{2} g t^2$. Знайти похибку такого результату залежно від невеликих похибок, яких припустилися, вимірюючи s і t .

Відповідь. Абсолютна похибка $dg = \frac{2ds - 2gt dt}{t^2}$.

Знайти $\frac{dy}{dx}$ за відповідною формулою (61–65).

Відповіді:

$$61. x^2 y^2 - a^2 x^2 y^2 = 0. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} - \frac{2x^2 y^2}{y^2} - \frac{a^2}{a^2}.$$

$$62. e^y - e^x - xy = 0. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y} - \frac{y}{x}.$$

$$63. \sin xy - e^{xy} - x^2 y = 0. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y \cos xy}{x} - \frac{e^{xy}}{e^{xy}} - \frac{2x}{x^2}.$$

$$64. \sin x \sin y - \cos x \cos y - y = 0. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\sin x} - \frac{y}{y} - 1.$$

$$65. y^x - x^y. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{yx^{y-1}}{xy^{x-1}} - \frac{y^x \ln y}{x^y \ln x}.$$

66. $f(x, y) = f(y, x) = 0$. Показати, що похідна може бути виражена дробом, чисельник якого утворюється зі знаменника переставленням x і y .

$$67. \text{Показати, що виконується рівність } \frac{1}{2} dv^2 = x dx + y dy + z dz, \text{ де } v = \frac{ds}{dt}.$$

$$68. \text{Знайти } \frac{du}{dx}, \text{ якщо } u = ax^3 + ab^2x + a^2b^2, \text{ де } a \text{ і } b - \text{сталі.}$$

$$\text{Відповідь. } \frac{du}{dx} = 3ax^2 + ab^2.$$

$$69. \text{Знайти } \frac{u}{x}, \text{ якщо } u = yx^3 + yz^2x + y^2z^2. \text{ Порівняти з попередньою задачею.}$$

$$\text{Відповідь. } \frac{u}{x} = 3yx^2 + yz^2.$$

Знайти зазначені частинні похідні даних функцій (70–81).

$$70. z = 2x^4 - 5x^3y - x^2y^2 - 4xy^3 - y^4; \quad \frac{z}{x}; \quad \frac{z}{y}.$$

$$71. \quad xyz; \quad \frac{w}{x}; \quad \frac{w}{y}; \quad \frac{w}{z}.$$

$$72. f(x, y) = 5x^2y - y^3 - 7^3; \quad \frac{f}{x}; \quad \frac{f}{y}.$$

$$73. \quad t, s = t\sqrt{s} - \frac{s}{\sqrt[3]{t}}; \quad \frac{s}{t}, t, s; \quad \frac{s}{s}, t, s.$$

$$74. s = yx^2 - y^2 - y^3; \quad \frac{s}{x} \text{ по } x, y, z.$$

$$75. F(x, y, z) = \frac{x}{y} - \frac{y}{z} - \frac{z}{x}; \quad F_y(x, y, z); \quad F_y(2, 1, 4).$$

$$76. \quad x, y = \sqrt{ax^2 + by^2}; \quad \frac{\partial}{\partial x} x, y; \quad \frac{\partial}{\partial y} x, y.$$

$$77. f(x, y, z) = \ln 5x - 3y - 4z; f_1 = 1, 0, 2; f_2 = 1, 0, 2; f_3 = 1, 0, 2.$$

$$78. \frac{\partial}{\partial x} \sin ax \cos^2 by \text{ і } \frac{\partial}{\partial y} \sin ax \cos^2 by.$$

$$79. r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{r}{x}; \frac{r}{y} \frac{1}{r}.$$

$$80. v = \ln t \sqrt{t^2 - s^2}; \frac{v}{t}; \frac{v}{s}.$$

$$81. x, y = \arctg \frac{x}{y}; \frac{\partial}{\partial x} x, y; \frac{\partial}{\partial y} x, y.$$

Дано функцію. Перевірити наведені далі рівності для її частинних похідних (82–93).

$$82. u = \sqrt{xy \frac{\partial x}{\partial y}}; \quad u \cdot x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = xy.$$

$$83. u = x \frac{x}{y} \frac{y}{z}; \quad \frac{u}{x} + \frac{u}{y} + \frac{u}{z} = 1.$$

$$84. z = e^t \frac{s^2}{2t^2} \ln t; \quad \frac{z}{t} + \frac{t}{s} \frac{z}{s} + \frac{z}{t} = z.$$

$$85. \frac{x}{z} \frac{y}{t} \frac{t}{y} \frac{x}{z}; \quad \frac{w}{t} + \frac{w}{x} + \frac{w}{y} + \frac{w}{z} = 0.$$

$$86. u = \frac{x^2 y^2}{x - y}; \quad x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2 \frac{u}{x}.$$

$$87. u = x^2 - y^2 \frac{1}{3}; \quad 3x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - 3y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{u}{y} = 0.$$

$$88. u = y^2 z^2 e^{\frac{x}{2}} - z^2 x^2 e^{\frac{y}{2}} - x^2 y^2 e^{\frac{z}{2}}; \quad \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2} = e^{\frac{x}{2}} e^{\frac{y}{2}} e^{\frac{z}{2}}.$$

$$89. u = \operatorname{tg} y - ax - y - ax^{\frac{3}{2}}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$$90. u = x y z; \quad \frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3 \partial z^2} = 1 + 1 + 1 = x^2 y^1 z^2.$$

$$91. r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r} \quad \text{і} \quad \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \ln r}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}.$$

$$92. v = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

$$93. f(x, y, z) = r, \text{ де } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2}{r} - r.$$

94. Дано рівняння $\frac{u}{y} = 2x - y^2$. Знайти його розв'язок $u(x, y)$, що задовольняє умову $u(x, 0) = 0$.

95. Знайти похідну функції f за напрямком вектора $\mathbf{l}$ у точці M .

- 1) $f = 3x^2 - 5y^2$, $\mathbf{l} = 1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}$, $M(1; 1)$;
- 2) $f = x \sin x - y$, $\mathbf{l} = 1; 0$, $M(-1/4; -1/4)$;
- 3) $f = x^3 - 2xy^2 - 3yz^2$, $\mathbf{l} = 2/3; 2/3; 1/3$, $M(3; 3; 1)$;
- 4) $f = \ln x^2 - y^2 - z^2$, $\mathbf{l} = 1/3; 2/3; 2/3$, $M(1; 2; 1)$;
- 5) $f = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$, $\mathbf{l} = 2/3; 1/3; 0; -2/3$, $M(1; 3; 2; 1)$.
- 6) $f = \sum_{k=1}^n \arcsin x_k$, $\mathbf{l} = 1/\sqrt{n}; 1/\sqrt{n}; \dots; 1/\sqrt{n}$, $M(1/4; 1/4; \dots; 1/4)$.

96. Знайти градієнт функції f у точці M .

- 1) $f = 1 - x^2 y^3$, $M(1; 1)$;
- 2) $f = yx^y$, $M(2; 1)$;
- 3) $f = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2 - z^2}}$, $M(1; 2; 3)$;
- 4) $f = \arctg xy/z^2$, $M(0; 1; 2)$;
- 5) $f = e^{x - xy - xyz}$, $M(x_0; y_0; z_0)$;
- 6) $f = \ln(1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)$, $M(x_0; y_0; z_0)$, $x_0^2 - 2y_0^2 - 3z_0^2 = 1$.

97. Знайти похідну функції f у точці M_0 за напрямом вектора $\overline{M_0 M}$.

- 1) $f = 5x - 10x^2 y - y^5$, $M_0(1; 2)$, $M(5; 1)$;
- 2) $f = xy^2 z^3$, $M_0(3; 2; 1)$, $M(7; 5; 1)$;
- 3) $f = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$, $M_0(1; 1; 1)$, $M(1; 5; 4)$;
- 4) $f = \frac{x_2}{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2}$, $M_0(0; 1; 1; 0)$, $M(3; 2; 1; 0)$.

98. Знайти похідну функції f у точці M за даним напрямом.

- 1) $f = 3x^4 - y^3 - xy$, $M(1; 2)$, за напрямом променя, що утворює з віссю x кут 135° ;
- 2) $f = \arctg y/x$, $M(1/2; \sqrt{3}/2)$, за напрямом зовнішньої нормалі до кола $x^2 + y^2 = 2x$ у точці M ;
- 3) $f = x^2 - 3yz - 4$, $M(1; 2; 1)$, за напрямом променя, що утворює однакові кути з усіма координатними осями;
- 4) $f = \ln e^x - e^y - e^z$, $M(0; 0; 0)$, за напрямом променя, що утворює з осями координат x, y, z кути, які дорівнюють $\pi/3, \pi/4, \pi/3$;
- 5) $f = \tg xz$, $M(-1/4; -1/4; 1)$, за напрямом градієнта функції $f_1 = \sin yz$ у точці M ;
- 6) $f = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$, $M(x_0; y_0; z_0)$, за напрямом градієнта функції f у точці M .

99. Знайти найбільше значення $\frac{f}{l}$ у точці M .

1) $f = xy^2 - 3x^4y^5$, $M(1; 1)$;

2) $f = \frac{x\sqrt{y}}{y}$, $M(2; 1)$;

3) $f = \ln xyz$, $M(1; 2; 3)$;

4) $f = \operatorname{tg} x - x - 3\sin y - \sin^3 y - 2z - \operatorname{ctg} z$, $M(\pi/4; \pi/3; \pi/2)$.

100. Знайти одиничний вектор $\mathbf{l}$, за напрямом якого $\frac{f}{l}$ у точці M досягає найбільшого значення.

1) $f = x^2 - xy - y^2$, $M(1; 2)$;

2) $f = x - 3y - \sqrt{3xy}$, $M(3; 1)$;

3) $f = \arcsin xy - \arccos yz$, $M(1; 0,5; 0)$;

4) $f = xz^y$, $M(3; 2; 1)$.

101. Знайти кут між градієнтами функції f у точках A і B .

1) $f = \ln|y/x|$, $A(1/2; 1/4)$, $B(1; 1)$;

2) $f = \arcsin \frac{x}{x-y}$, $A(1; 1)$, $B(3; 4)$;

3) $f = \frac{x}{x^2 - y^2 - z^2}$, $A(1; 2; 2)$, $B(3; 1; 0)$;

4) $f = \sin x^2 - y^2 - z^2$, $A(a; 2a; a)$, $B(b; b; b)$, $a^2 - b^2 \neq 0$.

102. Довести, що кут між градієнтами функцій $f_1 = x^2 - 2y^2 - 3z^2$, $f_2 = x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4x - 5y - 6z$ у точці $M(x_0, y_0, z_0)$ прямує до нуля, якщо ця точка віддаляється в нескінченність.

103. Знайти в зазначеній точці частинні похідні функції $u = x, y$, заданої неявно рівнянням.

1) $u^3 - 3xyu = 1$, $(0; 0; 1)$;

2) $e^u = xyu - 2$, $(0; 1; 0)$;

3) $u = \ln x - y - u$, $(0; 1; 1)$;

4) $\frac{u}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1$, $(0; 5; 4)$.

104. Знайти в зазначеній точці диференціал функції $u = x, y$, заданої неявно рівнянням.

1) $x - y - u = e^{u-x-y}$, (x_0, y_0) ;

2) $x - u = u \ln u/y$, $(1; 1)$.

105. Знайти du в точці x, y , якщо $u = \frac{x - z}{x + y} \frac{x + y}{z}$, $z = x, y$ - функція, задана неявно рівнянням $ze^z = xe^x - ye^y$.

106. Функція $z(x; y)$ визначається рівнянням $f(x, y, z) = 0$, де $f(u, v, w)$ - диференційовна функція. Знайти dz в точці (x, y) .

107. Знайти частинні похідні другого порядку функції $f(x, y)$.

1) $f_{xy} = x^3 - y^3 - 3$;

2) $f_{xy} = e^{xy}$;

3) $f_{xy} = \arctg \frac{x-y}{1+xy}$;

4) $f_{xy} = x^y$.

108. Обчислити частинні похідні другого порядку функції $f(x, y)$ у заданій точці.

1) $f_{xx} = \frac{x}{x^2+y^2}$, $(1; 0)$;

2) $f_{yy} = y^2 - 1 - e^x$, $(0; 1)$;

3) $f_{xy} = \ln x^2 - y$, $(0; 1)$;

4) $f_{xy} = y \sin y/x$, $(2; \quad)$;

5) $f_{xy} = \cos xy - \cos y$, $(0; \pi/2)$;

6) $f_{xy} = \arctg x/y$, $(1; 1)$;

7) $f_{xy} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(1; 1)$;

8) $f_{xy} = xy^{x-y}$, $(1; 1)$.

109. Знайти частинні похідні другого порядку функції $f(x, y, z)$.

1) $f_{xx} = x - 1 - y^2 z^3$.

2) $f_{xy} = \sin x - y - z$.

110. Знайти частинну похідну $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$.

1) $f_{xyz} = \sqrt{xy^3z^5}$.

2) $f_{xyz} = x^3 \sin y - y^3 \sin z - z^3 \sin x$.

3) $f_{xyz} = e^{xyz}$.

4) $f_{xyz} = \arctg \frac{x-y-z+xyz}{1+xy+yz+zx}$.

111. Знайти частинну похідну $\frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \partial x_4}$ функції $f = \ln \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_3^2 + x_2^2 + x_4^2}}$.

112. Знайти другий диференціал функції $f(x, y)$.

1) $f_{xx} = x - 1 - y$;

2) $f_{xx} = x \sin^2 y$;

3) $f_{xy} = \frac{1}{y} e^{xy}$;

4) $f_{xy} = y \ln x$;

5) $f_{xy} = \ln x^2 - y^2$;

6) $f_{xy} = \arcsin xy$.

113. Знайти $d^3 f$.

1) $f_{xxx} = x^2 y$;

2) $f_{xxx} = x^3 - y^3 - 3xy - x$.

3) $f_{xxx} = \sin x^2 - y^2$.

4) $f_{xxx} = xyz$.

114. Знайти $d^4 f$.

1) $f_{xxxx} = \cos x - y$;

2) $f_{xxxx} = \ln x^x y^y z^z$.

115. Нехай f - двічі диференційовна функція. Знайти другий диференціал функції $f(u, v, w)$.

1) $f_{uv} = x, y, f_{uw} = u, x, y$;

$$2) \quad x, y \quad f(u), u = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$3) \quad x, y, z \quad f(u), u = xyz;$$

$$4) \quad x, y \quad f(u, v, w), u = x^2 + y^2, v = x^2 - y^2, w = 2xy.$$

116.

1) Нехай f і g – двічі диференційовні функції. Довести, що функція $u(x, y) = f(x) + g(y)$ задовольняє рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$;

2) знайти функцію $u(x, y)$, що задовольняє задані умови.

$$a) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = x^2;$$

$$б) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + y, \quad u(x, 0) = \sin x, \quad u(0, y) = 0.$$

117. Знайти другий диференціал функції $u(x, y)$, заданої неявно рівнянням.

$$1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{u^2}{c^2} = 1;$$

$$2) \quad x + y + u = e^u;$$

$$3) \quad u = \ln y + x;$$

$$4) \quad \frac{u}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{tg} \frac{u}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

118. Перетворити рівняння до полярних координат, узявши $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

$$1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$2) \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$3) \quad y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

119. Перетворити рівняння, узявши за нові незалежні змінні u, v, t .

$$1) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + 4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0,$$

$$u = x, \quad 2v = x + y + z, \quad 2t = 3x + y + z;$$

$$2) \quad 4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$u = \frac{x}{2}, \quad v = \frac{x}{2} + y, \quad t = \frac{x}{2} + y + z.$$

120. Перетворити рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ до сферичних координат, узявши $x = r \cos \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \cos \phi$, $z = r \sin \theta$.

121. Розкласти за формулою Тейлора функцію $f(x, y)$ в околі заданої точки.

$$1) \quad f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x + 2y + 4, \quad (2; 1);$$

$$2) \quad f(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 + 6x + 3y, \quad (1; 2);$$

$$3) f(x, y) = x^3 - 2y^3 - 3xy, \quad 1; 2;$$

$$4) f(x, y) = x^3 - 5x^2 - xy - y^2 - 10x - 5y, \quad 2; 1.$$

122. Розкласти за формулою Маклорена до o^2 , де $\sqrt{x^2 + y^2}$, функцію f .

$$1) f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}; \quad 2) f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1-y};$$

$$3) f(x, y) = \sqrt{\frac{1-x}{2} - \frac{1-y}{2}}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Знайти другий диференціал функції $u(x, y)$, заданої явно (123–128).

123.

$$1) u = x^2 - xy - y^2 - 12x - 3y;$$

$$2) u = 3 - 2x - y - x^2 - xy - y^2;$$

$$3) u = 3x - 6y - x^2 - xy - y^2;$$

$$4) u = 4x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 2y - 1.$$

124.

$$1) u = 3x^2 - y^2 - x^3 - 4y;$$

$$2) u = 3x^2y - y^3 - 12x - 15y - 3;$$

$$3) u = 2x^3 - xy^2 - 5x^2 - y^2;$$

$$4) u = 3x^3 - y^3 - 3y^2 - x - 1;$$

$$5) u = x^3 - y^3 - 3axy.$$

125.

$$1) u = 3x^2 - 2x\sqrt{y} - y - 8x;$$

$$2) u = x\sqrt{1-y} - y\sqrt{1-x}, \quad x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1];$$

$$3) u = 1 - x^2 - \sqrt[3]{y - 2^2};$$

$$4) u = 1 - y^2 - \sqrt[5]{x - 2^4};$$

$$5) u = xy\sqrt{12 - 4x^2 - y^2};$$

$$6) u = \frac{ax - by - c}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

126.

$$1) u = \sin x - \cos y - \cos x - y, \quad x \in [0; \pi/2], \quad y \in [0; \pi/2];$$

$$2) u = \sin x \sin y \sin x - y, \quad x \in [0; \pi], \quad y \in [0; \pi];$$

$$3) u = x - y - 4 \sin x \sin y;$$

$$4) u = 1 - e^y \cos x - ye^y.$$

127.

$$1) u = x^2 - y^2 - z - 1^2 - xy - x;$$

$$2) u = 8 - 6x - 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2;$$

$$3) u = x^2 - y^2 - z^2 - 4x - 6y - 2z;$$

$$4) u = x^3 - y^3 - z^2 - 6xy - 4z;$$

$$5) u = xyz - 16 - x - y - 2z;$$

$$6) u = xy^2z^3 - 49 - x - 2y - 3z.$$

128.

$$1) u = \sin x - \sin y - \sin z - \sin x - y - z, \quad x, y, z \in [0; \pi];$$

$$2) u = x - 7z - e^{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$3) u = 2 \ln x - 3 \ln y - 5 \ln z - \ln 22 - x - y - z.$$

129. Дослідити на строгий екстремум неперервну диференційовну функцію $u = u(x, y)$, яка неявно задана рівнянням.

$$1) x^2 - y^2 - u^2 - 2x - 2y - 4u - 3 = 0;$$

$$2) 2x^2 - 2y^2 - u^2 - 8yu - u - 8 = 0;$$

$$3) x^3 - y^3 - u^2 - 3x - 4y - u - 8 = 0;$$

$$4) x^2 - y^2 - u^2 - u^4 - 8x^2 - y^2 - 10u^2 - 16 = 0.$$

130. Знайти умовні екстремуми функції $u = f(x, y)$ відносно заданого рівняння зв'язку.

$$1) u = xy, x - y - 1 = 0;$$

$$2) u = x^2 - y^2, 3x - 2y - 6 = 0;$$

$$3) u = x^2 - y^2, 2x - y - 3 = 0;$$

$$4) u = xy^2, x - 2y - 1 = 0;$$

$$5) u = \cos^2 x - \cos^2 y, x - y = \pi/4 = 0.$$

131. Дослідити функцію $u = f(x, y)$ на умовний екстремум, якщо задано рівняння зв'язку (з'ясувати, чи застосовний тут метод Лагранжа).

$$1) u = x^2 - y^2, x - y = 1;$$

$$а) x^2 - y^2 - 2xy = 0; \quad б) x - y = 0;$$

$$2) u = x^4 - y^4, x - y^3 = 0.$$

Знайти умовні екстремуми функції $u = f(x, y, z)$, якщо задано рівняння зв'язку (132-134).

132.

$$1) u = 2x^2 - 3y^2 - 4z^2, x - y - z = 13;$$

$$2) u = xyz^3, x - y - z = 12, x = 0, y = 0, z = 0;$$

$$3) u = x^2 y^3 z^4, 2x - 3y - 4z = 8, x = 0, y = 0, z = 0;$$

$$4) u = \sin x \sin y \sin z, x - y - z = \pi/2, x = 0, y = 0, z = 0;$$

$$5) u = x - 2y - 2z, x^2 - y^2 - z^2 = 9;$$

$$6) u = x - y - 2z, x^2 - y^2 - 2z^2 = 16;$$

$$7) u = xyz, x^2 - y^2 - z^2 = 3;$$

$$8) u = xy - 2xz - 2yz, xyz = 108;$$

$$9) u = x^2 - y^2 - z^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a = b = c = 0;$$

$$10) u = x - y - z, \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1, a = 0, b = 0, c = 0.$$

133.

$$1) u = xy - x - y, x^2 - y^2 = 4;$$

$$2) u = x^2 - xy - y, |x| = 2, |y| = 3;$$

$$3) u = x^2 - y^2 - 4x, x^2 - y^2 = 1, x - y = 3;$$

$$4) u = x^3 - y^3 - 3xy, 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2;$$

$$5) u = x^3 - 8y^3 - 6xy - 1, 0 \leq x \leq 2, |y| \leq 1;$$

$$6) u = x - |x - y|, |x| = 1, |y| = 2;$$

$$7) u = x^2 - xy - y^2, |x| = |y| = 1;$$

$$8) u = x - y e^{xy}, x^2 - y^2 = 1.$$

134.

- 1) $u = 1 - x - 2y, x \geq 1, y \geq 0, x \leq 0, y \leq 0$;
- 2) $u = x - 3y, x \geq 6, x \leq 4y - 4, y \geq 2$;
- 3) $u = x^2 - 2y - 3, y \geq x - 1, x \geq 0, y \geq 0$;
- 4) $u = x^2 - y^2 - xy, x \geq y, x \geq y - 3, x \geq 0, y \geq 0$;
- 5) $u = xy - 6 - x - y, x \geq y - 12, x \geq 0, y \geq 0$;
- 6) $u = \sin x - \sin y - \sin x - y, x \geq y - 2, x \geq 0, y \geq 0$.

135. Знайти найбільше M і найменше m значення функції u .

- 1) $u = xy - 1 - x^2 - y^2$;
- 2) $u = |x - y| \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;
- 3) $u = 2x^2 - y^2 - e^{1 - x^2 - y^2}$;
- 4) $u = x^2 - y^2 - z^2 - e^{-x^2 - 2y^2 - 3z^2}$.

136. Знайти рівняння дотичної до еліпсоїда $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$ площини і рівняння його нормалі в точці, де $x = 2, y = 1$, а z додатне.

137. Знайти рівняння нормалі до однопорожнинного гіперболоїда $x^2 - 4y^2 - 2z^2 = 6$ у точці $(2, 2, 3)$.

138. Знайти рівняння площини, дотичної до двопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

у точці (x_1, y_1, z_1) .

139. Знайти рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до поверхні в зазначеній точці.

- 1) $2x^2 - 4y^2 - z = 0$; $(2, 1, 12)$;
- 2) $3x^2 - y^2 - 2z = 0$; $(x = 1, y = 1)$;
- 3) $x^2 - 4y^2 - z^2 = 0$; $(1, 2, -1)$;
- 4) $x^2 y^2 - 2x - z^3 = 16$; $(x = 2, y = 1)$;
- 5) $x^2 - y^2 - z^2 = 11$; $(3, 1, 1)$;
- 6) $x^2 - 3y^2 - 2z^2 = 9$; $(y = 1, z = 1)$.

140. Знайти обвідну сім'ї прямих $y = 2mx - m^4$, де m - змінний параметр.

$$\text{Відповідь. } x = 2m^3, y = 3m^4; \text{ або } 16y^3 - 27x^4 = 0.$$

141. Знайти обвідну сім'ї парабол $y^2 = a(x - a)$, де a - змінний параметр.

$$\text{Відповідь. } x = 2a, y = a; \text{ або } y = \frac{1}{2}x.$$

142. Знайти обвідну сім'ї кіл $x^2 + y^2 = r^2$, де r - змінний параметр.

$$\text{Відповідь. } x = r.$$

143. Знайти обвідну сім'ї кіл, діаметрами яких є подвійні ординати еліпса

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Відповідь. Еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

144. Круг рухається так, що центр його постійно міститься на параболі $y^2 = 4ax$, відповідне коло проходить через вершину параболи. Знайти рівняння обвідної утвореної сім'ї кривих.

145. Знайти обвідну сім'ї, що складається з усіх кіл, центри яких містяться на осі x , а радіуси однакові й дорівнюють R .

5.1. Первісна функція.

Означення. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на інтервалі $X=(a,b)$ (скінченному або нескінченному), якщо у кожній точці цього інтервала $f(x)$ є похідною для $F(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

З цього означення слідує, що задача знаходження первісної обернена до задачі диференціювання: по заданій функції $f(x)$ потрібно знайти функцію $F(x)$, похідна якої рівна $f(x)$.

Первісна визначена неоднозначно: для функції $\frac{1}{1+x^2}$ первісними будуть функція $\arctg x$, і функція $\arctg x - 10$: $(\arctg x) - (\arctg x - 10) = \frac{1}{1+x^2}$. Для того, щоб описати усю множину первісних функції $f(x)$, розглянемо *властивості первісної*.

Властивості первісної.

1. Якщо функція $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на інтервалі X , то функція $f(x) + C$, де C – довільна стала, теж буде первісною для $f(x)$ на цьому інтервалі. (Доведення: $F'(x) = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$).

2. Якщо функція $F(x)$ – деяка первісна для функції $f(x)$ на інтервалі $X=(a,b)$, то будь яка інша первісна $F_1(x)$ може бути представлена у вигляді $F_1(x) = F(x) + C$, де C – стала на X функція.

Доведення. Так як функції $F(x)$ і $F_1(x)$ – первісні для $f(x)$, то $F'(x) = F_1'(x) = f(x)$. $F_1(x) - F(x) = 0$ (по теоремі про умову сталості диференційованої функції на інтервалі) $F_1(x) - F(x) = C = \text{const}$ $F_1(x) = F(x) + C$.

3. Для будь якої первісної $F(x)$ виконується рівність $dF(x) = f(x) dx$.

З цих властивостей слідує, що якщо $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$ на інтервалі X , то уся множина первісних функції $f(x)$ (тобто функцій, що мають похідну $f(x)$ і диференціал $f(x)dx$) на цьому інтервалі описується виразом $F(x) + C$, де C – довільна стала.

5.2. Невизначений інтеграл та його властивості.

Означення. Множина первісних функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* від цієї функції і позначається символом $\int f(x) dx$.

Як слідує з вищевикладеного, якщо $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$, то $\int f(x) dx = F(x) + C$, де C – довільна стала. Функцію $f(x)$ прийнято називати *підінтегральною функцією*, добуток $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом*.

Властивості невизначеного інтеграла, що слідують безпосередньо з означення:

1. $d \int f(x)dx = f(x)dx$.
2. $\int F'(x)dx = F(x) + C$ (або $dF(x) = F'(x) + C$).

5.3. Таблиця невизначених інтегралів.

1	$\int 0 dx = C$.	11	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.
2	$\int 1 dx = x + C$.	12	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.
3	$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$ (1).	13	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.
4	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$.	14	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; $\int e^x dx = e^x + C$.	15	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$.
6	$\int \sin x dx = -\cos x + C$.	16	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C = \operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C$
7	$\int \cos x dx = \sin x + C$.	17	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2}} = \ln x + C$.
8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.	18	$\int \sqrt{x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2} - \frac{1}{2} \ln x + C$.
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.	19	$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$.
10	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$.	20	$\int \frac{dx}{\sin x} = -\ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$; $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right + C$.

У формулах 14, 15, 16, 19 припускається, що $a > 0$. Кожна з формул таблиці справедлива на будь-якому інтервалі, на якому неперервна підінтегральна функція. Усі ці формули можна довести диференціюванням правої частини. Доведемо, наприклад, формулу 4: якщо $x > 0$, то $(\ln|x|)' = (\ln x)' = 1/x$; якщо $x < 0$, то

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Доведемо, що будь-яка неперервна функція має первісну і, як наслідок, невизначений інтеграл. При вивченні диференціювання було встановлено, що за допомогою таблиці похідних і правил диференціювання можна отримати похідну будь-якої елементарної функції, і ця похідна може бути елементарною функцією. Операція інтегрування цією властивістю не володіє: навіть відносно прості функції можуть мати первісні, які через елементарні функції не виражаються. Так не беруться в елементарних функціях наступні інтеграли, що відносяться до класу спеціальних функцій:

$e^{x^2} dx$ – інтеграл Пуассона; $\sin x^2 dx$, $\cos x^2 dx$ – інтеграли Френеля; $\frac{\sin x}{x} dx$, $\frac{\cos x}{x} dx$, $\frac{dx}{\ln x}$ – інтегральні синус, косинус, логарифм.

5.4. Найпростіші правила інтегрування.

1. $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$ ($a = \text{const}$);

2. $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$;

 $\int (5x^2 - 6x + \frac{8}{x^4\sqrt{x}}) dx = \int 5x^2 dx - \int 6x dx + \int 8x^{-5/4} dx = \frac{5}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2 - \frac{8}{1/4}x^{-1/4} + C = \frac{5}{3}x^3 - 3x^2 - \frac{32}{\sqrt[4]{x}} + C.$

 $\int (2\sin x + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^2} + 4) dx = \int 2\sin x dx + \int \frac{8}{x^2} dx + \int \frac{1}{x^2} dx + \int 4 dx = -2\cos x - \frac{8}{x} - \frac{1}{x} + 4x + C = -2\cos x - 4\text{arctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$

3. Підведення під знак диференціала сталого доданка: якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(x \pm a) dx = F(x \pm a) + C$ ($a = \text{const}$).

 $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 6} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 - 3} = \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2 - 3} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left|\frac{x-3-\sqrt{3}}{x-3+\sqrt{3}}\right| + C.$

4. Підведення під знак диференціала сталого множника: якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$ ($a = \text{const}$).

 $\int \frac{dx}{\sin^2 3x} = \frac{1}{3} \int \frac{d3x}{\sin^2 3x} = \frac{1}{3} \text{ctg} 3x + C.$

Прийоми 3, 4 легко комбінуються: якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(ax \pm b) dx = \frac{1}{a} F(ax \pm b) + C$ ($a, b = \text{const}$).

 $\int \cos(5x - 6) dx = \frac{1}{5} \int \cos(5x - 6) d(5x - 6) = \frac{1}{5} \sin(5x - 6) + C.$

5.5. Заміна змінної у невизначеному інтегралі (інтегрування підстановкою).

Нехай $\int f(x) dx = F(x) + C$. Тоді $\int f(t(x))t'(x) dx = F(t(x)) + C$. Тут $t(x)$ – диференційовна монотонна функція.

Доведення безпосередньо слідує з формули для похідної складеної функції. Перепишемо перший інтеграл, замінивши змінну x на t : $\int f(t) dt = F(t) + C$. Це означає, що $F(t) = \int f(t) dt$. Замінімо незалежну змінну t на функцію $t = t(x)$: $F(t(x)) = \int f(t(x)) t'(x) dx$. Отже, функція $F(t(x))$ є первісною для добутку $f(t(x)) t'(x)$, або $\int f(t(x)) t'(x) dx = F(t(x)) + C$.

При розв'язуванні задач заміну змінної можна виконати двома способами.

1. Якщо у підінтегральній функції можна зразу відмітити обидва співмножники, $f(t(x))$ та $t'(x)$, то заміна змінної проводиться підведенням множника $t'(x)$ під знак диференціала: $\int f(t(x)) t'(x) dx = \int f(t) dt$, і задача зводиться до обчислення інтеграла $\int f(t) dt$.

 $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$ (задача зведена до обчислення $\int \frac{dt}{t}$, де $t = \cos x$) $= \ln |\cos x| + C$ (аналогічно знаходиться інтеграл від $\operatorname{ctg} x$).

 $\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} d \sin x$ (задача зведена до обчислення $\int e^t dt$, де $t = \sin x$) $= e^{\sin x} + C$.

У більш складних задачах операція підведення під знак диференціала може виконуватись кілька разів.



$$\begin{aligned} & \int e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} \operatorname{arctg}^4 x^2 \frac{x}{1+x^4} dx \\ &= \frac{1}{2} \int e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} \operatorname{arctg}^4 x^2 \frac{1}{1+x^4} (2x dx) = \frac{1}{2} \int e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} \operatorname{arctg}^4 x^2 \frac{1}{1+x^4} dx^2 \\ &= \frac{1}{2} \int e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} \operatorname{arctg}^4 x^2 \frac{dx^2}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} \operatorname{arctg}^4 x^2 d \operatorname{arctg} x^2 \\ &= \frac{1}{2 \cdot 5} e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} (5 \operatorname{arctg}^4 x^2 d \operatorname{arctg} x^2) = \frac{1}{10} e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} (d \operatorname{arctg}^5 x^2) = \frac{1}{10} e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} + C. \end{aligned}$$

2. Заміну змінної можна провести зведенням підінтегрального виразу до нової змінної.

 $\int e^{\sin x} \cos x dx$. Робимо підстановку $t = \sin x$. Виражаємо усі множники підінтегрального виразу через змінну t : $x = \arcsin t$; $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$; $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}$; в результаті:

$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^t \sqrt{1-t^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int e^t dt = e^t + C$ (повертаємось до початкової змінної) $= e^{\sin x} + C$.

 $\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}(1+\sqrt[3]{x-5})}$. Підінтегральна функція містить два множники, жоден з

яких не є похідною другого, тому підводити їх під знак диференціала не потрібно. Спробуємо ввести нову змінну, таку, щоб корені добувалися:

$$\frac{dx}{\sqrt{x-5}(1-\sqrt[3]{x-5})} \left| \begin{array}{l} x-5=t^6; t=\sqrt[6]{x-5}; \\ x=t^6+5; dx=6t^5 dt \end{array} \right| = \frac{6t^5 dt}{t^3(1-t^2)} = 6 \frac{t^2 dt}{t^2-1} = 6 \frac{(t^2-1+1)dt}{t^2-1} = 6 dt \frac{dt}{t^2-1} = 6 t \operatorname{arctg} t + C = 6\sqrt[6]{x-5} \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x-5} + C.$$

 $\sqrt{a^2-x^2}dx$ (інтеграл №19 з таблиці невизначених інтегралів). Тут підінтегральна функція складається з єдиного множника; зробимо таку заміну змінної, щоб корінь добувався: $x = a \sin t$ (або $x = a \cos t$, $a > 0$):

$$\sqrt{a^2-x^2}dx \left| \begin{array}{l} x=a \sin t; dx=a \cos t dt; \\ \sqrt{a^2-x^2}=a \sqrt{1-\sin^2 t}=a \cos t \end{array} \right| a^2 \cos^2 t dt :$$

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}; \quad \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}.$$

$$\text{Тому } a^2 \cos^2 t dt = a^2 \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} dt + \frac{a^2}{2} \cos 2t dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{1}{2} \cos 2t d2t$$

$$\frac{a^2}{2} t + \frac{1}{2} \sin 2t + C = \frac{a^2}{2} t + \frac{1}{2} \sin 2t + C = \frac{a^2}{2} t + \sin t \cos t + C \left| \begin{array}{l} \sin t = \frac{x}{a}; \cos t = \\ \sqrt{1-\sin^2 t} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \end{array} \right|$$

$$\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Виведемо формули 17, 15, 20 з таблиці невизначених інтегралів:

17.

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2}} dx \left| \begin{array}{l} t=x\sqrt{x^2}; t=x\sqrt{x^2}; (t-x)^2=x^2; \\ t^2=2tx-x^2-x^2; x=\frac{t^2}{2t}; \sqrt{x^2}=t\frac{t^2}{2t} \\ \frac{t^2}{2t}; dx=\frac{t^2}{2t^2}dt \end{array} \right| \ln|t| + C = \ln|x\sqrt{x^2}| + C.$$

$$15. \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \frac{2a}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)(x-a)} dx = \frac{1}{2a} \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} dx$$

$$\frac{1}{2a} \left(\ln|x-a| - \ln|x+a| \right) + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$20. \frac{dx}{\sin x} = \frac{dx}{\sin 2 \frac{x}{2}} = \frac{dx}{2 \sin(x/2) \cos(x/2)} = \frac{d(x/2)}{\sin(x/2) \cos(x/2)} = \frac{\frac{d(x/2)}{\cos^2(x/2)}}{\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}}$$

$$\frac{d(\operatorname{tg}(x/2))}{\operatorname{tg}(x/2)} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$\frac{dx}{\cos x} = \frac{dx}{\sin x - \frac{1}{2}} = \frac{d \left(x - \frac{1}{2} \right)}{\sin \left(x - \frac{1}{2} \right)} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x - 1/2}{2} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right| + C.$$

5.6. Інтегрування по частинам.

Інтегрування по частинам – прийом, який використовується так часто, як і заміна змінної. Нехай $u(x)$ і $v(x)$ – функції, які мають неперервні частинні похідні. Тоді по формулі диференціювання добутку $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$ $u \cdot dv = d(uv) - v \cdot du$. Знаходимо невизначені інтеграли для обох частин цієї рівності (при цьому $d(uv) = uv + C$):

$$u \cdot dv = uv - v \cdot du.$$

Ця формула називається *формулою інтегрування по частинам*.

Часто її записують в похідних ($dv = v' dx, du = u' dx$):

$$u \cdot v' dx = uv - v \cdot u' dx.$$



$$x \sin x dx \left| \begin{array}{l} u = x; dv = \sin x dx; \\ du = dx; v = -\cos x \end{array} \right| = x(-\cos x) - (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C.$$



$$\ln x dx \left| \begin{array}{l} u = \ln x; dv = dx; \\ du = \frac{dx}{x}; v = x \end{array} \right| = x \ln x - x \frac{dx}{x} = x \ln x - dx = x \ln x - x + C.$$

Формула інтегрування по частинам може використовуватись неодноразово.



$$\begin{aligned} e^x x^3 dx &= x^3(e^x dx) = x^3 de^x = x^3 e^x = e^x dx^3 = x^3 e^x = e^x 3x^2 dx = x^3 e^x - 3 \int x^2(e^x dx) \\ x^3 e^x - 3 \int x^2 de^x &= x^3 e^x - 3(x^2 e^x - \int e^x dx^2) = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - e^x 2x dx) \\ x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x de^x &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6(xe^x - \int e^x dx) = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6 \int e^x dx \\ x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + C &= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C. \end{aligned}$$

Наведені приклади показують, для яких функцій потрібно використовувати формулу інтегрування по частинам:

5.6.1. Інтеграли виду $\int P_n(x) \cos ax \, dx$, $\int P_n(x) \sin ax \, dx$, $\int P_n(x) a^x \, dx$, де $P_n(x)$ – многочлен n -го степеня.

Так, для $\int P_n(x) \cos ax \, dx$ маємо:

$$u = P_n(x), \quad dv = \cos ax dx, \quad du = (P_n'(x)) dx, \quad v = (\sin ax)/a,$$

і $P_n'(x) \cos ax dx = P_n'(x) (\sin ax)/a = 1/a P_{n-1}'(x) \sin ax dx$. В результаті ми отримали інтеграл того ж типу з многочленом степеня, на одиницю менше. Після n -кратного використання формули степінь многочлена зменшиться до нуля, тобто многочлен перетвориться у сталу, і інтеграл зведеться до табличного.

5.6.2. Інтеграли $P_n(x) f(x) dx$, де $f(x)$ – трансцендентна функція, яка має дробово-раціональну або дробово-іраціональну похідну ($\ln x$, $\arctg x$, $\operatorname{arccotg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arccos} x$).

В цьому випадку потрібно узяти $u = f(x)$, $dv = P_n(x) dx$, для того, щоб в інтегралі $v du$ була не $f(x)$, а її похідна.



$$\begin{aligned} \int x \arcsin x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x; \, dv = x dx; \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \int \frac{x^2 dx}{2\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = \sin t; \, dx = \cos t dt \\ \sqrt{1-x^2} = \cos t \end{array} \right| \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \sin^2 t \, dt = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2t) dt = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{4} t + \frac{\sin 2t}{2} + C \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{t}{4} + \frac{\sin t \cos t}{4} + C = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{\arcsin x}{4} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C. \end{aligned}$$

5.6.3. Зведення інтеграла до самого себе.

За допомогою інтегрування по частинам інтеграл виражається через такий же інтеграл; в результаті маємо рівняння відносно цього інтеграла.



$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ (це інтеграл №19 з таблиці невизначених інтегралів).

$$\begin{aligned} I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{a^2 - x^2}; \, dv = dx; \\ du = \frac{-xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \, v = x \end{array} \right| = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} - I - a^2 \arcsin \frac{x}{a}. \end{aligned}$$

В результаті для шуканого інтеграла ми отримали рівняння: $I = x\sqrt{a^2 - x^2} - I - a^2 \arcsin \frac{x}{a}$, розв'язуючи яке, отримаємо $2I = x\sqrt{a^2 - x^2} - a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C$ (константа C з'явилась внаслідок того, що інтеграли I в правій і лівій частинах рівняння визначені з точністю до довільної сталої) і $I = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$ (константа $\frac{C}{2}$ переозначена через C). Аналогічно виводиться інтеграл №20 з таблиці невизначених

інтегралів.

Зведення інтеграла до самого себе – самий простий спосіб знаходження інтегралів виду: $e^{ax} \cos bx dx$ і $e^{ax} \sin bx dx$ ($a, b = \text{const}$).



$$I = \int e^{ax} \cos bx \, dx \quad \left| \begin{array}{l} u = \cos bx; \\ du = -b \sin bx dx; \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} dv = e^{ax} dx \\ v = e^{ax} / a \end{array} \right. \quad \frac{e^{ax}}{a} \cos bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \sin bx; \\ du = b \cos bx dx; \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} dv = e^{ax} dx \\ v = e^{ax} / a \end{array} \right. \quad \frac{e^{ax}}{a} \sin bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

$$\frac{e^{ax}}{a} \cos bx - \frac{be^{ax}}{a^2} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I.$$

Отже, після двократного інтегрування по частинам отримали рівняння відносно I :

$$I - \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{be^{ax}}{a^2} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I, \text{ розв'язування якого } I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C.$$

При знаходженні цих інтегралів не принципово, приймемо ми $u = \cos bx$, $dv = e^{ax} dx$ чи $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx dx$.

5.6.4. Рекурентні співвідношення.

Якщо підінтегральна функція залежить від деякого параметра n , і отримаємо співвідношення, яке виражає інтеграл через аналогічний з меншим значенням n , то це співвідношення називається *рекурентним співвідношенням*.

$$I_n = \int \cos^n x \, dx.$$

Представимо підінтегральну функцію у вигляді $\cos^n x = \cos^{n-2} x \cos^2 x = \cos^{n-2} x (1 - \sin^2 x) = \cos^{n-2} x - \sin x \cos^{n-2} x \sin x$.

$$I_n = \int \cos^n x \, dx = \int \cos^{n-2} x \, dx - \int \sin x \cos^{n-2} x \sin x \, dx \quad \left| \begin{array}{l} u = \sin x; dv = \cos^{n-2} x \sin x dx; \\ du = \cos x dx; v = -\frac{\cos^{n-1} x}{n-1}; \end{array} \right.$$

$$I_n = \int \cos^{n-2} x \, dx - \left(-\frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} + \frac{1}{n-1} \int \cos x^n \, dx \right)$$

$$I_n = \int \cos^{n-2} x \, dx - \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} + \frac{1}{n-1} I_n \quad \Rightarrow \quad I_n = \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx - \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1}$$

Тепер, знаючи $I_1 = \int \cos x \, dx = \sin x + C$,

$$I_2 = \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{2} \int 1 \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{x}{2} + C, \quad \text{ми можемо виписати:}$$

$$I_3 = \int \cos^3 x \, dx = \frac{3-1}{3} I_1 - \frac{\sin x \cos^2 x}{3} = \frac{2}{3} \sin x - \frac{\sin x \cos^2 x}{3} + C;$$

$$I_4 = \int \cos^4 x \, dx = \frac{4-1}{4} I_2 - \frac{\sin x \cos^3 x}{4} = \frac{3}{4} \left(\frac{\sin 2x}{2} + \frac{x}{2} \right) - \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + C;$$

$$I_5 = \int \cos^5 x \, dx = \frac{5}{5} I_3 = \frac{\sin x \cos^4 x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin x \cos^2 x \, dx = \frac{\sin x \cos^4 x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin x \cos^2 x \, dx$$

т.д.

В якості другого прикладу виведемо ще рекурентну формулу для інтеграла, який знадобиться в подальшому: $I_n = \int \frac{dx}{x^2 + a^{2n}}$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{1}{x^2 + a^{2n}} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2}{x^2 + a^{2n}} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{(x^2 + a^2) - x^2}{x^2 + a^{2n}} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{x^2 + a^{2n-1}} dx - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2}{x^2 + a^{2n-1}} dx \\ &= \frac{1}{a^2} x \frac{xdx}{x^2 + a^{2n-1}} - \frac{1}{a^2} I_{n-1} = \frac{1}{a^2} x d \left(\frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{x^2 + a^{2n-1}} \right) - \frac{1}{a^2} I_{n-1} = \frac{1}{a^2} x \frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{x^2 + a^{2n-1}} - \frac{1}{a^2} I_{n-1} \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{x^2 + a^{2n-1}} dx - \frac{1}{a^2} I_{n-1} = \frac{x}{2(n-1)a^2} \frac{1}{x^2 + a^{2n-1}} - \frac{1}{2(n-1)a^2} I_{n-1} \\ &= \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1} - \frac{x}{2(n-1)a^2} \frac{1}{x^2 + a^{2n-1}}. \end{aligned}$$

Тепер, починаючи з $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$, можемо знайти:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{2-2-3}{2(2-1)a^2} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{x}{2(2-1)a^2} \frac{1}{(x^2 + a^2)^{2-1}} = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{x}{2a^2} \frac{1}{x^2 + a^2} + C; \\ I_3 &= \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{2-3-3}{2(3-1)a^2} \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} - \frac{x}{2(3-1)a^2} \frac{1}{(x^2 + a^2)^{3-1}} \\ &= \frac{3}{4a^2} \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} - \frac{x}{4a^2} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} + C \text{ і т.д.} \end{aligned}$$

5.7. Інтеграли, які містять квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$.

5.7.1. Інтеграли виду $\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx$ ($a \neq 0$) зводяться до табличних виділенням повного квадрата в тричлені:

$$\frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} = \frac{Mx + N}{a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)} = \frac{Mx + N}{a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} = \frac{M \left(x + \frac{b}{2a} \right) + N - \frac{Mb}{2a}}{a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}$$

$$\frac{Mx \frac{b}{2a} + N \frac{Mb}{2a}}{a^2 x^2 \frac{b^2}{2a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \frac{b^2}{4a^2}} = \frac{M}{2a} \frac{2x \frac{b}{2a} + \frac{2N}{M} \frac{b}{a}}{x^2 \frac{b^2}{2a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \frac{b^2}{4a^2}}.$$

Зміст цих

перетворень: доданок Mx у чисельнику перетворюється у похідну знаменника, що отримався; другий доданок у чисельнику від x не залежить. Тепер відносно змінної

$t = x \frac{b}{2a}$ інтеграл звівся до $\frac{M}{2a} \int \frac{2t}{t^2 + c_1^2} dt = L \int \frac{dt}{t^2 + c_1^2}$, де $L = \frac{2N}{M} \frac{b}{a}$, $c_1^2 = \frac{|4ac - b^2|}{4a^2}$.

Перший інтеграл $\int \frac{2t}{t^2 + c_1^2} dt = \frac{d(t^2 + c_1^2)}{t^2 + c_1^2} = \ln|t^2 + c_1^2| + C$, другий – один з табличних інтегралів – 14 або 15.



$$\begin{aligned} & \frac{7x^3 - 9x^2 + 6}{5x^2 - 9x + 6} dx = \frac{7}{52} \frac{2x^{\frac{6}{7}}}{x^2 \frac{9}{5} x^{\frac{6}{5}}} dx = \frac{7}{10} \frac{2x^{\frac{6}{7}}}{x \frac{9}{10} x^{\frac{6}{5}} \frac{81}{100}} dx = \frac{7}{10} \frac{2x^{\frac{9}{10}} \frac{18}{10} \frac{6}{7}}{x \frac{9}{10} x^{\frac{2}{5}} \frac{39}{100}} dx \\ & \frac{7}{10} \frac{2x^{\frac{9}{10}} \frac{9}{10} \frac{dx}{x \frac{9}{10} x^{\frac{2}{5}} \frac{39}{100}}}{\frac{9}{5} \frac{6}{7}} = \frac{7}{10} \frac{d(x^{\frac{9}{10}} \frac{9}{10} \frac{39}{100})}{x \frac{9}{10} x^{\frac{2}{5}} \frac{39}{100}} \\ & \frac{7}{10} \frac{63}{35} \frac{30}{x \frac{9}{10} x^{\frac{2}{5}} \frac{39}{100}} dx = \frac{7}{10} \ln \left| x \frac{9}{10} x^{\frac{2}{5}} \frac{39}{100} \right| + \frac{93}{50} \frac{dx}{x \frac{9}{10} x^{\frac{2}{5}} \frac{\sqrt{39}}{10}^2} \\ & \frac{7}{10} \ln \left| x^2 \frac{9}{5} x \frac{81}{100} \frac{39}{100} \right| + \frac{93}{50} \frac{\sqrt{39}}{10} \operatorname{arctg} \frac{x \frac{9}{10}}{\frac{\sqrt{39}}{10}} + C = \frac{7}{10} \ln |5x^2 - 9x + 6| + \frac{93}{5\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \frac{10x - 9}{\sqrt{39}} + C. \end{aligned}$$

Той же результат можна отримати заміною змінної $t = 2ax + b$ (похідна знаменника), або $t = ax + \frac{b}{2}$, або $t = x \frac{b}{2a}$:

$$\frac{7x^3 - 9x^2 + 6}{5x^2 - 9x + 6} dx \left| \begin{array}{l} t = 10x - 9; \\ x = \frac{t + 9}{10}; dx = \frac{dt}{10} \end{array} \right| = \frac{7}{5} \frac{\frac{t + 9}{10}^3 - 9 \frac{t + 9}{10} + 6}{\frac{t + 9}{10}^2 - 9 \frac{t + 9}{10} + 6} \frac{dt}{10} \quad (\text{після усіх}$$

перетворень)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5} \int \frac{7t + 93}{t^2 - 39} dt = \frac{7}{5} \int \frac{t}{t^2 - 39} dt + \frac{93}{5} \int \frac{dt}{t^2 - 39} = \frac{7}{10} \frac{d(t^2 - 39)}{t^2 - 39} + \frac{93}{5\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{39}} \\ & \frac{7}{10} \ln(t^2 - 39) + \frac{93}{5\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{39}} + C = \frac{7}{10} \ln((10x - 9)^2 - 39) + \frac{93}{5\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \frac{10x - 9}{\sqrt{39}} + C \end{aligned}$$

$$\frac{7}{10} \ln(20(5x^2 - 9x - 6)) - \frac{93}{5\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \frac{10x - 9}{\sqrt{39}} + C$$

$$\frac{7}{10} \ln(5x^2 - 9x - 6) - \frac{93}{5\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \frac{10x - 9}{\sqrt{39}} + C.$$

5.7.2. Інтеграли виду $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$ ($a > 0$).



$$\int \sqrt{3x^2 - 5x - 6} dx = \sqrt{3} \int \sqrt{x - \frac{5}{6} + \frac{47}{36}} dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{5}{6} \sqrt{x - \frac{5}{6} + \frac{47}{36}} + \frac{47}{36} \ln \left| x - \frac{5}{6} + \sqrt{x - \frac{5}{6} + \frac{47}{36}} \right| \right) + C$$

$$= \frac{1}{12} (6x - 5) \sqrt{3x^2 - 5x - 6} + \frac{47\sqrt{3}}{72} \ln \left| x - \frac{5}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{5}{3}x - 2} \right| + C.$$

$$\int \sqrt{6 - 5x - 3x^2} dx = \sqrt{3} \int \sqrt{x^2 - \frac{5}{3}x - 2} dx = \sqrt{3} \int \sqrt{\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} - 2} dx = \sqrt{3} \int \sqrt{\frac{97}{36} - \left(x - \frac{5}{6}\right)^2} dx = \frac{5}{6} \sqrt{3} \int \sqrt{\frac{97}{36} - u^2} du$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{5}{6} \sqrt{\frac{97}{36} - \left(x - \frac{5}{6}\right)^2} + \frac{97}{36} \operatorname{arcsin} \frac{x - 5/6}{\sqrt{97/36}} \right) + C = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{5}{6} \sqrt{2 - \frac{5}{3}x - x^2} + \frac{97}{36} \operatorname{arcsin} \frac{6x - 5}{\sqrt{97}} \right) + C$$

$$= \frac{1}{12} (6x - 5) \sqrt{6 - 5x - 3x^2} + \frac{97\sqrt{3}}{72} \operatorname{arcsin} \frac{6x - 5}{\sqrt{97}} + C.$$

5.7.3. Інтеграли виду $\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ ($a > 0$), як і в п.6.7.1, зводяться до

табличних виділенням повного квадрата у тричлені:

$$\frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{Mx + N}{\sqrt{a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)}} = \frac{Mx + N}{\sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}} = \frac{M \left(x + \frac{b}{2a}\right) + N - \frac{Mb}{2a}}{\sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}}; \text{ перший}$$

доданок у чисельнику дасть інтеграл від степеневої функції з показником степеня $-1/2$, другий – в залежності від знака a – табличний інтеграл №16 або №17:



$$\begin{aligned}
& \frac{7x^3}{\sqrt{5x^2 - 9x - 6}} dx \left| \begin{array}{l} 5x^2 - 9x - 6 \\ 5x^2 - 2\frac{9}{10}x - \frac{81}{100} \end{array} \right| \frac{7x^3 - \frac{9}{10}x^2 - \frac{63}{10}}{\sqrt{5\frac{201}{100}x - \frac{9}{10}}} dx \\
& \frac{7}{\sqrt{5}} \frac{x^{\frac{9}{10}}}{\sqrt{\frac{201}{100}x - \frac{9}{10}}} dx - \frac{93}{10\sqrt{5}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{201}{100}x - \frac{9}{10}}} - \frac{7}{2\sqrt{5}} \frac{x^{\frac{9}{10}}}{\sqrt{\frac{201}{100}x - \frac{9}{10}}} dx - \frac{93}{10\sqrt{5}} \frac{d x^{\frac{9}{10}}}{\sqrt{\frac{201}{100}x - \frac{9}{10}}} \\
& \frac{7}{2\sqrt{5}} \frac{201}{100} x^{\frac{9}{10}} \frac{1}{2} d \frac{201}{100} x^{\frac{9}{10}} - \frac{93}{10\sqrt{5}} \arcsin \frac{x^{\frac{9}{10}}}{\sqrt{201/100}} \\
& \frac{7}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{201}{100}x - \frac{9}{10}} - \frac{93}{10\sqrt{5}} \arcsin \frac{10x - 9}{\sqrt{201}} + C - \frac{7}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{6}{5}x^2 - \frac{9}{5}x} - \frac{93}{10\sqrt{5}} \arcsin \frac{10x - 9}{\sqrt{201}} + C \\
& \frac{7}{5} \sqrt{5x^2 - 9x - 6} - \frac{93}{10\sqrt{5}} \arcsin \frac{10x - 9}{\sqrt{201}} + C.
\end{aligned}$$

5.7.4. Інтеграли виду $\frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n} dx$ ($a \neq 0, n \neq 1$).

Беруться з використанням тієї ж техніки. Після приведення підінтегральної функції

до виду (див. 5.7.1) $\frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{M}{2a^n} \frac{2x + \frac{b}{2a} - \frac{2N}{M} \frac{b}{a}}{x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{4ac - b^2}{4a^2}}$ відносно змінної

$t = x + \frac{b}{2a}$ інтеграл зводиться до $\frac{M}{2a^n} \frac{2t}{(t^2 - c_1^2)^n} dt + L \frac{dt}{(t^2 - c_1^2)^n}$. Перший інтеграл

$\frac{2t}{(t^2 - c_1^2)^n} dt = \frac{d(t^2 - c_1^2)}{(t^2 - c_1^2)^n} = \frac{1}{n-1} \frac{1}{(t^2 - c_1^2)^{n-1}} + C$, другий може бути знайдений по рекурентній формулі, виведеній у 5.6.4.



$\frac{5x - 6}{(x^2 - 6x + 15)^3} dx = \frac{5}{2} \frac{2x - 12/5}{(x^2 - 6x + 15)^3} dx = \frac{5}{2} \frac{(2x - 6) - (12/5 - 6)}{(x^2 - 6x + 15)^3} dx$
 $\frac{5}{2} \frac{(2x - 6)dx}{(x^2 - 6x + 15)^3} = \frac{5}{2} \frac{18}{5} \frac{dx}{(x^2 - 6x + 15)^3} = \frac{5}{2} \frac{d(x^2 - 6x + 15)}{(x^2 - 6x + 15)^3} = 9 \frac{dx}{(x^2 - 6x + 15)^3}$
 (перший інтеграл – інтеграл від степеневої функції; другий – отриманий у 6.6.4 по рекурентній формулі інтеграл I_3 , в якому потрібно замінити x на $x - 3$, $a = \sqrt{6}$)

$$\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 - 6x + 15)^2} - 9 \frac{3}{4 \cdot 6} \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x - 3}{\sqrt{6}} - \frac{x - 3}{2 \cdot 6((x - 3)^2 - 6)} - \frac{1}{4 \cdot 6} \frac{x - 3}{((x - 3)^2 - 6)^2}$$

$$\frac{5}{4(x^2 - 6x - 15)^2} - \frac{3}{32\sqrt{6}} \arctg \frac{x-3}{\sqrt{6}} - \frac{3}{32} \frac{x-3}{(x^2 - 6x - 15)} + \frac{3}{8} \frac{x-3}{(x^2 - 6x - 15)^2} + C.$$

5.7.5.Інтеграли виду $\frac{dx}{(Mx + N)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$.

Підстановкою $t = \frac{1}{Mx + N}$ зводяться до інтегралів, які розглядалися у 5.7.3.



$$\frac{dx}{(x-4)\sqrt{x^2-6x-15}} = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{x-4}, \quad x-4 = \frac{1}{t}, \\ x = \frac{1}{t} + 4, \quad dx = \frac{dt}{t^2} \end{array} \right|$$

$$\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{1}{t^2} - 6\frac{1}{t} - 15}} = \frac{dt}{t \sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{6}{t} - 15}} = \frac{dt}{\sqrt{55t^2 - 14t - 1}} = \frac{1}{\sqrt{55}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{14}{55}t - \frac{6}{55}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{55}} \ln \left| t - \frac{7}{55} + \sqrt{t^2 - \frac{14}{55}t - \frac{6}{55}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{55}} \ln \left| \frac{1}{x-4} - \frac{7}{55} + \sqrt{\frac{1}{(x-4)^2} - \frac{14}{55(x-4)} - \frac{6}{55}} \right| + C.$$

5.8. Інтегрування раціональних функцій.

5.8.1. Інтегрування простих дробів.

Простими дробами називаються раціональні функції наступних чотирьох типів:

- I. $\frac{A}{x-a}$; II. $\frac{A}{(x-a)^k}, k \geq 2$;
 III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, p^2-4q < 0$; IV. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, k \geq 2, p^2-4q = 0$.

Інтеграли від дробів перших двох типів – табличні інтеграли:

$$\frac{A}{x-a} dx = \ln|x-a| + C; \quad \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{k-1} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C;$$

Інтегрування дробів III і IV типів розглянуто у 6.7.

5.8.2. Інтегрування раціональних функцій.

Алгоритм обчислення інтегралів від раціональних функцій, тобто інтегралів виду

$$f(x)dx = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_1 x + b_0} dx$$

полягає у наступному:

1. Якщо дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – неправильний, її інтегрування зводиться до інтегрування многочлена і правильного дробу. Для цього він представляється у вигляді $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = L_{n-m}(x) + \frac{P_{n1}(x)}{Q_m(x)}$, $n_1 < m$; знаходження цілої частини $L_{n-m}(x)$ і остачі $P_{n1}(x)$ може бути виконано, наприклад, за допомогою процедури ділення "кутом". Далі розглядається інтегрування правильних дробів.

2. Знаменник $Q_m(x)$ правильного дробу представляється у вигляді добутку $Q_m(x) = b_m(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_s)^{k_s}(x^2 - p_1x - q_1)^{l_1}(x^2 - p_2x - q_2)^{l_2} \dots (x^2 - p_rx - q_r)^{l_r}$, де $x_1, x_2, \dots, x_s$ – попарно різні дійсні корені цього многочлена, $k_1, k_2, \dots, k_s$ – їх кратності, квадратні тричлени (що відповідають попарно різним парам спряжених коренів j і j кратностей $l_1, l_2, \dots, l_r$) $x^2 - p_jx - q_j$, $j = 1, 2, \dots, r$ з дійсними коефіцієнтами не мають дійсних коренів (тобто $p_j^2 - 4q_j < 0$), $k_1 + k_2 + \dots + k_s + 2(l_1 + l_2 + \dots + l_r) = n$.

3. Дріб представляється у вигляді суми простих дробів з невизначеними коефіцієнтами:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{1,1}}{x - x_1} + \frac{A_{1,2}}{(x - x_1)^2} + \frac{A_{1,3}}{(x - x_1)^3} + \dots + \frac{A_{1,k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \frac{A_{2,1}}{x^2 - p_1x - q_1} + \frac{A_{2,2}}{(x^2 - p_1x - q_1)^2} + \dots + \frac{A_{2,k_2}}{(x^2 - p_1x - q_1)^{k_2}} + \dots + \frac{A_{s,1}}{x - x_s} + \frac{A_{s,2}}{(x - x_s)^2} + \dots + \frac{A_{s,k_s}}{(x - x_s)^{k_s}} + \frac{M_{1,1}x + N_{1,1}}{x^2 - p_1x - q_1} + \frac{M_{1,2}x + N_{1,2}}{(x^2 - p_1x - q_1)^2} + \dots + \frac{M_{1,l_1}x + N_{1,l_1}}{(x^2 - p_1x - q_1)^{l_1}} + \frac{M_{2,1}x + N_{2,1}}{x^2 - p_2x - q_2} + \frac{M_{2,2}x + N_{2,2}}{(x^2 - p_2x - q_2)^2} + \dots + \frac{M_{2,l_2}x + N_{2,l_2}}{(x^2 - p_2x - q_2)^{l_2}} + \dots + \frac{M_{r,1}x + N_{r,1}}{x^2 - p_rx - q_r} + \frac{M_{r,2}x + N_{r,2}}{(x^2 - p_rx - q_r)^2} + \dots + \frac{M_{r,l_r}x + N_{r,l_r}}{(x^2 - p_rx - q_r)^{l_r}}.$$

4. Права частина розкладу приводиться до спільного знаменника. Спільні знаменники зліва і справа скорочуються, і з умови рівності чисельників складається система лінійних рівнянь для знаходження невизначених коефіцієнтів. Використовуються способи:

4.1. Спосіб частинних значень. У рівність підставляються різні значення x і таким чином складаються рівняння системи. Спочатку беруться корені $Q_m(x)$; якщо усі корені знаменника – дійсні різні числа, будуть знайдені усі невизначені коефіцієнти.

4.2. Прирівнюються коефіцієнти при однакових степенях x многочленів зліва і справа від знака рівності. При цьому кількість рівнянь обов'язково буде рівна кількості невизначених коефіцієнтів.

4.3. Комбінований спосіб. Деякі коефіцієнти визначаються по частинним значенням, для знаходження інших складаються рівняння по способу 4.2.

5. Виконується інтегрування простих дробів.

 $I = \int \frac{x^3}{(x-1)(x-3)} dx.$

Дріб неправильний, тому виділяємо цілу частину:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-3)} = \frac{x^3}{x^2-2x-3} = x^2 + \frac{7x-6}{(x-1)(x-3)}.$$

Правильний дріб представляємо у вигляді

$$\frac{7x-6}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}.$$

Зводимо суму зліва до спільного знаменника:

$$\frac{7x-6}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{(A+B)x - (3A+B)}{(x-1)(x-3)}.$$

Рівність чисельників:

$A(x-3) + B(x-1) = 7x-6$. Підставивши у цю рівність $x=1$, отримаємо: $4A = 7-6 = 1$, $A=1/4$; при $x=-3$ отримаємо $-4B = -21-6 = -27$, $B=27/4$. Якщо прирівнювати коефіцієнти при однакових степенях x , отримаємо систему:

$$\begin{cases} A+B=7; \\ 3A+B=6; \end{cases} \quad 4A=1 \quad A=1/4 \quad B=7-A=27/4, \text{ тобто той же результат.}$$

Отже,

$$I = \int \frac{x^3}{(x-1)(x-3)} dx = \int x^2 + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{27}{4(x-3)} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{27}{4} \ln|x-3| + C.$$

 $I = \int \frac{2x^2-2x-13}{(x-2)(x^2-1)^2} dx.$

Розклад має вигляд: $\frac{2x^2-2x-13}{(x-2)(x^2-1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2-1} + \frac{Dx+E}{(x^2-1)^2}$. Приводимо до спільного знаменника:

$$\frac{2x^2-2x-13}{(x-2)(x^2-1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2-1} + \frac{Dx+E}{(x^2-1)^2} = \frac{A(x^2-1)^2 + (Bx+C)(x-2)(x^2-1) + (Dx+E)(x-2)}{(x-2)(x^2-1)^2}.$$

$$\frac{2x^2-2x-13}{(x-2)(x^2-1)^2} = \frac{A(x^2-1)^2 + (Bx+C)(x-2)(x^2-1) + (Dx+E)(x-2)}{(x-2)(x^2-1)^2} = \frac{A(x^4-2x^2+1) + (Bx+C)(x^3-2x^2-x+2) + (Dx+E)(x-2)}{(x-2)(x^2-1)^2}.$$

$$\begin{aligned} & (2B+C-2D-E)x + (A-2C-2E) \\ x^4 & | A+B=0 \quad B=A; \\ x^3 & | 2B+C=0 \quad C=-2B; \\ x^2 & | 2A-B+2C-D+2 \quad D=3; \\ 1 & | A-2C-2E=13 \quad E=4. \end{aligned}$$

Звідси:

$$I = \int \frac{1}{x-2} + \frac{x-2}{x^2-1} - \frac{3x-4}{(x^2-1)^2} dx = \ln|x-2| + \frac{1}{2} \frac{2xdx}{x^2-1} - \frac{3}{2} \frac{2xdx}{(x^2-1)^2} - 4 \frac{dx}{(x^2-1)^2}.$$

$$\ln|x-2| + \frac{1}{2} \frac{d(x^2-1)}{x^2-1} - 2 \arctg x + \frac{3}{2} \frac{d(x^2-1)}{(x^2-1)^2}$$

$$4 \frac{dx}{(x^2-1)^2} = \ln|x-2| + \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + 2 \arctg x - \frac{3}{2(x^2-1)} - \frac{4}{2} \arctg x - \frac{x}{x^2-1} + C$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{(x-2)^2}{x^2-1} - \frac{1}{2} \frac{3-4x}{x^2-1} - 4 \arctg x + C.$$



$$I = \frac{6x^2 - 46x + 95}{(x-4)^3} dx.$$

Представлення підінтегральної функції у вигляді суми простих дробів:

$$\frac{6x^2 - 46x + 95}{(x-4)^3} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)^3} = \frac{A(x-4)^2 + B(x-4) + C}{(x-4)^3} = \frac{Ax^2 + (8A-B)x + 16A-4B+C}{(x-4)^3}.$$

При $x = -4$: $C = 6$, $16 - 46 + 4 = 95 - 7$. Коефіцієнт при x^2 : $A = 6$. Коефіцієнт при x : $8A + B = 46$,

$$B = 46 - 48 = -2.$$

Тому

$$I = \int \frac{6x^2 - 46x + 95}{(x-4)^3} dx = \int \left(\frac{6}{x-4} - \frac{2}{(x-4)^2} + \frac{7}{(x-4)^3} \right) dx = 6 \ln|x-4| + \frac{2}{x-4} - \frac{7}{2(x-4)^2} + C.$$

5.9. Інтегрування функцій, які раціонально залежать від $\sin x$, $\cos x$.

Розглянемо інтеграли $\int R(\sin x, \cos x) dx$, де функція $R(\sin x, \cos x)$, що раціонально залежить від $\sin x$, $\cos x$, – відношення двох многочленів відносно цих функцій.

5.9.1. Універсальна тригонометрична підстановка.

Перехід у підінтегральній функції до змінної $t = \tan \frac{x}{2}$ перетворює $R(\sin x, \cos x)$ у функцію, яка раціонально залежить від t ; методи інтегрування таких функцій розглянуті у

попередньому розділі. Виразимо $\sin x$, $\cos x$, dx через t : $\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}$ (ділимо на

$$\cos^2 \frac{x}{2}) = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} \quad (\text{ділимо на } \cos^2 \frac{x}{2}) = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = 2 \arctan t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \text{ В}$$

результаті усі компоненти підінтегральної функції виражаються через функції, які раціонально залежать від t .



$$\frac{dx}{8 - 4 \sin x - 7 \cos x} = \left| t - \tan \frac{x}{2} \right| \frac{2 \frac{dt}{1+t^2}}{8 - 4 \frac{2t}{1+t^2} - 7 \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2dt}{8 - 8t^2 - 8t + 7 + 7t^2} = \frac{2dt}{t^2 - 8t + 15}$$

$$= \frac{2d(t-4)}{(t-4)^2 - 1} = \frac{2}{2} \ln \left| \frac{t-4+1}{t-4-1} \right| = \ln \left| \frac{t-3}{t-5} \right| + C = \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 3}{\tan \frac{x}{2} - 5} \right| + C.$$

Універсальна тригонометрична підстановка завжди раціоналізує підінтегральну функцію, з її допомогою легко беруться інтеграли виду $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$ (a, b, c – сталі).

5.9.2. Частинні тригонометричні підстановки.

- 1) Підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$, тобто $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.
Підстановка $t = \cos x$.
- 2) Підінтегральна функція непарна відносно $\cos x$, тобто $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.
Підстановка $t = \sin x$.
- 3) Підінтегральна функція парна відносно $\sin x$ і $\cos x$, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

Підстановка $t = \operatorname{tg} x$ (або $t = \operatorname{ctg} x$). $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$; $x = \operatorname{arctg} t$; $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

 $\frac{\sin^3 x}{\cos x} dx.$

Підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$: $\frac{(\sin x)^3}{\cos x} = \frac{\sin^3 x}{\cos x}$, тому

$$\frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x, x = \arccos t, \\ \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - t^2}, \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \end{array} \right| = \frac{(\sqrt{1 - t^2})^3}{t} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1 - t^2}{t} dt = \frac{t^2 - 9}{t} dt$$

$$= \left(t - \frac{9}{t} \right) dt = \frac{t^2}{2} - 9 \ln |t| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 9 \ln |\cos x| + C.$$

(можна перейти до $t = \cos x$ більш просто:

$$\frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \frac{\sin^2 x}{\cos x} (\sin x dx) = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} d(\cos x) \text{ і т.д.})$$

 $\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$ (Підінтегральна функція непарна відносно $\cos x$) =

$$\left| \begin{array}{l} \sin x = t; x = \arcsin t; \\ \cos x = \sqrt{1 - t^2}; dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \end{array} \right| = \frac{(\sqrt{1 - t^2})^3}{t^4} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1 - t^2}{t^4} dt = \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{3\sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} + C$$

 $\frac{dx}{4\sin^2 x - 4\sin x \cos x - 8\cos^2 x - 3}$ (підінтегральна функція не змінюється при одночасній зміні знака у $\sin x$ і $\cos x$, тому $t = \operatorname{tg} x$)

$$\frac{dx}{4\sin^2 x - 4\sin x \cos x - 8\cos^2 x - 3} = \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{4\frac{t^2}{1+t^2} - 4\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 8\frac{1}{1+t^2} - 3} = \frac{dt}{4t^2 - 4t - 8 - 3(1+t^2)} = \frac{dt}{-t^2 - 4t - 11}$$

$$= \frac{d(t+2)}{(t+2)^2 - 5} = \operatorname{arctg}(t+2) + C = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + 2) + C.$$

При знаходженні таких інтегралів для пониження степеня користуються основною тригонометричною тотожністю:

$$\frac{dx}{\cos^3 x \sin x} = \frac{\cos^2 x \sin^2 x}{\cos^3 x \sin x} dx = \frac{dx}{\cos x \sin x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \frac{dx / \cos^2 x}{\sin x / \cos x} = \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} = \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}$$

$$\frac{1}{2 \cos^2 x} C = \ln |\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2 \cos^2 x} C.$$



$$\operatorname{tg}^5 x dx = \operatorname{tg}^3 x \sin^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^3 x \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} d(\operatorname{tg} x)$$

$$\frac{(\operatorname{tg}^5 x - \operatorname{tg}^3 x)(\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x) \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 x - 1) C.$$



$$\operatorname{ctg}^4 x dx = \operatorname{ctg}^2 x \cos^2 x \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg}^2 x \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} d(\operatorname{ctg} x) = \frac{\operatorname{ctg}^4 x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} d(\operatorname{ctg} x)$$

$$\frac{(\operatorname{ctg}^4 x - \operatorname{ctg}^2 x)(\operatorname{ctg}^2 x - 1)}{\operatorname{ctg}^2 x - 1} d(\operatorname{ctg} x) = \operatorname{ctg}^2 x - 1 - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x - 1} d(\operatorname{ctg} x) = \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \operatorname{ctg} x - x C.$$

5.9.3. Інтегрування добутку парних степенів $\sin x$, $\cos x$.

При обчисленні інтегралів $\sin^{2m} x \cos^{2m} x dx$ потрібно понизити степінь тригонометричних функцій переходом до косинуса подвійного кута: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. Кут подвоюється до тих пір, поки один із степенів не стане непарним.



$$\cos^4 x \sin^2 x dx = \frac{1 - \cos 2x}{2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8} (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x)(1 - \cos 2x) dx$$

$$\frac{1}{8} (1 - \cos 2x + \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx = \frac{1}{8} dx - \frac{1}{8} \cos 2x dx + \frac{1}{8} \cos^2 2x dx - \frac{1}{8} \cos^3 2x dx$$

$$\frac{x}{8} - \frac{\sin 2x}{16} - \frac{1}{8} \frac{1 - \cos 4x}{2} dx + \frac{1}{8} \cos^2 2x (\cos 2x dx) = \frac{x}{8} - \frac{\sin 2x}{16} - \frac{x}{16} + \frac{\sin 4x}{64} + \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} C = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} C.$$

5.9.4. Інтегрування добутків синусів і косинусів кратних дуг.

При знаходженні інтегралів виду $\sin mx \cos nx dx$, $\sin mx \sin nx dx$, $\cos mx \cos nx dx$ за допомогою тригонометричних формул:

$$\sin \cos \frac{1}{2} \sin(\quad) \sin(\quad) , \quad \sin \sin \frac{1}{2} \cos(\quad) \cos(\quad) ,$$

$$\cos \cos \frac{1}{2} \cos(\quad) \cos(\quad) .$$

Задача зводиться до інтегрування лінійної комбінації тих же функцій (з другими аргументами).



$$\sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{4} dx = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{3} \frac{x}{4} - \sin \frac{x}{3} \frac{x}{4} dx$$

$$\frac{1}{2} \sin \frac{7x}{12} dx = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{12} dx = \frac{1}{2} \frac{12}{7} \cos \frac{7x}{12} - \frac{1}{2} \frac{12}{1} \cos \frac{x}{12} + C = \frac{6}{7} \cos \frac{7x}{12} - 6 \cos \frac{x}{12} + C .$$

5.10. Інтегрування деяких алгебраїчних ірраціональностей.

5.10.1. Інтеграли виду $R(x, \sqrt[n]{x})dx$, де n – натуральне число, $R(x, \sqrt[n]{x})$ – функція, що раціонально залежить від своїх аргументів.

Приклад такої функції: $\frac{3x}{x^2} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} = \frac{3x}{x^2} \frac{(\sqrt[12]{x})^4}{(\sqrt[12]{x})^3} = R(x, \sqrt[12]{x})$. До такого типу зводяться інтеграли виду: $R(x, x^p, x^q, x^r, \dots)dx$, де $p, q, r, \dots$ – раціональні числа, так як, якщо n – спільний знаменник чисел $p, q, r, \dots$, то підінтегральна функція раціонально залежить від x і $x^{\frac{1}{n}}$. Підстановка $x=t^n$ раціоналізує підінтегральну функцію, тобто зводить її до раціональної функції змінної t .



$$\frac{\sqrt{x}}{x} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx .$$

Найменше спільне кратне показників коренів рівне 6, тому використовуємо підстановку: $x=t^6$:

$$\frac{\sqrt{x}}{x} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \left| x = t^6; dx = 6t^5 dt \right| = \frac{t^3}{t^6} \frac{6t^5 dt}{t^4} = 6 \frac{t^4}{t^2} \frac{1}{1} dt = 6 \frac{t^4}{t^2} \frac{1}{1} dt$$

$$= 6 (t^2 - 1) dt = 6 \frac{dt}{t^2 - 1} = 2t^3 - 6t - 3 \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} - 3 \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1} \right| + C .$$

5.10.2. Інтеграли виду $R \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx$, де a, b, c, d – сталі, інші параметри

раціоналізуються підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$.



$$\sqrt[3]{\frac{1-x}{1-x^3}} \frac{dx}{(1-x)^2} \left| \frac{1-x}{1-x^3} t^3, 1-x t^3, x \frac{1-t^3}{1-t^3} 1 \frac{2}{1-t^3}, \right. \left. \frac{6}{4} t(1-t^3)^2 \frac{t^2 dt}{(1-t^3)^2} \right.$$

$$\left. \frac{3}{2} t^3 dt \frac{3}{8} t^4 C \frac{3}{8} \sqrt[3]{\frac{1-x}{1-x^3}}^4 C \right.$$

5.10.3. Тригонометричні підстановки для інтегралів виду $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$.

1. $R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$ раціоналізується підстановкою $x = a \sin t$ (або $x = a \cos t$).
2. $R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$ раціоналізується підстановкою $x = \frac{a}{\sin t}$ (або $x = \frac{a}{\cos t}$, або $x = a \csc t$).
3. $R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$ раціоналізується підстановкою $x = a \tan t$ (або $x = a \cot t$, або $x = a \operatorname{sh} t$).



$$\frac{x^2 - x - 1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

Інтеграл виду $R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$, підстановка $x = a \sin t$. $\cot^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}$, $dx = \frac{dt}{\sin^2 t}$,

тому $\frac{x^2 - x - 1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}} dx = (\sin t) \frac{1}{\sin^2 t} \cot t dt$

$$(\sin t) \frac{1}{\sin^2 t} \cot t dt = \cos t dt = \frac{dt}{\sin t} = \sin t \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + C = \sin t \ln \left| \cot \frac{t}{2} \right| + C$$

$$\sin(\arcsin x) \ln \left| \cot \frac{\arcsin x}{2} \right| + C.$$



$$\frac{dx}{(x^2 - 2)\sqrt{x^2 - 1}} \left| x = \frac{1}{\cos t}, dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt, x^2 - 1 = \frac{1}{\cos^2 t} - 1 = \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \right| = \frac{\cos t dt}{1 - 2 \cos^2 t}$$

$$\frac{d \sin t}{3 - 2 \sin^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d \sqrt{2} \sin t}{2 \sin^2 t - 3} = \frac{1}{2\sqrt{2} \sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \sin t - \sqrt{3}}{\sqrt{2} \sin t + \sqrt{3}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \sin t - \sqrt{3}}{\sqrt{2} \sin t + \sqrt{3}} \right| + C$$

$$\left| \sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \cos t \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right| = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2(x^2 - 1)} - \sqrt{3}x}{\sqrt{2(x^2 - 1)} + \sqrt{3}x} \right| + C.$$



Вправи для самостійного розв'язування

1. $\frac{x^3 - 2\sqrt{x} - 4x}{\sqrt[3]{x}} dx$

3. $\frac{(2 - \sqrt{x})(x^2 - 5)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

5. $2 - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

7. $1 - \frac{x^2}{1 - x^2} dx$

9. $\frac{x - 2}{\sqrt{x}} dx$

11. $\frac{(x^2 - 4x)^3}{3x^5} dx$

13. $\frac{(x - 3)(x - 3)}{x^3 - 9x} dx$

15. $\frac{dx}{9 - 2x^2}$

17. $\frac{dx}{\sqrt{3 - 2x^2}}$

19. $(3\sin 2x - 2\cos x) dx$

21. $(2\sin x - \cos x) dx$

23. $(2^x - 3^x - \cos x - \sin x) dx$

25. $\sin 6x dx$

27. $\sin^3 x \cos x dx$

29. $\operatorname{ctg} x dx$

31. $(\cos 3x - 4) dx$

33. $\sin^2 \frac{x}{2} dx$

35. $e^x - 1 - \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} dx$

37. $\frac{\sqrt{x} - 1^3}{x} dx$

2. $\frac{(1 - \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx$

4. $\frac{x - \sqrt{1 - x^2}}{x\sqrt{1 - x^2}} dx$

6. $\frac{1}{1 - z} - \frac{1}{1 + z} dz$

8. $\frac{x\sqrt{x} - \sqrt[5]{x}}{x^3} dx$

10. $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

12. $1 - \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

14. $\frac{dx}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}}$

16. $\frac{dx}{8 - 5x^2}$

18. $\frac{dx}{\sqrt{36 - 49x^2}}$

20. $(x^3 - 3x^2 - 2x - 1) dx$

22. $(x - 1)^2 e^x dx$

24. $\cos^2 \frac{x}{2} dx$

26. $\operatorname{ctg}^2 x dx$

28. $\cos^2 \frac{x}{2} dx$

30. $e^{\sin x} \cos x dx$

32. $\sqrt{3} \sin 5x \cos 5x dx$

34. $x^4 - \sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} dx$

36. $\frac{3}{1 - x^2} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

38. $\frac{dx}{\sqrt{25 - 4x^2}}$

$$39. \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$$

$$41. \frac{x^2}{1-x^2} dx$$

$$43. 4^x - 3 \frac{4^x}{\sqrt{x}} dx$$

$$45. \frac{x^5 - x^3 - x^2 - 3}{1-x^2} dx$$

$$47. \frac{5tg^2 x - 3}{\sin^2 x} dx$$

$$49. \frac{x^2 - x - 1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$51. \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$$

$$53. \frac{e^{3x} - e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx$$

$$55. \frac{3x^2}{x^3 - 1} dx$$

$$57. \sqrt{3x-4} dx$$

$$59. \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$$

$$61. \frac{\sin x}{1-3\cos x} dx$$

$$63. \frac{xdx}{\sin^2 x}$$

$$65. x^2 \sin x dx$$

$$67. x^2 e^{-x} dx$$

$$69. (x^2 - 2x) \sin x dx$$

$$71. xe^{3x} dx$$

$$73. x \ln(3x-1) dx$$

$$75. (x^2 - 3x - 3) \ln x dx$$

$$77. (x-1)^2 e^{-x} dx$$

$$79. x \cos 3x dx$$

$$81. (x^3 - 1) \cos x dx$$

$$40. \cos^3 \frac{x}{2} dx$$

$$42. \frac{2x^4 - 2x^2 - 3}{1-x^2} dx$$

$$44. \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$$

$$46. \frac{x^2 - 3}{1-x^2} dx$$

$$48. \frac{3x^7 - 1}{x^4} dx$$

$$50. \frac{dx}{5x-2}$$

$$52. \frac{\arctg^3 x}{1-x^2} dx$$

$$54. \frac{\arcsin x - x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$56. \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$58. \frac{dx}{x^2 - 4x - 5}$$

$$60. \frac{\cos 3x}{\sqrt{2-5\sin 3x}} dx$$

$$62. \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$$

$$64. x \ln x dx$$

$$66. (x^2 - 4x - 2) \ln x dx$$

$$68. \arctg \sqrt{5x-1} dx$$

$$70. x^2 \ln x dx$$

$$72. \ln(1-x^2) dx$$

$$74. \cos(\ln x) dx$$

$$76. x^2 e^x dx$$

$$78. x \sin 2x dx$$

$$80. x^2 \arctg x dx$$

6.1. Сумування нескінченно малих.

Нехай задана неперервна функція на відрізку $[a; b]$ і $F(x)$ – її будь-яка первісна.

Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n частин і утворимо різницю

$$F(b) - F(a) \quad (6.1)$$

значень первісної на кінцях заданого відрізка $[a; b]$.

Різниця (6.1) дорівнює сумі таких же різниць, складених для тих відрізків, на які розбито відрізок $[a; b]$, тобто

$$F(b) - F(a) = [F(x_1) - F(a)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \dots + [F(x_i) - F(x_{i-1})] + \dots + [F(b) - F(x_{n-1})] \quad (6.2)$$

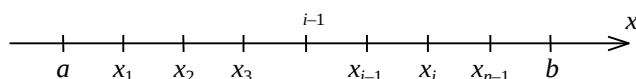


Рис. 6.1

З теореми Лагранжа про кінцевий приріст маємо рівність

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) f(\xi_{i-1}),$$

де $\xi_{i-1} \in [x_{i-1}, x_i]$.

Позначивши $x_i - x_{i-1} = \Delta x_{i-1}$ і враховуючи, що

$$f(\xi_{i-1}) = f(\xi_{i-1})$$

рівність (6.2) перепишемо у вигляді:

$$F(b) - F(a) = f(\xi_0) \Delta x_0 + f(\xi_1) \Delta x_1 + \dots + f(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1} \quad (6.3)$$

Рівність (6.3) справедлива тільки при значеннях $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$, що задовольняють теорему Лагранжа. Але якщо необмежено збільшувати число розбиттів n відрізка $[a; b]$, так що довжина відрізка Δx_{i-1} прямує до нуля, рівність (6.3) буде виконуватись і різниця $F(b) - F(a)$ буде сумою нескінченного числа спадаючих доданків:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(\xi_0) \Delta x_0 + f(\xi_1) \Delta x_1 + \dots + f(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1}] = F(b) - F(a) \quad (6.4)$$

Рівність (6.3) справедлива не тільки при певному виборі точок $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$, але і при будь-якому їх виборі.

Тому формула (6.4) є формулою сумування нескінченно малих, відкрита Лейбніцем і Ньютоном.

6.2. Поняття визначеного інтеграла. Перший підхід.

Означення. Сума

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

називається *інтегральною сумою* або *сумою Рімана*.

Означення. Кінцева границя I суми при $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$ називається *визначеним інтегралом* суми $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і позначається:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx, \quad (6.5)$$

де a, b – нижня та верхня межа інтегрування, – знак інтеграла, введений Г. Лейбніцем. У випадку існування границі I функція $f(x)$ називається *інтегрованою на проміжку $[a; b]$* . Лейбніц ввів знак інтеграла у вигляді витягнутої букви S , яка позначає знак сумування.

Вводячи поняття про визначений інтеграл, як про границю інтегральної суми і вводять його позначення, можна рівність (6.5) переписати у вигляді:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (6.6)$$

Це є відома *формула Лейбніца-Ньютона*, що пов'язує в одне обидва числення: диференціальне і інтегральне.

В інтегралі $\int_a^b f(x) dx$ буква x називається *змінною інтеграції*, і ця змінна може бути позначена і будь-якою іншою буквою, так що завжди маємо:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

Зазначимо, що означення визначеного інтеграла може бути застосовано тільки до обмеженої функції.

Теорема (необхідна умова інтегрування). Інтегрована на проміжку $[a; b]$ функція обмежена.

Доведення. Припустимо супротивне: Нехай функція $f(x)$ на проміжку необмежена. Тоді при будь-якому розбитті проміжка на частини – вона зберегла цю властивість хоча б однієї із частин, і за рахунок вибору на цій частині точки можна зробити $f(\xi_i)$, а з нею і суму – скільки завгодно велику; при цих умовах кінцеві границі для I , існувати не можуть.

6.3. Властивості визначеного інтеграла.

6.3.1. Визначений інтеграл є міра площі.

Дійсно, інтегральна сума

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \quad (6.7)$$

утворена з добутків виду

$$f(\xi_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad (6.8)$$

Нехай $\xi_{i-1} = x_{i-1}$. Тоді добуток (6.8) зображає площу прямокутника, основою якого є різниця $x_i - x_{i-1}$, а висотою – ординати $f(x_{i-1})$. Тому інтегральна сума (6.7) є сума площин таких прямокутників або площа східчної фігури, вписаної в криволінійну трапецію $AabB$, обмежену кривою $y=f(x)$ (рис. 6.2).

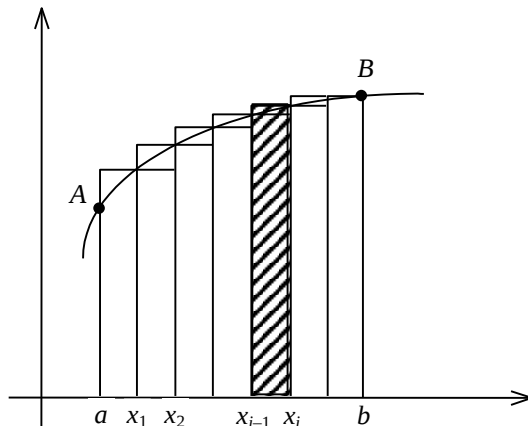


Рис. 6.2

Внаслідок цього площа криволінійної трапеції $AabB$ більше інтегральної суми (6.7). Але якщо вибрати за точки $\xi_i (i = 0, \dots, n-1)$ праві кінці відрізків $[x_{i-1}; x_i]$, то одержимо описану навколо криволінійної трапеції $AabB$. Тому площа криволінійної трапеції $AabB$ була б декілька меншою інтегральної суми (8.7).

Границя інтегральної суми (6.7) при будь-якому виборі точок ξ_i при $n \rightarrow \infty$ є визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$.

Отже, робимо висновок: Визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ дорівнює площі криволінійної трапеції.

6.3.2. При переставленні границь, визначений інтеграл змінює знак, не змінюючи абсолютної величини.

Приймаючи, що $a < b$ і що $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$ матимемо, за означенням:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_{i-1}) (x_i - x_{i-1}).$$

Якщо переставимо границі інтегрування a і b , то будемо розглядати вже відрізок $[b; a]$ і беручи ті ж самі точки розбиття, матимемо відрізки $[x_{i-1}; x_i]$, а не $[x_{i-1}; x_i]$. Отже:

$$\int_b^a f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_{i-1}) (x_{i-1} - x_i) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_{i-1}) (x_i - x_{i-1}) = - \int_a^b f(x) dx$$

Тому

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (6.9)$$

Зауваження. Цю властивість можна також довести за формулою Ньютона-Лейбніца, яка справедлива за будь-яких a і b . Зокрема, вона буде справедлива, якщо число a замінити на b , а число b числом a . Тому

$$\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b)$$

Звідси маємо формулу (8.9).

Наслідок. $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Дійсно, покладаючи в формулі $a = b$, одержуємо

$$\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(a) = 0.$$

6.3.3. Ділення відрізка інтегрування.

Нехай точка $c \in [a; b]$, то $F(x)$ – буде первісною і для функції $f(x)$ для відрізків $[a; c]$ і $[c; b]$. Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца, матимемо:

$$\int_a^c f(x) dx = F(c) - F(a),$$

$$\int_c^b f(x) dx = F(b) - F(c).$$

Отже

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx. \quad (6.10)$$

Геометрична інтерпретація:

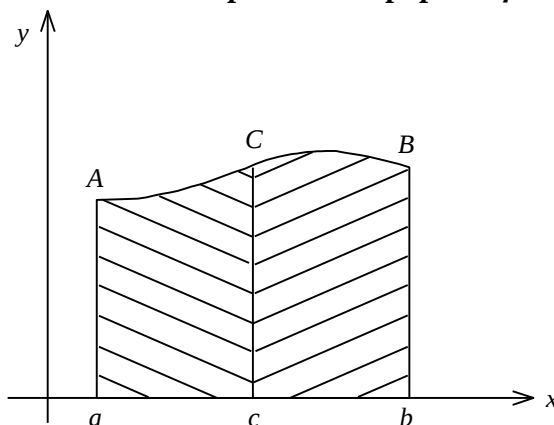


Рис. 6.3.

Площа криволінійної трапеції $AabB$ дорівнює сумі площ криволінійної трапеції $AacC$ і $CcbB$ (рис. 6.3).

6.3.4. Знак визначеного інтеграла.

Якщо

$$f(x) > 0 \text{ для } x \in (a; b), a < b,$$

то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Якщо $f(x) > 0$, $a < b$, то $\int_a^b f(x)dx > 0$. Якщо $f(x) < 0$ для $x \in (a; b)$, $a < b$, тоді $\int_a^b f(x)dx < 0$.

За означенням визначений інтеграл є границя інтегральної суми:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

У випадку $f(x) > 0$, $a < b$ доданки $f(\xi_i) \Delta x_i$ інтегральної суми має додатне значення, бо обидва множники $f(\xi_{i-1})$ і Δx_{i-1} , додатні.

Якщо, $a > b$, то хоча $f(\xi_{i-1}) > 0$, множник Δx_{i-1} від'ємний, бо

$$\Delta x_{i-1} = \xi_i - \xi_{i-1} \text{ і } a > \xi_1 > \xi_2 > \dots > \xi_{i-1} > \xi_i > \dots > b.$$

Розглядаючи доданки $f(\xi_{i-1}) \Delta x_{i-1}$ інтегральної суми, матимемо, що множник $f(\xi_i) < 0$, множник Δx_{i-1} додатній, бо $a < b$.

Геометрична інтерпретація:

1. Площа кривої має різні знаки по різні сторони кожної межі інтегрування a . (Рис. 6.4).

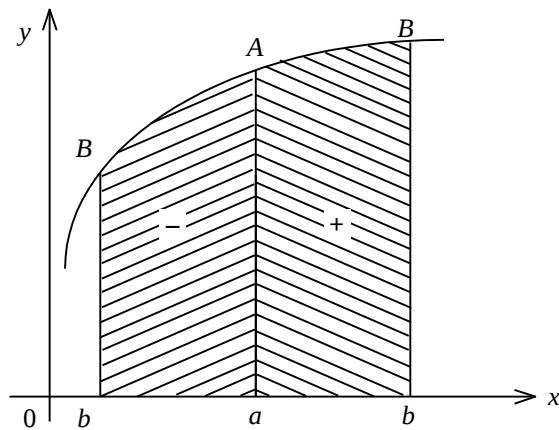


Рис. 6.4

2. Площі кривих, розташованих над віссю абсцис, вважаються додатними, а площі кривих, розташованих під віссю абсцис, – від'ємними (рис. 6.5).

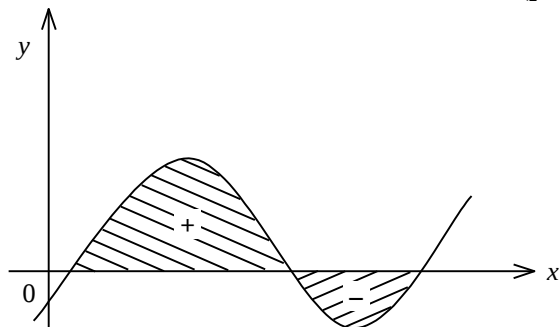
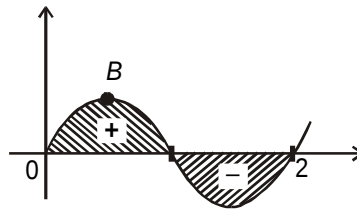


Рис. 6.5



Знайти суму площин двох сусідніх хвиль синусоїди

$$\int_0^2 \sin x dx = (-\cos x) \Big|_0^2 = -\cos 2 + \cos 0 = 1 - \cos 2 \approx 0.416$$



6.3.5. Якщо $f(x) > g(x)$ для $x \in (a; b)$, $a < b$, то

$$\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx.$$

Дійсно, визначимо знак різниці:

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

6.3.6. Визначений інтеграл суми функцій розбивається на алгебраїчну суму інтегралів.

$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad (6.11)$$

Розглянемо інтегральну суму

$$\sum_{i=0}^{n-1} (f(\xi_i) \pm g(\xi_i)) \Delta x_i,$$

яку в силу дистрибутивності можна розкласти на дві суми

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \pm \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \Delta x_i.$$

Переходячи до границі при $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$ матимемо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (f(\xi_i) \pm g(\xi_i)) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \Delta x_i$$

тобто виконує рівність (7.11).

6.3.7. Сталій множник виноситься за знак визначеного інтеграла.

$$\int_a^b \text{const} f(x) dx = \text{const} \int_a^b f(x) dx \quad (6.12)$$

Згідно означення визначеного інтегралу

$$\int_a^b \text{const} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \text{const} f(\xi_i) \Delta x_i$$

Але в інтегральній сумі сталій множник можна винести за знак суми

$$\sum_{i=0}^{n-1} \text{const} f(x_i) \Delta x_i = \text{const} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i$$

Переходячи до границі, матимемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \text{const} f(x_i) \Delta x_i = \text{const} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i$$

6.3.8. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a; b]$ і $a < b$, тоді

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (6.13)$$

Рівність (6.13) легко одержується, якщо безпосередньо перейти до границь, в нерівності для інтегральних сум

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_i)| \Delta x_i.$$

6.3.9. Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a; b]$, де $a < b$, і якщо на цьому проміжку має нерівність

$$m \leq f(x) \leq M,$$

то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (6.14)$$

Рівність (6.14) одержимо, якщо безпосередньо перейдемо до границь в нерівності

$$m \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i \leq M \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i$$

і враховуючи, що $\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = b - a$.

Теорема про середнє значення. Нехай $f(x)$ – інтегровна на $[a; b]$ функція і нехай на всьому проміжку $m \leq f(x) \leq M$. Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot \eta \quad (6.15)$$

де $m \leq \eta \leq M$.

Доведення. Якщо $a < b$, то за властивістю 6.14 будемо мати:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

звідси

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Якщо $a > b$, то проводимо ті ж самі пояснення, а потім приходимо до рівності (6.15).

Випадок неперервності функції $f(x)$.

Якщо вважати числа m і M – найбільшим і найменшим значеннями функції (вони існують за теоремою Вейєрштрасса), то проміжне значення, за теоремою Больцано-Коші, функція $f(x)$ приймає в деякій точці c проміжка $[a; b]$.

Таким чином,

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(c), \quad c \in [a; b]$$

Геометрична ілюстрація.

Нехай $f(x) \geq 0$. Розглянемо криволінійну фігуру $ABCD$ (рис. 6.6) під кривою $y = f(x)$. Тоді площа криволінійної фігури (що виражена визначеним інтегралом) дорівнює площі прямокутника з основою AB і висотою LM .

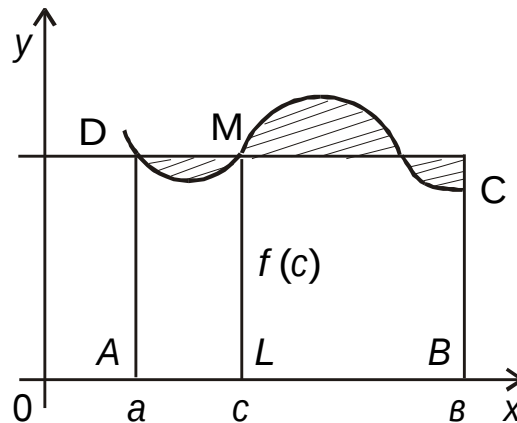


Рис. 6.6

6.3.10. Узагальнена теорема про середнє значення.

Нехай: 1) $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні в проміжку $[a; b]$;

2) $m \leq f(x) \leq M$;

3) $g(x) \geq 0$ [або $g(x) \leq 0$].

Тоді

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx, \quad \text{де } m \leq f(x) \leq M. \quad (6.16)$$

Доведення. Не порушуючи загальності покладемо $g(x) \geq 0$ і $a < b$; тоді матимемо:

$$m g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x).$$

Із цієї нерівності отримаємо

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx \quad (6.17)$$

Із-за того, що $g(x) \geq 0$, матимемо:

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

6.4. Визначений інтеграл як функція верхньої межі.

Якщо функція $y = f(x)$ інтегровна на проміжку $[a; b]$, то вона інтегровна і на проміжку $[a; x]$, де $x \in [a; b]$. Замінюючи межу b у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ змінної x , отримаємо вираз:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (6.18)$$

який є функцією від x .

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ інтегровна на $[a; b]$, то функція $\Phi(x)$ буде неперервною від a на тому ж проміжку.

Доведення. Надамо змінній x приріст Δx так щоб значення $x + \Delta x$ не виходило за межі розглядаємо проміжку. Отримаємо нове значення функції (6.18):

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x + \Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x + \Delta x} f(t)dt \quad (6.19)$$

Віднімемо із рівності (6.19) рівність (6.18):

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x + \Delta x} f(t)dt \quad (6.19^*)$$

Застосуємо до рівності (6.19*) теорему про середнє значення:

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = f(\xi) \Delta x,$$

де $\xi \in [x, x + \Delta x]$, $m \leq f(\xi) \leq M$,

$$M = \sup_{[x, x + \Delta x]} f(x).$$

Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \rightarrow 0 \text{ або } \Phi(x + \Delta x) = \Phi(x),$$

що доводить неперервність функції $\Phi(x)$.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці $t = x$, то в цій точці функція $\Phi(x)$ має похідну, рівну $f(x)$:

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Доведення: Дійсно, із (6.18) матимемо

$$\frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x + \Delta x} f(t)dt, \text{ де } m \leq f(t) \leq M$$

Функція $f(x)$ неперервна при $t = x$, отже, за будь-яким $\epsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що при $|\Delta x| < \delta$:

$$|f(x) - f(t)| < \epsilon$$

для усіх значень t на проміжку $[x; x + \Delta x]$. В такому випадку мають місце нерівності:

$$f(x) - \epsilon \leq \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x + \Delta x} f(t)dt \leq f(x) + \epsilon.$$

так що

$$|\frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} - f(x)| < \epsilon$$

Як то, що

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+x) - (x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

Ми отримали висновок який має принципове значення:

Для неперервної на проміжку $[a; b]$ функції $y = f(x)$ завжди існує первісна прикладом її є визначений інтеграл (6.17) зі змінною верхньою межею.

6.5. Поняття визначеного інтеграла. Другий підхід.

Нехай на відрізку $[a; b]$ задана обмежена функція $y = f(x)$. Розглянемо розбиття T відрізка $[a; b]$ точками ділення:

$$a_0 \quad x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{n-1} \quad x_n \quad b$$

на кожному відрізку розбиття $[x_k; x_{k+1}]$ знайдемо нижню і верхню межу значень функції $y = f(x)$ відповідно m_k і M_k :

$$m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x),$$

$$M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x).$$

Означення. Дві суми $S_D = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k)$ і $S_D = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k)$, якщо $x_k = x_{k+1} - x_k$ відповідно

називаються *нижньою і верхньою сумами Дарбу*.

Властивості сум Дарбу:

1. Для кожного розбиття T виконується нерівність:

$$S_D \leq S_D$$

2. Якщо розбиття D_2 одержується із розбиття D_1 додаванням декількох нових точок, то $S_{D_1} \leq S_{D_2}$, $S_{D_1} \leq S_{D_2}$, тобто при зменшенні розбиття нижні суми Дарбу можуть тільки збільшитися, а верхні суми тільки зменшаться.

3. Для будь-яких розбиттів D_1 і D_2 виконується нерівність

$$S_{D_1} \leq S_{D_2},$$

тобто будь-яка нижня сума Дарбу не перевищує будь-якої суми.

Означення. Функція $y = f(x)$, обмежена на відрізку називається *інтегрованою на цьому відрізку*, якщо існує єдине число I , що розділяє множини нижніх і верхніх сум Дарбу для будь-яких розбиттів відрізка $[a; b]$. Якщо функція $y = f(x)$ інтегровна на відрізку $[a; b]$, то єдине число, що розділяє ці дві множини, називаються *визначеним інтегралом* функції $y = f(x)$ по відрізку $[a; b]$ і позначають наступне:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$



Розглянемо функцію Діріхле. Розглянемо функцію Діріхле $y = D(x)$ на відрізку $[0; 1]$:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \text{ ірраціональне;} \\ 1, & \text{якщо } x \text{ раціональне.} \end{cases}$$

Ця функція є типовим прикладом обмеженої неінтегрованої функції.

Дійсно, візьмемо будь-яке розбиття T , у будь-якому відрізку розбиття $[x_k; x_{k+1}]$ обов'язково містяться як раціональні так і ірраціональні точки, отже для будь-якого відрізка $k : m_k = 0, M_k = 1$. Тоді всі нижні суми Дарбу $\sum_{k=0}^{n-1} m_k X_k = 0$, оскільки усі $m_k = 0$, і усі верхні суми Дарбу $\sum_{k=0}^{n-1} M_k x_k = 1$ або $\sum_{k=0}^{n-1} M_k x_n = \sum_{k=0}^{n-1} 1 x_n = 1$ – довжина відрізка $[0; 1]$.

Таким чином, множина нижніх сум містить одне число $X = \{0\}$ і множина верхніх сум містить одне число $Y = \{1\}$, таким чином, що будь-яке число із відрізка $[0; 1]$ розділяє множину X і Y . Значить, функція Діріхле не є інтегровною на відрізку $[0; 1]$.

Теорема (критерій інтегровності). Для того щоб функція $y = f(x)$ визначена і обмежена на відрізку $[a; b]$, була інтегровною на цьому відрізку необхідно і достатньо щоб для будь-якого $\epsilon > 0$ існувало розбиття T таке, що $S_D - S_D < \epsilon$.

Доведення. Достатність очевидна: покладемо $\epsilon = \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \dots$, отримаємо систему відрізків, що стягуються $[S_{2n}; S_{2n}]$, яка і буде єдиним розділяючим числом.

Нехай, навпаки, відомо, що розділяюче число єдине. Тоді для будь-якого $\epsilon > 0$ в інтервал $(I - \epsilon/2; I + \epsilon/2)$ довжини ϵ попадають точки із $\{S_D\}$ і $\{S_D\}$. Отже, знайдуться розбиття T_1 і T_2 такі, що

$$S_D^{T_1} - S_D^{T_1} < \epsilon.$$

Візьмемо за T розбиття яке включає точки із T_1 і із T_2 . Тоді за властивістю сум Дарбу матимемо:

$$S_D^{T_1} - S_D^{T_1}, S_D^{T_2} - S_D^{T_2} < \epsilon.$$

Звідси

$$S_D^T - S_D^T < \epsilon \quad (6.20)$$

Означення. Різниця $M_k - m_k$ називається коливанням функції $f(x)$ на відрізку $[x_k; x_{k+1}]$ і позначається ω_k .

З урахуванням означення нерівність (6.20) можна переписати наступним чином:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k X_k < \epsilon \quad (6.21)$$

6.6. Інтегровність неперервної функції.

Теорема. Функція неперервна на відрізку $[a; b]$ інтегровна на цьому відрізку.

Доведення. Візьмемо довільне $\epsilon > 0$.

За властивістю рівномірної неперервності знайдеться таке розбиття T відрізка $[a; b]$, що для всіх відрізків розбиття буде виконуватись нерівність $\omega_k < \frac{\epsilon}{b-a}$. Тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k X_k < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} X_k < \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) = \epsilon.$$

Це означає інтегровність функції на відрізку $[a; b]$.

6.7. Основна формула інтегрального числення.

Відомо, що для неперервної на проміжку $[a; b]$ функції $f(x)$ інтеграл

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

є первісною. Якщо $F(x)$ – будь-яка первісна для $f(x)$ функція, то

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Сталу C можна визначити, якщо покласти $x = a$ або $\Phi(a) = 0$. Будемо мати

$$0 = \Phi(a) = F(a) + C, \text{ звідси } C = -F(a)$$

Остаточно,

$$\Phi(x) = F(x) - F(a).$$

Зокрема при $x = b$, отримаємо

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ або}$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (6.22)$$

де $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Це – *формула Ньютона-Лейбніца* – основна формула інтегрального числення.

За допомогою формули (6.22) встановлюється зв'язок між теоремами про середнє в диференціальному і інтегральному численні.



$$1. \int_a^b \sin x dx = -\cos x \Big|_a^b = -\cos b + \cos a.$$

$$2. \int_a^b \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right] \Big|_a^b, \quad (n \neq m).$$

6.8. Формули зведення. Формула інтегрування частинами.

Основна формула інтегрального числення може в деяких випадках зразу давати значення визначеного інтегралу. З іншого боку, за її допомогою різні формули зведення в теорії невизначених інтегралів перетворюються в аналогічні формули вже в визначених інтегралах, що дозволяє обчислення одного інтеграла зводити до обчислення другого більш простого інтеграла.

Загальна форма формул зведення має вигляд:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \quad (6.23)$$

Якщо областю застосування подібної формули є проміжок $[a; b]$, то її у визначених інтегралах відповідає формула

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \quad (6.24)$$

де функції f і g – неперервні

Дійсно, позначимо інтеграл $\int g(x)dx$ через $\Phi(x)$:

$$\int g(x)dx = \Phi(x).$$

Тоді за основною формулою матимемо:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\Phi(x) \right]_a^b = \Phi(x) \Big|_a^b - \Phi(a)$$

Але

$$\int_a^b g(x)dx = \Phi(x) \Big|_a^b,$$

тому приходимо до формули (8.24).

Зокрема, формула інтегрування частинами приймає вигляд:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (6.25)$$

а узагальнена формула переходить в таку:

$$\int_a^b u v^{(n-1)} dx = u v^{(n)} - u' v^{(n-1)} - \dots - (-1)^{n-1} u^{(n-1)} v \Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)} v dx \quad (6.26)$$

Формула (6.24) встановлює відношення між числами і вона простіша формули (6.23), яка встановлює відповідності між функціями.

 Обчислити інтеграл $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$.

За формулою (6.26) матимемо:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin^{n-1} x \\ dv = \sin x dx \\ du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \\ v = \sin x dx \cos x \end{array} \right| = \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} - (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

$$= 0 - (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = (n-1) I_{n-2} - I_n.$$

Звідси матимемо рекурентну формулу

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \text{ або}$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (6.27)$$

За допомогою формули (6.27) інтеграл I_n послідовно зводиться до інтегралу I_0 або I_1 .

Якщо n – парна степінь ($n = 2k$), то матимемо:

$$I_{2k} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x dx = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 3 \cdot 1}{2k(2k-2)\dots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Якщо n – непарна степінь ($n = 2k + 1$), то матимемо:

$$I_{2k+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x dx = \frac{2k(2k-2)\dots 4 \cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\dots 3 \cdot 1}.$$

Отже

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx &= \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{1}{2} &\text{ при } n \text{ — парна} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, &\text{ при } n \text{ — непарна} \end{aligned} \quad (6.28)$$

6.9. Формула змінної у визначеному інтегралі.

Основна формула інтегрального числення дозволяє встановити правило заміни змінної у визначеному інтегралі.

Нехай треба обчислити інтеграл $\int_a^b f(x) dx$, де $f(x)$ — неперервна на проміжку $[a; b]$ функція.

Покладемо $x = \varphi(t)$ і вважаємо, що функція $\varphi(t)$ задовольняє умовам:

1. $\varphi(t)$ визначена і неперервна в деякому проміжку $[\alpha; \beta]$;
2. $\varphi(t) \in [a; b]$ коли $t \in [\alpha; \beta]$;
3. $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;
4. існує неперервна похідна $\varphi'(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$.

Тоді має місце формула

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (6.29)$$

Дійсно, ми признаємо, що підінтегральні функції неперервні, тому існують не тільки ці визначені інтеграли, але й відповідні їм невизначені, і в обох випадках можна застосувати основну формулу.

Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$, то $F(\varphi(t))$ первісна для функції $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$.

Зауваження. Важлива особливість формули (6.29): при обчисленні невизначеного інтеграла за допомогою заміни змінної отримуючи шукану функцію, що виражена через t , ми обов'язково повертаємося до старої змінної x , але у випадку визначеного інтегралу, в цьому немає потреби. Якщо обчислений другий із визначених інтегралів, який є числом, то це означає що обчислений і перший.



Знайдемо інтеграл $\int_0^5 \sqrt{25 - x^2} dx$.

$$\begin{array}{l}
 \int_0^5 \sqrt{25-x^2} dx \\
 \begin{array}{l}
 x = 5 \sin t \\
 dx = 5 \cos t dt \\
 \sqrt{25 - (5 \sin t)^2} \\
 \sqrt{25 - 25 \sin^2 t} \\
 \sqrt{25(1 - \sin^2 t)} = \sqrt{25 \cos^2 t} = 5 |\cos t|
 \end{array} \\
 \begin{array}{c|c|c}
 x & 0 & 5 \\
 \hline
 t & 0 & \frac{\pi}{2}
 \end{array} \\
 \text{Коли } t \in [0; \frac{\pi}{2}], \cos t \text{ — приймає} \\
 \text{додаткові значення, тому } |\cos t| = \cos t \\
 \int_0^{\pi/2} 5 \cos t \cdot 5 \cos t dt = 25 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{25}{5} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{25}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{25}{4} .
 \end{array}$$

6.10. Обчислення визначених інтегралів за допомогою властивостей підінтегральних функцій.

Істотні спрощення обчислень можливі при знаходженні інтегралів від парних, непарних, періодичних функцій:

1. Якщо $f(x)$ – парна функція, то $\int_a^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.
2. Якщо $f(x)$ – непарна функція, то $\int_b^a f(x) dx = 0$.
3. Якщо $f(x)$ – періодична з періодом T функція, то $\int_a^b f(x) dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x) dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

 Знайти $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \left\| \begin{array}{l} \text{підінтегральна функція} \\ \text{парна, бо } x \arcsin x \text{ є добуток} \\ \text{двох непарних функцій} \end{array} \right\|$$

$$2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\left| \begin{array}{l} \arcsin x = t, \\ x = \sin t \\ dx = \cos t dt \\ \hline x \quad 0 \quad \frac{1}{2} \\ \hline t \quad 0 \quad \frac{\pi}{6} \end{array} \right|$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin t \cdot t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} t \sin t dt$$

$$\left\| \begin{array}{l} \text{за формулою} \\ \text{інтегрування частинами} \\ \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \end{array} \right\|$$

$$\left| \begin{array}{l} u = t \\ dv = \sin t dt \\ \hline v = -\cos t \\ du = dt \end{array} \right| = 2 \left(-t \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos t dt \right) = \frac{2}{6} \cos \frac{\pi}{6} - \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= 2 \left(-\frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 0 \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{12} \right) = -\frac{6 + \sqrt{3}}{6}$$



Знайти $\int_5^5 \frac{x^3 \sin^2 x}{x^4 - 2x^2 - 1} dx$

$$\int_5^5 \frac{x^3 \sin^2 x}{x^4 - 2x^2 - 1} dx = \left\| \begin{array}{l} \text{підінтегральна функція} \\ \text{непарна, бо} \\ f(x) = \frac{(x)^3 \sin^2(x)}{(x)^4 - 2(x)^2 - 1} \\ \frac{x^3 \sin^2 x}{x^4 - 2x^2 - 1} = f(x) \end{array} \right\| = 0$$



Знайти $\int_0^{\frac{5}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x - \sin^4 x} dx$

$$\int_0^{\frac{5}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x - \sin^4 x} dx \left\| \begin{array}{l} \text{подінтегральна функція періодична,} \\ \text{тому можна із верхньої і нижньої} \\ \text{меж інтегрування відняти} \end{array} \right\|$$

$$\int_0^{\frac{5}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x - \sin^4 x} dx = 2 \int_0^{\frac{5}{4}} \frac{\sin x \cos x}{\cos^4 x (1 - \tan^4 x)} dx = 2 \int_0^{\frac{5}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x (1 - \tan^4 x)} dx$$

$$\begin{array}{c} \int_0^1 \frac{t dt}{t^4} \\ \int_0^1 \frac{t^2}{2t} \frac{dz}{dz} \\ \int_0^1 \frac{t}{2} \frac{dz}{dz} \\ \begin{array}{c|c|c} t & 0 & 1 \\ \hline z & 0 & 1 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{dz}{z^2} \\ \int_0^1 \frac{1}{z^2} \frac{dz}{1} \\ \arctg z \Big|_0^1 \\ \arctg 1 - \arctg 0 \\ -\frac{1}{4} \dots \end{array}$$



Знайти $\int_0^1 \frac{x \sin x}{1 - \cos^2 x} dx$.

$$\int_0^1 \frac{x \sin x}{1 - \cos^2 x} dx \quad \left\| \begin{array}{l} \text{невизначений інтеграл } \frac{x \sin x}{1 - \cos^2 x} \\ \text{не виражається в елементарних} \\ \text{функціях, але визначений можна} \\ \text{обчислити штучним шляхом} \end{array} \right\|$$

$$\int_0^{1/2} \frac{x \sin x}{1 - \cos^2 x} dx \quad \int_{1/2}^1 \frac{x \sin x}{1 - \cos^2 x} dx \quad \left\| \begin{array}{l} \text{в другому інтегралі} \\ \text{покладемо } x = t \\ \text{тоді } dx = dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 1/2 & 1 \\ \hline t & 1/2 & 0 \end{array} \end{array} \right\|$$

$$\int_0^{1/2} \frac{x \sin x}{1 - \cos^2 x} dx = \int_{1/2}^0 \frac{(t) \sin t}{1 - \cos^2 t} dt = \int_0^{1/2} \frac{x \sin x}{1 - \cos^2 x} dx = \int_0^{1/2} \frac{(t) \sin t}{1 - \cos^2 t} dt$$

$$\int_0^{1/2} \frac{x \sin x}{1 - \cos^2 x} dx = \int_0^{1/2} \frac{t \sin t}{1 - \cos^2 t} dt = \int_0^{1/2} \frac{\sin t}{1 - \cos^2 t} dt = \int_0^{1/2} \frac{\sin t}{1 - \cos^2 t} dt$$

(визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування)

$$\begin{array}{c} \int_0^{1/2} \frac{\sin t}{1 - \cos^2 t} dt \\ \begin{array}{c|c|c} t & 0 & 1/2 \\ \hline z & 1 & 0 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \int_0^1 \frac{dz}{z^2} \\ \arctg z \Big|_0^1 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \end{array}$$

6.11. Геометричне застосування визначеного інтеграла.

6.11.1. Обчислення площі в прямокутних координатах.

1. Якщо на відрізку $[a; b]$ функція $f(x) \geq 0$, то площа криволінійної трапеції, обмеженою кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, дорівнює:

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (6.30)$$

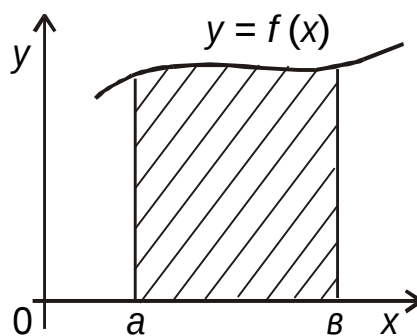


Рис. 6.7

2. Якщо треба обчислити площу фігури, що обмежена кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $f_1(x) \geq f_2(x)$ ординати $x = a$ і $x = b$, то матимемо

$$S = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx \quad (6.31)$$

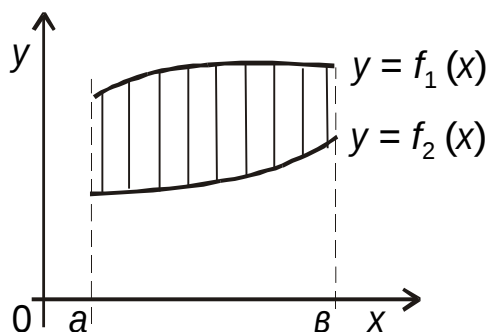


Рис. 6.8



Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = \sqrt[4]{x}$ і $y = x^4$.

Знаходимо точки перетину кривих

$$\sqrt[4]{x} = x^4 \quad x = x^{16} \quad \text{отже } x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

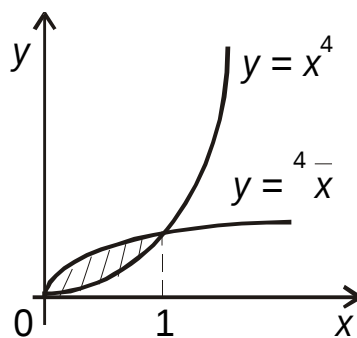


Рис.6.9

Отже, за формулою (6.31):

$$S = \int_0^1 (\sqrt[4]{x} - x^4) dx = \left[\frac{x^{5/4}}{5/4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

3. Якщо крива задана рівняннями в параметричній формі

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b], \quad (6.32)$$

то площа криволінійної фігури обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b y(t) x'(t) dt \quad (6.33)$$

Дійсно, нехай рівняння (6.32) визначають деяку $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і отже, площа криволінійної трапеції може бути обчислена за формулою:

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx \quad \text{або} \quad \int_a^b y(x) dx = \int_a^b y(t) x'(t) dt.$$

x	(t)
dx	(t)
x	$a \quad b$
t	

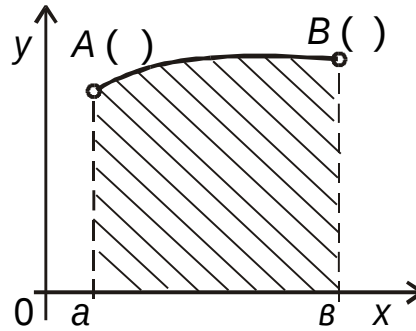


Рис. 6.10

Завдання. Обчислити площу фігури, що обмежена віссю OX і однієї аркою циклоїди $x = 5(t - \sin t)$, $y = 5(1 - \cos t)$.

За формулою (6.33)

$$S = \int_0^{2\pi} 5(1 - \cos t) \cdot 5(1 - \cos t) dt = 25 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt$$

$$= 25 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = 25 \left[t - 2\sin t + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \right]$$

$$= 25 \left[2\pi - 0 + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \right] = 25 \left[2\pi + \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \right] = 25 \left[2\pi + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \right] = 25 \cdot 3\pi = 75\pi.$$

6.11.2. Довжина дуги кривої.

I. Довжина дуги кривої в прямокутних координатах. Нехай в прямокутних координатах на площині задана крива рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ і $f'(x)$ – неперервні на відрізку $[a; b]$ функції.

Знайдемо довжину дуги AB цієї кривої, що заключена між вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 6.11).

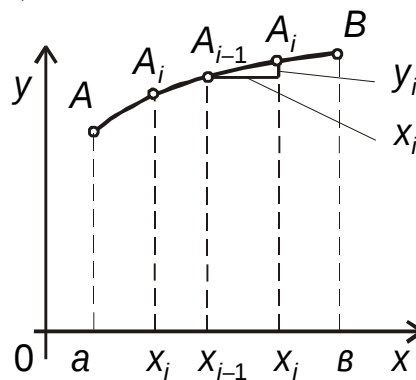


Рис. 6.11

Нагадаємо означення дуги кривої.

Візьмемо на дузі AB точки $A, A_1, A_2, \dots, B$ з абсцисами $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ і проведемо хорди $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$, довжини яких позначимо відповідно $l_1, l_2, \dots, l_n$. Тоді отримаємо ламану $AA_1A_2 \dots A_{n-1}B$, вписану в дугу AB . Довжина ламаної дорівнює $l_n = \sum_{i=1}^n l_i$.

Означення. Довжиною l дуги AB називається границя, до якої прямує довжина вписаної ламаної, коли довжина її найбільшого ланки прямує до нуля:

$$l = \lim_{\max_{i=1}^n S_i \rightarrow 0} S_i \quad (6.34)$$

Довжина дуги кривої обчислюється за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (6.35)$$

Доведемо формулу (6.35). Введемо позначення $y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Тоді

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{y_i}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} (x_i - x_{i-1}).$$

За теоремою Лагранжа матимемо:

$$\frac{y_i}{x_i - x_{i-1}} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i), \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

Отже,

$$l_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} (x_i - x_{i-1})$$

Таким чином, довжина вписаної ламаної дорівнює

$$l_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} (x_i - x_{i-1}).$$

За умовою, $f(x)$ – неперервна, тому функція $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ теж неперервна. Отже, існує границя наведеної інтегральної суми, який дорівнює визначеному інтегралу:

$$l = \lim_{\max_{i=1}^n x_i - x_{i-1} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$



Григор Обчислити довжину напівкубічної параболи $y = (x-1)^{3/2}$, $1 \leq x \leq 4$.

За формулою (6.35):

$$\begin{aligned} l &= \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}(x-1)^{1/2}\right)^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x-1)} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{9x-13} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} (9x-13)^{3/2} \Big|_1^4 = \frac{1}{18} (9 \cdot 4 - 13)^{3/2} - \frac{1}{18} (9 - 13)^{3/2} = \frac{1}{18} (49)^{3/2} - \frac{1}{18} (4)^{3/2} \\ &= \frac{1}{18} \cdot 7^3 - \frac{1}{18} \cdot 8 = \frac{343}{18} - \frac{8}{18} = \frac{335}{18}. \end{aligned}$$

II. Довжина дуги кривої у випадку, коли рівняння кривої задано в параметричній формі:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t \in [a; b]) \quad (6.36)$$

де $x(t)$, $y(t)$ – неперервні функції з неперервними похідними, причому $x'(t) \neq 0$, $t \in [a; b]$. У цьому випадку рівняння (6.36) визначають деяку функцію $y = f(t)$ – неперервну і мають неперервну похідну:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Нехай $a = ()$, $b = ()$. Тоді зробивши в інтегралі (6.35) підстановку $x = (t)$, $dx = (t)dx$, отримаємо:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 - \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} (t)dt \text{ або}$$

$$S = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 - [y'(t)]^2} dt \quad (6.37)$$



Обчислити довжину дуги астроїди $x = 5\cos^3 t$, $y = 5\sin^3 t$.

Крива симетрична відносно обох координатних осей, тому обчислюємо спочатку довжину її четвертої частини, розташованої в першій чверті. Знаходимо

$$x_t = 15\cos^2 t \sin t$$

$$y_t = 15\sin^2 t \cos t.$$

Параметр t буде змінюватися від 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Отже:

$$\frac{1}{4}l = \int_0^{\pi/2} \sqrt{225\cos^4 t \sin^2 t + 225\sin^4 t \cos^2 t} dt = 15 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} dt$$

$$= 15 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt = 15 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt = 15 \left. \frac{\sin^2 t}{2} \right|_0^{\pi/2} = \frac{15}{2}.$$

Зауваження. Якщо крива задана параметричними рівняннями

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (6.38)$$

то довжина дуги обчислюється за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \quad (6.39)$$

III. Довжина дуги кривої в полярних координатах.

Нехай в полярних координатах задано рівняння кривої

$$\rho = f(\varphi), \quad (6.40)$$

де ρ – полярний радіус, φ – полярний кут.

Напишемо формули переходу від полярних координат до декартових: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Якщо замість підставити вираз (6.40) через ρ , то отримаємо рівняння:

$$x = f(\varphi) \cos \varphi, \quad y = f(\varphi) \sin \varphi.$$

Ці рівняння можна розглядати як параметричні рівняння кривої і для обчислення довжини дуги застосувати формулу (6.37). Для цього знайдемо похідні від x і y по параметру φ :

$$\frac{dx}{d\varphi} = f'(\varphi) \cos \varphi - f(\varphi) \sin \varphi;$$

$$\frac{dy}{d} = f'(\) \sin \quad f'(\) \cos \ .$$

Тоді

$$\frac{dx}{d}^2 + \frac{dy}{d}^2 = [f'(\)]^2 + [f(\)]^2 \quad 2 \quad 2$$

Отже,

$$l = \int_0^d \sqrt{x^2 + y^2} d \quad (6.41)$$



Знайти довжину кардіоїди $a(1 - \cos \)$.

Змінюючи полярний кут від 0 до отримаємо половину шуканої довжини.

$$a \sin \ .$$

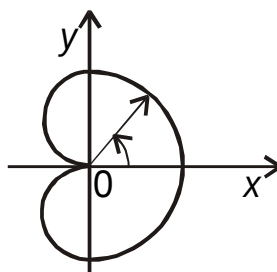


Рис. 6.12

Отже,

$$l = 2 \int_0^d \sqrt{a^2(1 - \cos \)^2 + a^2 \sin^2} d = 2a \int_0^d \sqrt{2 - 2 \cos} d$$

$$= 4a \int_0^d \cos \frac{d}{2} = 8a \sin \frac{d}{2} \Big|_0^d = 8a \ .$$

IV. Обчислення об'єму тіла по площам паралельних перерізів.

Нехай маємо деяке тіло T . Припустимо, що відома площа будь-якого перерізу цього тіла площиною перпендикулярної до осі OX (рис. 6.13). Ця площа буде залежати від положення площі перерізу, тобто буде функцією від x :

$$Q = Q(x).$$

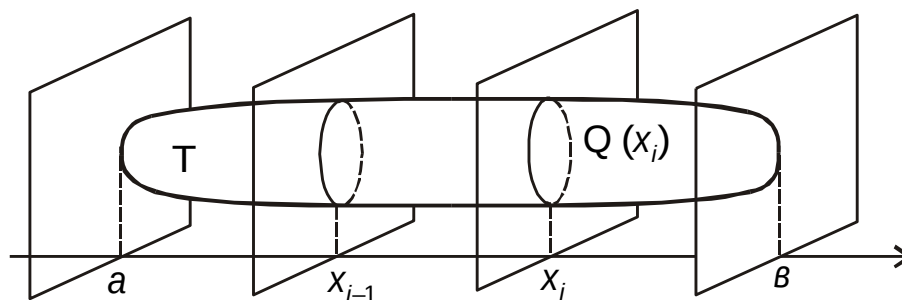


Рис. 6.13

Припустимо, що $Q(x)$ є неперервна функція від x і визначимо об'єм даного тіла. Проведемо площі $x = x_0 = a, x = x_1, x = x_2, \dots, x_n = b$.

Ці площини розбивають тіло на шари.

В кожному окремому проміжку $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ оберемо довільну точку ξ_i , для кожного значення $i = 1, 2, \dots, n$, побудуємо циліндричне тіло, твірною якого паралельна осі OX і напрямна являє собою контур перерізу тіла T площиною $x = \xi_i$. Об'єм такого елементарного циліндра з площиною основи $Q(\xi_i)$ ($x_{i-1} \leq x \leq x_i$) і висотою Δx_i дорівнює $Q(\xi_i) \Delta x_i$. Об'єм всіх циліндрів буде:

$$V_n = \sum_{i=1}^n Q(\xi_i) \Delta x_i$$

Границя цієї суми при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ (якщо вона існує) називається *об'ємом даного тіла*:

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i) \Delta x_i \quad (6.42)$$

Сума V_n є інтегральною сумою для неперервної функції $Q(x)$ на відрізку $a \leq x \leq b$, границя (6.42) існує і виражається визначенням інтегралом:

$$V = \int_a^b Q(x) dx \quad (6.43)$$

V. Об'єм тіла обертання.

Розглянемо тіло, утворене обертанням навколо осі OX криволінійною трапецією $aABb$, обмеженою кривою $y = f(x)$ віссю OX і прямими $x = a, x = b$.

В цьому випадку довільний переріз тіла площиною перпендикулярної до осі абсцис, є коло площиною $Q = y^2 = [f(x)]^2$.

Застосовуючи формулу (6.43), отримаємо формулу для обчислення об'єма тіла обертання:

$$V = \int_a^b y^2 dx = \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (6.44)$$

 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням лінії $y = \frac{a}{2} e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{x}{a}}$

навколо осі OX на проміжку від 0 до b (рис. 6.14):

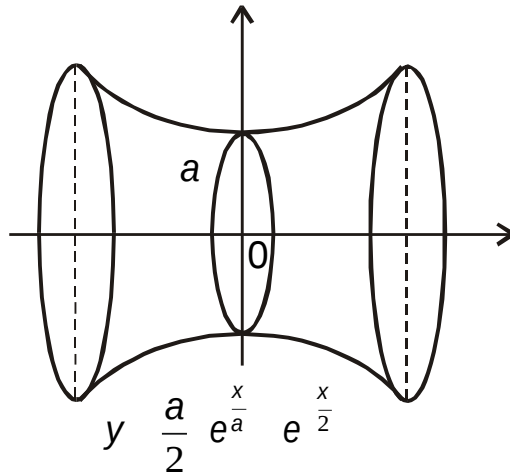


Рис. 6.14

За формулою (6.44):

$$V = \frac{a^2}{4} \int_0^b \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2 dx = \frac{a^2}{4} \int_0^b \left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}} \right) dx = \frac{a^2}{4} \left[\frac{a}{2} e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2} e^{-\frac{2x}{a}} \right]_0^b = \frac{a^3}{8} \left(e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}} \right) + \frac{ab}{2}.$$

VI. Площа поверхні тіла обертання.

Нехай задана поверхня, утворена обертанням кривої $y = f(x)$ навколо осі OX . Визначимо площу цієї поверхні на проміжку $a \leq x \leq b$. Функції $f(x)$, $f'(x)$ негatifвні для $x \in [a; b]$.

Проведемо хорди $AM_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}B$ довжини яких позначимо $l_1, l_2, \dots, l_n$ (рис. 6.15).

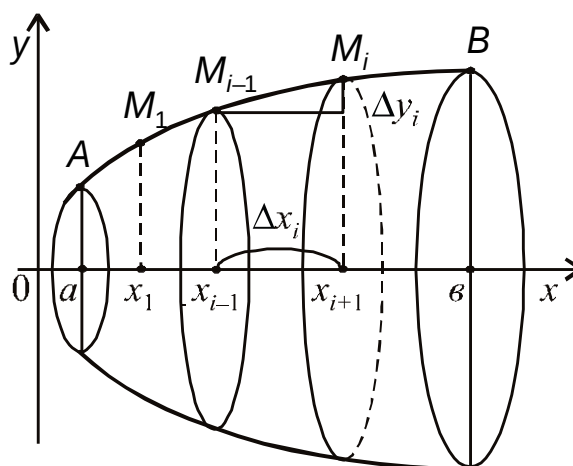


Рис. 6.15

Кожна хорда довжини l_i ($i = 1, 2, \dots, n$) при обертанні описує усічений конус, площа поверхні якого S_i дорівнює:

$$S_i = 2 \frac{y_{i-1} y_i}{2} S_i$$

$$\text{Але } l_i = \sqrt{x_i^2 - y_i^2} = \sqrt{1 - \frac{y_i^2}{x_i^2}} x_i.$$

Застосовуючи теорему Лагранжа, отримаємо:

$$\frac{y_i}{x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i), \text{ де}$$

Отже,

$$l_i = \sqrt{1 - f'^2(\xi_i)} x_i,$$

$$S_i = 2 \frac{y_{i-1} y_i}{2} \sqrt{1 - f'^2(\xi_i)} x_i$$

Площа поверхні, що описана ламаною буде дорівнювати

$$S_n = 2 \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} y_i}{2} \sqrt{1 - f'^2(\xi_i)} x_i$$

або

$$S_n = \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) - f(x_i)] \sqrt{1 - f'^2(\xi_i)} x_i \quad (6.45)$$

Означення. Границя суми (8.45), коли найбільша ланка ламаної l_i прямує до нуля, називається *площею поверхні* обертання.

Сума (6.45) не є інтегральною сумою для функції

$$2 f(x) \sqrt{1 - f'^2(x)} \quad (6.46)$$

бо в доданку, що відповідає відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ є декілька точок цього відрізка $x_{i-1} > x_i > \xi_i$.

Але можна довести, що границя суми (6.45) дорівнює границі інтегральної суми для функції (6.46), тобто:

$$S_{\text{поверхні}} = \lim_{\max x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) - f(x_i)] \sqrt{1 - f'^2(\xi_i)} x_i$$

$$= \lim_{\max x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2 f(\xi_i) \sqrt{1 - f'^2(\xi_i)} x_i$$

або

$$S_{\text{поверхні}} = 2 \int_a^b f(x) \sqrt{1 - [f'(x)]^2} dx \quad (6.47)$$



Визначити площу поверхні параболоїда, утвореного обертанням навколо осі OX дуги параболи $y^2 = 2px$, $0 \leq x \leq a$.

$$f(x) = \sqrt{2px}, \quad f'(x) = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}.$$

За формулою (6.47):

$$P = 2 \int_0^a \sqrt{2px} \sqrt{\frac{2x-p}{2x}} dx = 2 \int_0^a \sqrt{p} \sqrt{2x-p} dx$$

$$= 2 \sqrt{p} \left[\frac{2}{3} (2x-p)^{3/2} \right]_0^a = \frac{2 \sqrt{p}}{3} (2a-p)^{3/2} - p^{3/2}.$$

6.12. Наближені обчислення визначених інтегралів.

Якщо первісна підінтегральної функції відома, визначений інтеграл обчислюють за формулою Ньютона-Лейбніца. Але може виникнути ситуація, коли первісна або не виражається у вигляді елементарної функції, або вираз для первісної має складний вигляд. В цьому випадку застосовують наближені формули обчислення визначених інтегралів.

Основна ідея отримання цих формул полягає у заміні підінтегральної функції на функцію більш простого вигляду, наприклад, многочлен, інтеграл від якого знаходять безпосередньо за формулою Ньютона-Лейбніца.

I. Формула прямокутників. Нехай треба обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$, де $f(x)$ – інтегровна функція на відрізку $[a; b]$. Розіб'ємо відрізок інтегрування на $2n$ частин:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2k} < \dots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b.$$

На кожному відрізку $[x_{2n-2}; x_{2k}]$ побудуємо прямокутник $cCDd$ висотою $f(x_{2k-1})$. (рис. 6.16). Площу криволінійної трапеції замінимо на суму площ усіх таких прямокутників. Таким чином, визначений інтеграл наближено дорівнює наступній сумі:

$$\int_a^b f(x) dx \approx f(x_1) 2h + f(x_3) 2h + \dots + f(x_{2n-1}) 2h = 2n(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})) \quad (6.48)$$

де h – довжина відрізка розбиття,

$$h = \frac{b-a}{2n}, \quad x_1 = a + h, \dots, x_{2k-1} = x_{2k} - 2h.$$

Формула (6.48) називається *формулою прямокутників*.

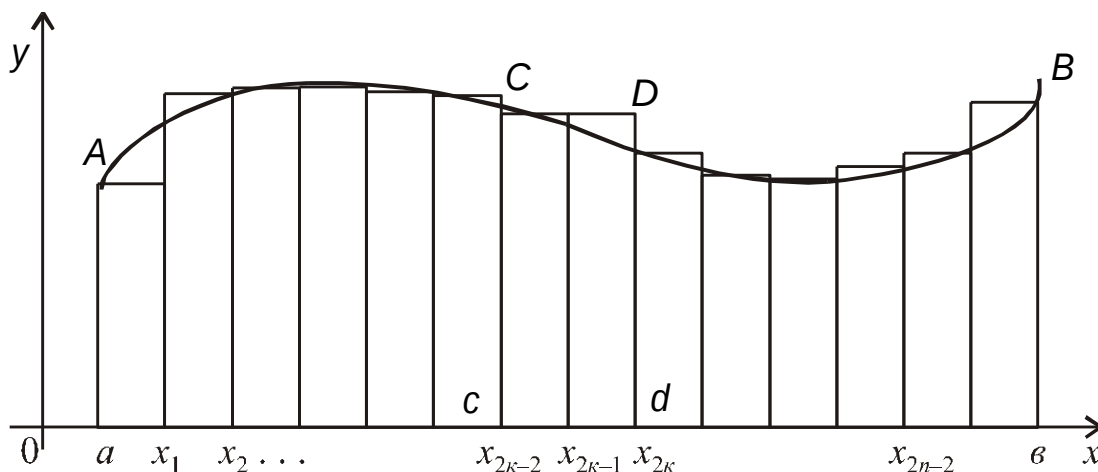


Рис. 6.16

Доведено, що похибка застосування формули (6.48) не більше ніж

$$\frac{(b-a)^2}{24n^2} M, \quad M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|, \quad (6.49)$$

Звичайно обчислення закінчується, коли модуль різниці $|S_{2n} - S_n|$ стає менше заданої точності.

 Обчислити з точністю до 0,001 інтеграл $\int_{-1}^1 e^{x^2} dx$.

Покладемо $f(x) = e^{x^2}$, $a = -1$, $b = 1$, тоді $h = \frac{1}{n}$;

$$x_1 = -1 + h; S_0 = 0, \\ x_{i-1} = x_i - 2h, i = 2, \dots, n-1 \\ S_i = S_{i-1} + f(x_i)$$

Результати обчислень наведено у таблиці

N	2	4	8	16	32	64	128
S_n	2	1,558	1,509	1,497	1,495	1,494	1,494

З таблиці видно, що значення інтеграла з заданою точністю отримується на 6 кроці.

II. Формула трапецій. Геометричні розрахунки приводять до іншої формули: *формули трапецій*. Замінімо задану криву вписаною в неї ламаною з вершинами в точках $(x_i; y_i)$, де $y_i = f(x_i)$. Тоді криволінійна трапеція заміниться іншою, утвореною трапеціями.

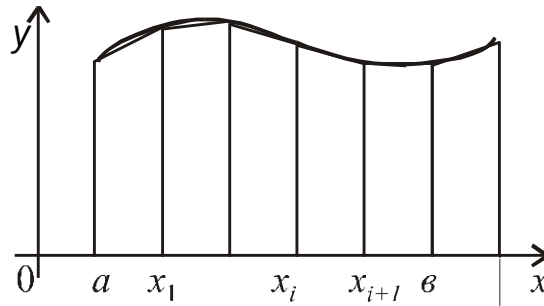


Рис. 6.17

Якщо вважати, що проміжок $[a; b]$ поділений на рівні частини, то площі цих трапецій будуть:

$$\frac{b-a}{n} \frac{y_0 + y_1}{2}, \frac{b-a}{n} \frac{y_1 + y_2}{2}, \dots, \frac{b-a}{n} \frac{y_{n-1} + y_n}{2}$$

Додаючи, приходимо до формули

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \quad (6.50)$$

Формула (6.50) називається *формулою трапецій*.

Доведено, що похибка застосування формули (6.50) не більше ніж

$$P \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M, \quad M = \max_{x \in [a;b]} f''(x) \quad (6.51)$$

 Обчислити інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ з точністю до 0,001.

За формулою (6.51):

$$R_n \leq 0, \quad |R_n| \leq \frac{1}{6n^2}$$

Візьмемо $n = 10$, тоді

$$|R_{10}| \leq \frac{1}{600} \approx 1,7 \cdot 10^{-3}$$

Обчислення наведемо в таблиці:

i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
f_i	0,9091	0,8333	0,7692	0,7143	0,7143	0,6667	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5000

Отже, за формулою (6.50)

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \approx \frac{1}{10} + \frac{1}{2} (0,9091 + 0,5000) = 0,61877 \approx 0,619$$

III. Формула Сімпсона. Для отримання наближеної формули обчислення визначеного інтеграла більш високої точності, ніж формули прямокутників та трапецій, будемо вписувати замість прямолінійних відрізків куски *параболи*.

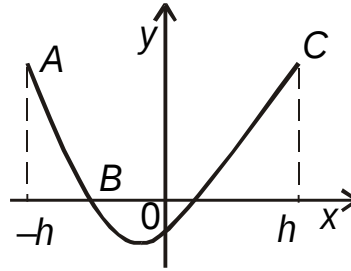


Рис. 6.18

Можна довести, що площа S криволінійної трапеції обмеженої параболою $y = ab^2 + bx + c$, що проходить через точки $A(-h; y_1)$, $B(0; (0; y_2)$, $C(h; y_3)$ виражається формулою

$$S = \frac{h}{3} (y_1 + 4y_2 + y_3) \quad (6.52)$$

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену графіком функції $y = f(x)$ і розіб'ємо відрізок інтегрування $[a; b]$ на $2n$ рівних частин точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2k} < \dots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

Через кожні три точки

$$A_0 A_1 A_2, \dots, A_{2k} A_{2k+1} A_{2k+2}, \dots, A_{2n-2} A_{2n-1} A_{2n}$$

проведемо параболу, отримаємо n криволінійних трапецій, обмежених зверху параболою. За формулою (6.52) площа кожної такої частинної криволінійної трапеції, що опирається на відрізок $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ дорівнює:

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} (y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2})$$

де $y_k = f(x_k)$, $0 \leq k \leq 2n$.

Додаючи почленно ці наближені рівності, отримаємо формулу:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} (y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + \dots + y_{2n-1})) \quad (6.53)$$

Формула (6.53) називається *формулою Сімпсона*.

Можна довести, що похибка формули (6.53) не більше ніж

$$M \frac{(b-a)^5}{2880n^4}, \quad M = \max_{x \in [a;b]} |f^{IV}(x)| \quad (6.54)$$



Обчислити інтеграл $\int_0^1 e^{x^2} dx$ з точністю до 0,001.

За формулою (6.54) отримаємо, що $y^{IV} = 0$, $|y^{IV}| = y^{IV} = 4e^{x^2} (4x^4 + 12x^2 + 3)$.

Очевидно, що похідна y^{IV} зростає при $0 \leq x \leq 1$ і має найбільше значення при $x = 1$.

Таким чином:

$$|R_n| \leq \frac{1}{180n^4} \cdot 76e$$

Якщо ми візьмемо $n = 10$, отримаємо:

$$|R_n| \frac{76e}{180 \cdot 10^4} = 0,00012.$$

Розрахунки наведемо у таблиці:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	0	101	1,0408	1,0942	1,1735	1,2840	1,433	1,6323	1,8965	2,2479	2,7183

Тоді за формулою (6.53) отримаємо:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = 1,463.$$

Зауваження. У деяких випадках застосовують інші, більш удосконалені обчислювальні схеми (наприклад, Гаусса, Чебишева та ін.), які дозволяють знаходити наближено значення визначених інтегралів ще більш зручніше.



Вправи для самостійного розв'язування

Обчислити визначені інтеграли (1–51):

1. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x \cos x dx.$

2. $\int_0^1 (1 - e^{3x})^2 e^{3x} dx.$

3. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln x}}.$

4. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4 - x^2}}.$

5. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - e^{-x}}.$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx.$

7. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x - 1}}.$

8. $\int_2^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x - 1}}.$

9. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x - 1}}.$

10. $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x - 5}}.$

11. $\int_5^8 \frac{\sqrt{x - 4}}{x} dx.$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x dx.$

13. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$

14. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}^3}.$

15. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx.$

16. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 5x - 1}}.$

17. $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2} dx.$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx.$

19. $\int_1^{e^1} \ln x - 1 dx.$

20. $\int_1^e x^2 \ln x dx.$

21. $\int_0^1 x^3 e^{2x} dx.$

- $$\begin{array}{lll}
22. \int_0^1 \arctg x dx. & 23. \int_1^2 x e^{\frac{x}{2}} dx. & 24. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x}. \\
25. \int_0^1 \arctg \sqrt{x} dx. & 26. \int_0^1 e^x \sin x dx. & 27. \int_0^{0.5} \frac{x \arcsin x}{1-x^2} dx. \\
28. \int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx. & 29. \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}. & 30. \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx. \\
31. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx. & 32. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx. & 33. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx. \\
34. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x}}. & 35. \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1-x}}. & 36. \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x} + 1}. \\
37. \int_0^1 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x}}. & 38. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}. & 39. \int_0^5 \sqrt{25 - x^2} dx. \\
40. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. & 41. \int_1^e \ln x dx. & 42. \int_0^2 x \sin 2x dx. \\
43. \int_0^1 x e^{3x} dx. & 44. \int_0^1 \ln x + 1 dx. & 45. \int_0^1 x + 1 e^{-x} dx. \\
46. \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos 3x dx. & 47. \int_1^e x \ln x dx. & 48. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\sin^2 x}. \\
49. \int_1^1 x \arctg x dx. & 50. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx. & 51. \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.
\end{array}$$

За допомогою визначених інтегралів обчислити площі фігур, що обмежені лініями (52–79):

- $$\begin{array}{ll}
52. y = 1 - x^2; y = x^2 - 7. & 53. 4y = x^2; y^2 = 4x. \\
54. y = x^2 - 4x; y = x + 4. & 55. y = e^x; y = e^{-x}; x = 1. \\
56. y = x^2 - 9; y = 2x + 1. & 57. y = x^2; y = 2 - x^2. \\
58. y = x^2; y = 2 - x. & 59. xy = 9; y = 6; x = 3; x = 0; y = 0. \\
60. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. & 61. y^2 = 2x - 4; x = 0. \\
62. y^2 = x^3; y = 8; x = 0. & 63. y^2 = x; x = y - 6; y = 0.
\end{array}$$

$$64. y = x^2 - x^3; x \in [1, 2].$$

$$65. x^2 - y^2 = 8; y \in \left[-\frac{x^2}{2}, \frac{x^2}{2}\right].$$

$$66. y^2 = 16 - 8x; y^2 = 24x - 48.$$

$$67. xy = 4; x \in [1, 4]; y \in [0, 4].$$

$$68. y = x^2; x \in [0, 2].$$

$$69. y = x^2 - 1; 2x - y = 2 \Rightarrow y = 2x - 2.$$

$$70. y = x^2; y = 8 - x^2.$$

$$71. xy = 3; x \in [1, 4].$$

$$72. y = x^2; y = 5x^2 - 6.$$

$$73. y^2 = 2x; y = x.$$

$$74. y = x^2; x \in [0, 1].$$

$$75. y^2 = 2x - 1; x \in [1, 2].$$

$$76. y^2 = 1 - x; x \in [0, 1].$$

$$77. y = e^x; y = e^{-x}; x \in [0, 1].$$

$$78. xy = 6; x \in [1, 7].$$

$$79. y^2 = 2x - 1; x \in [1, 2].$$

За допомогою визначених інтегралів обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур, що обмежені лініями (80–95):

$$80. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; y \in [-b, b], \text{ навколо осі } Oy.$$

$$81. xy = 4; x \in [1, 4]; y \in [0, 4], \text{ навколо осі } Ox.$$

$$82. y^2 = 1 - x; x \in [0, 1], \text{ навколо осі } Oy.$$

$$83. y = x^3; y = 0; x \in [0, 2], \text{ навколо осі } Oy.$$

$$84. y = x^2; y = x - 6, \text{ навколо осі } Ox.$$

$$85. x^2 - y^2 = a^2; x \in [0, a], \text{ навколо осі } Ox.$$

$$86. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ навколо осі } Oy.$$

$$87. y^2 = 2x - 1; x \in [0, 1], \text{ навколо осі } Ox.$$

$$88. \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1; y \in [-3, 3], \text{ навколо осі } Oy.$$

$$89. y = x^2; y = 0; x \in [0, 2], \text{ навколо осі } Ox.$$

$$90. xy = 9; y \in [3, 9]; x \in [0, 9], \text{ навколо осі } Oy.$$

$$91. y = \sin x; 0 \leq x \leq \pi; y = 0, \text{ навколо осі } Ox.$$

$$92. y = x^3; x \in [0, 1]; y = 8, \text{ навколо осі } Oy.$$

$$93. x^2 - y^2 = 4; y \in [-2, 2], \text{ навколо осі } Oy.$$

$$94. y = x^2; y^2 = x, \text{ навколо осі } Ox.$$

$$95. \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1, \text{ навколо осі } Oy.$$

Відповіді:

1. $\frac{1}{160}$.
2. $\frac{1}{9} - 1 - e^3 - 3 - 8$.
3. 2.
4. 1.
5. $\arctg e - \frac{1}{4}$.
6. $\frac{1}{4}$.
7. $2 - 1 - \ln \frac{1}{2}$.
8. $\frac{27}{4} - \ln 2$.
9. $7 - 2 \ln 2$.
10. $\frac{17}{6}$.
11. $2 - 4 \arctg \frac{1}{2}$.
12. $\frac{1 - \ln 2}{2}$.
13. $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.
14. $\frac{\sqrt{2}}{8}$.
15. $\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} - \ln \frac{2 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{2}}$.
16. $\ln \frac{7 - 2\sqrt{7}}{9}$.
17. $\sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln 2 - \sqrt{3}$.
18. $\frac{1}{4}$.
19. $2 - 1 - \ln 2$.
20. $\frac{1}{9} - 2e^3 - 1$.
21. $\frac{e^2 - 3}{8}$.
22. $\frac{1}{4} - 2 \ln 2$.
23. $\frac{4}{e}$.
24. $\frac{1}{4} - 2 \ln 2$.
25. $\frac{1}{4} - 1$.
26. $\frac{1}{2} - e - 1$.
27. $\frac{1}{9} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$.
28. 2.
29. $2e - e - 1$.
30. $\frac{1}{3} a^3$.
31. $\frac{1}{3}$.
32. $\frac{1}{4}$.
33. $\ln 2$.
34. $2 - \ln 2$.
35. $\frac{32}{3}$.
36. $2 - 1 - \ln 2$.
37. $\frac{5}{3} - 2 \ln 2$.
38. $4 - 2 \ln 3$.
39. $\frac{25}{4}$.
40. $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$.
41. 1.
42. .
43. $\frac{1}{9} - 2e - 1$.
44. $2 \ln 2 - 1$.
45. $2 - e^1$.
46. $\frac{2}{9}$.
47. $\frac{e^2}{4}$.
48. $\frac{1}{4} - 2 \ln 2$.
49. $\frac{1}{2} - 1$.
50. $\sqrt{3} - \frac{1}{3}$.
51. $\frac{1}{16}$.
52. $\frac{64}{3}$.
53. $\frac{16}{3}$.
54. $\frac{125}{6}$.
55. $e - e^1 - 2$.
56. 36.
57. $\frac{8}{3}$.
58. $\frac{9}{2}$.
59. $9 - 1 - \ln 2$.
60. ab .
61. $\frac{16}{3}$.
62. 19,2.
63. $\frac{125}{6}$.
64. 0,8.
65. $2 - \frac{4}{3}; 6 - \frac{4}{3}$.
66. $\frac{32}{3} \sqrt{6}$.
67. $8 \ln 2$.
68. $\frac{9}{2}$.
69. $\frac{32}{3}$.
70. $\frac{64}{3}$.
71. $4 - 3 \ln 3$.
72. 8.
73. $\frac{2}{3}$.
74. $\frac{1}{3}$.
75. $2\sqrt{3}$.
76. $\frac{32}{3}$.
77. $e - \frac{1}{e} - 2$.

$$78. 17,5 \cdot 6 \ln 6.$$

$$79. \frac{16}{3}.$$

$$80. \frac{8 \cdot a^2 b}{3}.$$

$$81. 12 \cdot$$

$$82. \frac{16}{15}.$$

$$83. \frac{64}{5} \cdot$$

$$84. \frac{500}{3} \cdot$$

$$85. \frac{8 \cdot a^3}{3}.$$

$$86. \frac{4}{3} \cdot a^2 b.$$

$$87. \frac{1}{4}.$$

$$88. 32 \cdot$$

$$89. \frac{32}{5} \cdot$$

$$90. 18 \cdot$$

$$91. \frac{1}{2}.$$

$$92. 19,2 \cdot$$

$$93. \frac{64}{3} \cdot$$

$$94. 0,3 \cdot$$

$$95. 24 \cdot$$

Вводячи поняття інтегралу, ми припускали, що відрізок інтегрування скінченний, а підінтегральна функція обмежена на цьому відрізку. В протилежному випадку множина сум Дарбу не буде обмеженою. Але, можливі випадки, коли одна або обидві ці умови не виконуються. У такому випадку відповідні інтеграли називаються *невласними*. Ми будемо розрізняти два випадки: *невласні інтеграли I-го* (проміжок інтегрування необмежений) і *II-го роду* (підінтегральна функція не обмежена).

7.1. Невласні інтеграли I-го роду: інтеграли з нескінченними межами інтегрування.

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; +\infty)$ і інтегровна в будь-якій кінцевій його частині $[a; A]$ так що інтеграл $\int_a^A f(x)dx$ має зміст при будь-якому $A > a$.

Означення. Границя інтеграла $\int_a^A f(x)dx$ (скінченна або нескінченна) при $A \rightarrow +\infty$ називається *невласним інтегралом I-го роду* від функції $f(x)$ і позначається:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx \quad (7.1)$$

Геометрична ілюстрація.

Нехай задана невід'ємна функція $y = f(x)$, неперервна на півінтервалі $[a; +\infty)$. Для кожного $b > a$ визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ дає площу криволінійної трапеції $aABb$.

Зміщуючи відрізок Bb управо, ми отримаємо замість значення невластного інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ площу «трикутника» $Aa\infty$. (рис. 7.1)

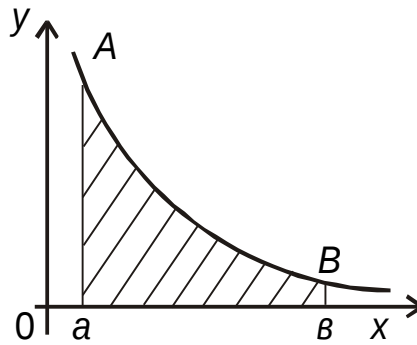


Рис. 7.1

Завдання. Дослідити збіжність інтеграла $\int_a^A \frac{dx}{x}$ ($a > 0$) залежно від параметра A .

Розв'язування. Якщо границя $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dx$ існує і скінченна, то невласний інтеграл збіжний. В протилежному випадку – розбіжний.

Аналогічно, з означенням (7.1) можна розглядати невласний інтеграл з нескінченною нижньою межею:

$$\int_a^A f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^A f(x)dx \quad (7.2)$$

Можна також розглядати невласний інтеграл на проміжку $(-\infty; \infty)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^c f(x)dx + \lim_{c \rightarrow \infty} \int_c^c f(x)dx \quad (7.3)$$

Можна показати, що права частина (7.3) не залежить від вибору проміжної точки c .

Розв'язування. За означенням (7.1) 1:

$$\int_a^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{x^1}{1} \right|_a^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A^1}{1} - \frac{a^1}{1} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A^1}{1} - \frac{a^1}{1}$$

, при $A \rightarrow \infty$ розбіжний, при $A \rightarrow 0$ розбіжний.

Завдання. Дослідити збіжність інтеграла $\int_0^A \sin bxdx$ ($b > 0$).

Розв'язування. За означенням (7.1):

$$\int_0^A \sin bxdx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \sin bx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{1}{b} \cos bx \right|_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \cos bA - \frac{1}{b} \cos 0$$

Границя $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \cos bA$ не існує, тому початковий інтеграл розбіжний.

Якщо функція $f(x)$ додатна, то інтеграл

$$(A) \int_a^A f(x) dx \quad (7.4)$$

являє собою монотонно зростаючу функцію від змінної A . Питання про існування скінченної границі при A розв'язується за допомогою наступних теорем, які ми наводимо без доведення.

Теорема. Для збіжності невластного інтеграла (7.1) необхідно і достатньо, щоб інтеграл (7.4) при зростанні A залишався обмеженим зверху:

$$\int_a^A f(x) dx \leq L \quad (L = \text{const}).$$

Теорема. Якщо хоча б при $x \rightarrow A$ має місце нерівність $f(x) \geq g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int_a^A g(x) dx$ слідує збіжність інтеграла $\int_a^A f(x) dx$, або, із розбіжності $\int_a^A f(x) dx$ слідує розбіжність інтеграла $\int_a^A g(x) dx$.

7.2. Невласні інтеграли II роду: інтеграли від необмежених функцій.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $(a; b]$.

Означення. Точка $x = b$ називається *особливою точкою* якщо функція $f(x)$ не обмежена в будь-якому відрізку, що належить проміжку $(a; b]$.

Теорема. Якщо існує границя

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = K \quad (0 < K < +\infty),$$

то із збіжності інтеграла $\int_a^b g(x) dx$, при $K < +\infty$, впливає збіжність інтеграла $\int_a^b f(x) dx$, а із розбіжності першого інтеграла впливає розбіжність другого.

Теорема. Нехай для достатньо великих x (Коші) функція $f(x)$ має вигляд:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^c} \quad (c > 1).$$

Тоді, якщо $c > 1$ і $\varphi(x)$ $\leq M$, то цей інтеграл розбігається.

Теорема. Якщо збігається інтеграл $\int_a^b |f(x)| dx$ то збігається і інтеграл $\int_a^b f(x) dx$.

Означення. Якщо одночасно з інтегралом $\int_a^b f(x) dx$ збігається і інтеграл $\int_a^b |f(x)| dx$,

то інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ називається *абсолютно збіжним*, а функція $f(x)$ – *абсолютно інтегрованою* на проміжку $[a; b]$.

Теорема. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені на проміжку $[a; \infty)$, причому:

- 1) функція $f(x)$ інтегровна на цьому проміжку, так що інтеграл (8.1) збігається;
- 2) функція $g(x)$ монотонна і обмежена:

$$|g(x)| \leq L \quad (L = \text{const}).$$

Тоді інтеграл

$$\int_a^x f(x)g(x)dx \quad (7.5)$$

збігається.

Теорема (ознака Діріхле). Нехай

- 1) функція $f(x)$ інтегровна на будь-якому проміжку $[a; A]$ і інтеграл (7.4) обмежений:

$$\left| \int_a^A f(x)dx \right| \leq K \quad (K = \text{const}).$$

- 2) функція $g(x)$ монотонно прямує до 0 при $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

Тоді інтеграл (7.5) збігається.



Дослідити збіжність інтегралів:

$$1. \int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx \quad (a > 0).$$

$$2. \int_a^{\infty} \frac{\arctg x}{x^3} dx \quad (a > 0).$$

$$3. \int_0^{\infty} x e^{-ax} \cos x dx \quad (a > 0).$$

Розв'язування. 1. За ознакою Діріхле покладемо:

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Умови (7.1) і (7.2) виконані, бо $\left| \int_a^A \sin x dx \right| = |\cos a - \cos A| \leq 2$ і функція $\frac{1}{x^2}$

монотонно спадає, прямує до 0 при $x \rightarrow \infty$.

Тому інтеграл збіжний.

2. За ознакою Абеля покладемо:

$$f(x) = \frac{1}{x^3}, \quad g(x) = \arctg x.$$

За умовою (7.1) інтеграл $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$ збігається, за умовою (7.2) $|\arctg x| \leq \frac{\pi}{2}$.

Отже, інтеграл збігається.

3. За ознакою Абеля покладемо:

$$f(x) = x e^{ax}, \quad g(x) = \cos x.$$

Інтеграл $\int_a^\infty x e^{ax} dx$ – збіжний, $|\cos x| \leq 1$, тому інтеграл збіжний.

Означення. Границя інтеграла $\int_a^b f(x) dx$ при $b \rightarrow \infty$ називається *невласним інтегралом II роду* функції $f(x)$ від a до b і позначається:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (7.6)$$

Якщо границя існує, то кажуть, що невластний інтеграл (9.6) *збігається*. Якщо границя не існує або нескінченна, то інтеграл (9.6) *розбіжний*.

Геометрична інтерпретація.

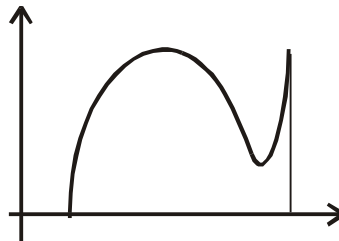


Рис. 7.2

Аналогічно, якщо $x = a$ – особлива точка, то невластний інтеграл визначають так:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx.$$

Якщо $x = c$ – єдина внутрішня особлива точка на відрізку $[a; b]$, то покладають:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

за умов, що обидва невластні інтеграли справа збігаються.

Якщо особливих точок на відрізку $[a; b]$ декілька, то відрізок розбивають так, щоб у кожному відрізку розбиття було не більше однієї особливої точки і користуються означенням (7.1).

Нехай $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$.

Покладемо:

$$F(a+0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(a+\epsilon),$$

$$F(b-0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(b-\epsilon).$$

(якщо ці границі існують). Тоді, аналогом формули Ньютона-Лейбніца для збіжних інтегралів, у яких особливими точками є точки $x = a$ і $x = b$, буде формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a-0).$$

 Дослідити збіжність інтеграла: $\int_0^a \frac{dx}{x}$, $a > 0$, $a = \text{const}$.

Розв'язування.

1. 1. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x}$ має одну особливу точку на відрізку інтегрування $[0; a]$:

$$\int_0^a \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^a \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left. \ln x \right|_{\epsilon}^a = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\ln a - \ln \epsilon) = \ln a - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln \epsilon.$$

Відповідь: інтеграл збіжний.

2. 1. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x}$ має одну особливу точку на відрізку інтегрування $[0; a]$:

$$\int_0^a \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^a \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln |x| \Big|_{\epsilon}^a = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\ln a - \ln \epsilon).$$

Інтеграл розбіжний.

Основні ознаки існування інтеграла.

1. Нехай $f(x) \geq 0$. Тоді, для збіжності невластного інтеграла (7.1) необхідно і достатньо, щоб при усіх $\epsilon > 0$ виконувалась нерівність:

$$\int_a^b f(x)dx \leq L \quad (L = \text{const}).$$

2. *Ознака Коші*. Нехай для достатньо близьких до b значень x функція $f(x)$ має вигляд:

$$f(x) = \frac{g(x)}{(b-x)^c}, \quad (c > 0).$$

Тоді: 1) якщо $c > 1$ і $g(x) \leq M$, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ розбігається.

3. Якщо при $x \rightarrow b$ функція $y = f(x)$ є нескінченно великого порядку $\alpha > 0$ (у порівнянні з $\frac{1}{b-x}$), то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збігається або розбігається залежно від того, чи буде $\alpha < 1$ або $\alpha \geq 1$.

 Дослідити збіжність інтеграла:

$$a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}.$$

Розв'язування. $x = 1$ – особлива точка. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}$,

являє собою нескінченно велику порядку $\frac{1}{4}$, бо

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} : \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x} \sqrt[4]{1-x^2} \sqrt[4]{1-x^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4}}, \text{ при } x \rightarrow 1.$$

Отже, інтеграл збігається.

б) $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$.

Розв'язування. $x = 1$ – особлива точка. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ являє собою нескінченно велику порядку 1, бо

$$\frac{\ln x}{x-1} \rightarrow 1 \text{ при } x \rightarrow 1.$$

Отже, інтеграл розбігається.

Зауваження. Властивості невластивих інтегралів аналогічні властивостям визначених інтегралів і отримуються з них таким чином: невластиві інтеграли є границею визначених, тому, звичайно, достатньо написати для останніх рівність або нерівність, що виражають потрібну властивість, і перейти до границь.

7.3. Деякі особливі інтеграли.

I. Інтеграл Ейлера.

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx. \quad (7.7)$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx \quad \left\| \begin{array}{l} \text{інтегруванням частинами цей} \\ \text{невластивий інтеграл можна звести} \\ \text{до визначеного і довести таким чином} \\ \text{його існування} \end{array} \right\|$$

$$x \ln \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x \frac{\cos x}{\sin x} dx = - \int_0^{\pi/2} x \operatorname{ctg} x dx.$$

Обчислимо інтеграл (7.7):

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln \sin t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln \cos t dt$$

в останньому		
t	$\frac{\pi}{2}$	u
dt		du
t	0	$\frac{\pi}{4}$
u	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$

$$\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \ln \sin t dt - \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin t dt - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \ln \sin t dt$$

$$-\frac{1}{2} \ln 2 - 2I.$$

або

$$I = -\frac{1}{2} \ln 2.$$

Зауваження. По інтегралу I зводяться також інтеграли $\int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx$, $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$.

II. Інтеграл Ейлера-Пуассона.

$$P = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx. \quad (7.8)$$

Функція $f(t) = (1+t)e^{-t}$ досягає свого найбільшого значення 1 при $t = 0$.

Отже,

$$(1+t)e^{-t} < 1 \text{ при } t > 0 \text{ і } t < 0.$$

Покладаючи $t = x^2$ отримаємо:

$$(1-x^2)e^{-x^2} < 1 \text{ і } (1-x^2)e^{-x^2} > 1.$$

Звідси:

$$1 - x^2 < e^{-x^2}, \quad x \in (0;1). \quad (7.9)$$

$$e^{-x^2} < \frac{1}{1-x^2}, \quad x > 0. \quad (7.10)$$

Підносячи вирази (7.9) і (7.10) до степеня з будь-яким натуральним показником n , матимемо:

$$(1-x^2)^n < e^{-nx^2}. \quad (7.11)$$

$$(0 < x < 1) \quad e^{-nx^2} < \frac{1}{(1-x^2)^n} \quad (x > 0). \quad (7.12)$$

Інтегруючи нерівність (7.11) в проміжку від 0 до 1, а (7.12) – від 0 до $+\infty$, отримаємо:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^1 e^{-nx^2} dx < \int_0^{\infty} e^{-nx^2} dx < \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1-x^2)^n}.$$

Але

$$1. \int_0^1 e^{-nx^2} dx \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{n}x \\ \frac{u^2}{\sqrt{n}} = x \\ dx = \frac{1}{\sqrt{n}} du \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{n}} P.$$

$$2. \int_0^1 (1-x^2)^n dx \left| \begin{array}{l} x = \cos t \\ dx = -\sin t dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & 0 \end{array} \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t dt = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$$

$$3. \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^n} \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{ctgt} t \\ dx = \frac{1}{\sin^2 t} dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & 0 \end{array} \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} t dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{1}{2}$$

Отже,

$$\sqrt{n} \frac{2n!!}{(2n+1)!!} = K \sqrt{n} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{1}{2}. \quad (7.13)$$

Підносячи до квадрата, і перетворюючи вираз (9.13), матимемо:

$$\sqrt{n} \frac{2n!!}{(2n+1)!!} = K \sqrt{n} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{1}{2}. \quad (7.14)$$

Отже,

$$K^2 = \frac{1}{4} \text{ і } K = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Таким чином:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

III. Інтеграли Фруллані.

$$\int_0^1 \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx, \quad (a, b > 0),$$

де: 1) $f(x)$ визначена і неперервна при $x \rightarrow 0$;

2) існує кінцева границя $f(\quad) \lim_x f(x)$.

Можемо довести, що:

$$\int_0^1 \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(0) - f(\quad)] \ln \frac{b}{a}. \quad (7.15)$$



Обчислити інтеграл:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} cx}{x} dx.$$

Розв'язування. В цьому випадку $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f(0) = 0$, $f(\quad) = \frac{a}{2}$. Отже,

$$-\frac{a}{2} \ln \frac{a}{b}.$$



Вправи для самостійного розв'язування

У задачах 1–18 обчислити невластні інтеграли (або встановити їх розбіжність).

1. $\int_1^2 \frac{2x dx}{x^2 - 1}.$ *Відповідь.* Розбіжний.

2. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 2x - 2}.$ *Відповідь.* .

3. $\int_{\sqrt{2}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$ *Відповідь.* $-\frac{1}{4}.$

4. $\int_0^1 x \sin x dx.$ *Відповідь.* Розбіжний.

5. $\int_1^2 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx.$ *Відповідь.* $-\frac{1}{4} \ln \sqrt{2}.$

6. $\int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx.$ *Відповідь.* $\frac{1}{2}.$

7. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 1}.$ *Відповідь.* $-\frac{1}{2}.$

8. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x - 3}.$ *Відповідь.* Розбіжний.

9. $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x - 1}}.$ *Відповідь.* $\frac{8}{3}.$

10. $\int_0^1 x \ln x dx.$ *Відповідь.* $\frac{1}{4}.$
11. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 2\sqrt{1-x^2}}.$ *Відповідь.* $\frac{\sqrt{3}}{9}.$
12. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$ *Відповідь.* 2.
13. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$ *Відповідь.* $\frac{1}{\sqrt{3}}.$
14. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^3 - 1}.$ *Відповідь.* Збіжний.
15. $\int_1^{\frac{x^3}{x^4} - 1} dx.$ *Відповідь.* Розбіжний.
16. $\int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1-x^4}} dx.$ *Відповідь.* Розбіжний.
17. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^4 - 1}}.$ *Відповідь.* Розбіжний.
18. $\int_2^{\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}}.$ *Відповідь.* Збіжний.

8.1. Алгебраїчні функції.

Властивості степенів.

Для будь-яких x, y та додатних a, b мають місце такі рівності:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1; & (a^x)^y &= a^{xy}; \\ a^x \cdot a^y &= a^{x+y}; & (-a)^x &= -a^x; \\ a^x : a^y &= a^{x-y}; & a^{-x} &= \frac{1}{a^x}; \\ (a^x)^y &= a^{xy}. \end{aligned}$$

Многочлени.

Для будь-яких a, b, c мають місце такі рівності:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b); \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2; \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2; \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \\ (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \\ a^2 + ab + b^2 &= (a - b_1)(a - b_2), \end{aligned}$$

де x_1, x_2 – корені рівняння $x^2 + ax + b = 0$, $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$.

Для

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Якщо n – парне,

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Якщо n – непарне,

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Властивості арифметичних коренів.

Для будь-яких натуральних n, k , більших одиниці, та будь-яких невід'ємних a, b мають місце такі рівності:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k} \quad (a \geq 0);$$

$$\sqrt[n]{-a} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{-1}} \quad (a \neq 0);$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \quad \text{якщо } 0 \leq a < b;$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[n]{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a < 0; \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a};$$

$$\sqrt[n]{a^2} = |a|;$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{-a};$$

$$\sqrt[n]{a^{+1}} = -\sqrt[n]{a^{+1}} \quad (a \geq 0).$$

8.2. Тригонометричні функції.

(У всіх формулах, наведених у цьому пункті, слід враховувати область припустимих значень лівої та правої частини формул)

Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того ж аргумента.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha;$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c};$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c};$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Формули додавання.

$$\sin(\alpha + \beta) =$$

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) =$$

$$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) =$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) =$$

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{1 - \sin^2 \alpha};$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{1 + \sin^2 \alpha};$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{1 + \sin^2 \alpha};$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{1 - \sin^2 \alpha};$$

Формули подвійного аргумента.

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \\ \tan^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha; \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Формули половинного аргумента.

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2};$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}};$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2};$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

Формули згінювання степеня.

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Формули перетворення суми в добуток.

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{4} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{4} \right);$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{4} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{4} \right);$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{4} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{4} \right);$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{4} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{4} \right);$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{4} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{4} \right);$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{4} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{4} \right).$$

Формули перетворення добутку в суму.

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta)).$$

Вирази тригонометричних функцій через тангенс половинного кута.

$$= \frac{2 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}};$$

$$= \frac{2 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}};$$

$$= \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}};$$

$$= \frac{1 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}.$$

Формули зведення.

Назва функції не змінюється				Назва функції змінюється на подібну			
	-	-	+	$\frac{\pi}{2} -$	$\frac{\pi}{2} +$	$\frac{3\pi}{2} -$	$\frac{3\pi}{2} +$
	-		-			-	-
		-	-		-	-	
	-	-			-		-
	-	-			-		-

Значення тригонометричних функцій.

Значення кута		Функції			
град	рад				
0^0	0	0	1	0	∞
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
180^0		0	-1	0	∞
270^0	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞	0
360^0	2	0	1	0	∞

Властивості обернених тригонометричних функцій.

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad |x| \leq 1$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad |x| \leq 1$$

$$\arctan(-x) = -\arctan x,$$

$$\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x,$$

$$\begin{aligned} + &= \frac{1}{2}, | | \leq 1 \\ + &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

Розв'язки найпростіших тригонометричних функцій.

Рівняння	Розв'язки рівняння
$\sin x = a, a \leq 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a, a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\tan x = a$	$x = \arctan a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\cot x = a$	$x = \operatorname{arccot} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Окремі розв'язки тригонометричних рівнянь.

$$\begin{aligned} \sin x &= 0 & x &= \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \sin x &= \pm 1 & x &= \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \cos x &= 0 & x &= \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \cos x &= 1 & x &= 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \cos x &= -1 & x &= \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

8.3. Властивості логарифмів.

1⁰. Основна логарифмічна тотожність:

$$a^{\log_a b} = b, a > 0, a \neq 1, b > 0.$$

2⁰. Логарифм основи дорівнює одиниці:

$$\log_a a = 1.$$

3⁰. Логарифм одиниці дорівнює нулю:

$$\log_a 1 = 0.$$

4⁰. Формула для логарифма добутку:

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, x_1 > 0, x_2 > 0.$$

5⁰. Формула для логарифма частки:

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2, x_1 > 0, x_2 > 0.$$

6⁰. Формула для логарифма степеня:

$$\log_a x^n = n \log_a x, x > 0, n \in \mathbb{R}.$$

7⁰. Формула переходу до нової основи логарифма:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1.$$

Зокрема,

$$\log_a a = \frac{1}{\log_a a}; \log_a 1 = 0; \log_a a = 1.$$

8.4. Прогресії.

Арифметична прогресія	Геометрична прогресія
$a_n = a_1 + (n-1)d$, $d \geq 2$ де d - різниця прогресії	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $q \geq 2$ де q - знаменник прогресії
Формула n -го члена	
$a_n = a_1 + (n-1)d$ $n = 1, 2, \dots$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $n = 1, 2, \dots$
Формула суми перших n членів	
$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$	$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$, $q \neq 1$
Формула для різниці	Формула для знаменника
$d = a_n - a_{n-1}$, $d \geq 2$	$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, $q \geq 2$
Сума натуральних чисел від 1 до n	Сума нескінченно спадної геометричної прогресії
$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$	$S = \frac{a_1}{1-q}$, $ q < 1$

8.5. Основні формули комбінаторики. Біном Ньютона.

Число перестановок з n елементів знаходяться за формулою

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) = n!, 0! = 1.$$

Число розміщень з n елементів по k елементів знаходяться за формулою

$$A_n^k = (n-1) \dots (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Число комбінацій з n елементів по k елементів знаходяться за формулою

$$C_n^k = \frac{(n-1) \dots (n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1)}$$

або

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad C_n^0 = 1.$$

Властивості комбінацій:

$$C_n^k = C_n^{n-k}; \quad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Формула бінома Ньютона має вигляд

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

де $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - число комбінацій з n елементів по k елементів;

Сума біноміальних коефіцієнтів $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$.

8.6. Числові значення деяких величин.

Позначення величини	Числове значення	Позначення величини	Числове значення
	3,14159		2,71828
2	6,28318	$\frac{1}{-}$	0,36788
$\frac{1}{2}$	1,57080	2	7,38906
$\frac{1}{3}$	1,04720	$\sqrt{-}$	1,64872
$\frac{1}{4}$	0,78540		0,43429
$\frac{1}{6}$	0,52360	10	2,30258
$\frac{1}{-}$	0,31831	1 радіан	57°17'45''
2	9,86960	1° (град)	0,0174 (рад)
$\sqrt{-}$	1,77245	$\sqrt{2}$	1,41421
$\sqrt[3]{-}$	1,46459	$\sqrt{3}$	1,73205

Навчальне видання

К. Григоренко, С. Касярум, І. Частоколенко, В. Дендаренко

Вища математика

(частина 1)

Підручник

Підписано до друку 14.06.2024.
Обл.-вид. арк. 4,9. Ум. друк арк. 14.
Замовлення № 16.
ЧПБ ім. Героїв Чорнобиля НУЦЗ України
вул. Онопрієнка, 8, м. Черкаси, 18034.